وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل

أساسيات النظرية الكهرومغناطيسية

تأليف ريتز - ميلفورد

ترجمة يحيى عبد الحميد الحاج علي

الدكتور رحمن رستم عبد الله

المحتويات

البنود والفصول المؤشرة بعلامة (*) يمكن حذفها من دون أن يؤثر دلك على استمرارية المادة .

تمهيد للطبعة الاولى

على الرغم من مضي زمن يزيد على سبعين عاماً منذ صياغة معادلات ماكسويل ، فان موضوع الكهربائية والمغناطيسية لم يبق جامداً خلال تلك المدة . فالتقدم الذي حدث في الثلاثينات من هذا القرن في كشف التكوين الجهري للمادة ، وكذلك في فيزياء الحالة الصلبة في أعقاب الحرب العالمية الثانية ، ادى الى تفهم أفضل للمجالات الكهربائية والمغناطيسية داخل المادة . ومما لاشك فيه أن الطالب في المرحلة المتقدمة من دراسته الجامعية الاولية يأخذ موضوع الكهربائية بعد ان يحصل على تفهم نوعي للظواهر الذرية ، وبعد أن يكتسب في الوقت نفسه خلفية جيدة في الرياضيات . ويصبح الطالب لاول مرة في موقع يؤهله لحل بعض المسائل الرياضية المهمة في الفيزياء التقليدية . وبرأينا ان الحاجة تدعو الى وجود كتاب منهجي لمادة الكهربائية والمغناطيسية مصمم بصورة جيدة يلبي الاحتياجات الخاصة لهذه المجموعة من الطلبة .

لقد إنبثقت فكرة هذا الكتاب من خلال تدريس مقرر في موضوع الكهربائية والمغناطيسية للطلبة المتخصصين في الفيزياء في معهد كَيْس التقني Case Institute of Technology . وكان هؤلاء الطلبة قد حصلوا على معلومات في تحليل المتجهات من خلال دراستهم لمقررات في الرياضيات والميكانيك اضافة الى حصولهم على معلومات في المعادلات التفاضلية الجزئية المهمة في الفيزياء ، وكذلك تعرفوا على مسائل القيم الحدودية . وقد جعل مقرر الكهربائية والمغناطيسية بحيث يتلاءم على الشكل الامثل مع المزيد من التطورات في هذه المفاهيم الرياضية ، وهذا ما حاولنا ان نفعله في هذا الكتاب . ومع أنه من الافضل ان يحصل الطالب مسبقاً على مقدمة في هذه المفاهيم ، فقد تمت كتابة البنود المتعلقة بتحليل المتجهات ومسائل القيم الحدودية بطريقة لاتتطلب الا الشيء القليل عن المعرفة المسبقة للموضوع .

إننا نشعر أن الاسلوب المتبع في بناء الكهربائية والمغناطيسية من القوانين التجريبية الاساسية لازال هو الاسلوب الصحيح في المرحلة المتوسطة من التعليم الجامعي ، ولهذا تبنينا هذا الاسلوب . وعلى الرغم من أن العرض الدقيق لأساسيات الموضوع هو مانفضله على تعليم المادة باستخدام الامثلة ، فقد كنا مهتمين بادخال عدد من الامثلة المختارة بعناية لتصل الفجوة بين التطور التقليدي للموضوع والمسائل . لقد دلت التجارب على ان النقص في الامثلة يمكن ان ينقص من منزلة الكتاب المنهجي مهما كان كتاباً جيداً .

اننا نعتقد ان التفهم الكامل للمجالات الكهربائية والمغناطيسية داخل المادة لا يمكن ان يحدث الا بعد دراسة الطبيعة الذرية للمادة . ولهذا السبب استعملنا مفاهيم ذرية أولية في تطوير النظرية العينية . وقد حاولنا ان نستعمل أسلوباً فيزيائياً في معالجة الاستقطاب والتمغنط ، وكذلك في مناقشة المتجهين المساعدين **D** و **H** . وبهذا نشعر اننا قد أضفنا شيئاً الى هذا الحقل في كتابنا هذا .

هناك فصول قصيرة منفصلة قد كتبت حول النظرية الجهرية للعازل وللمادة المغناطيسية . واعتيادياً يهمل هذا الموضوع في الكتاب الذي يتضمن النظرية التقليدية ، لكنه يبدو لنا أن العديد من المفاهيم قد عرضت بأفضل صيغة وبشكل بسيط .

ان المميزات الخاصة لكتابنا هذا هي : **أولا** ــ معالجة اتجاهية كاملة للموضوع تتضمن استعمال المتطابقات الاتجاهية لتبسيط براهين النظريات ، **ثانياً** ــ أسلوب هادف الى مسائل القيم الحدودية وحل هذه المسائل ، **ثالثاً** ــ تطوير دقيق لموضوع الكهربائية والمغناطيسية من القوانين التجريبية ، وبدون ترك براهين أساسية لكتب منهجية أخرى أكثر تقدماً ، **رابعاً** ــ استخدام مفاهيم ذرية لتبسيط فهم النظرية العينية للمجالات داخل المادة ، **خامساً** ــ العلاقة بين الصورتين الجهرية والعينية للمجالات الكهربائية والمغناطيسية داخل المادة ، **سادساً** ــ مقدمة لفيزياء البلازما ، **سابعاً** ــ كشف اساسي لمسائل غير بديهية مرتبطة بمادة الكتاب .

ولمساعدة المدرس قد تم تأشير المسائل الاكثر صعوبة بعلامة النجمة . والبنود المؤشرة بعلامة النجمة هي غير ضرورية لمتابعة مادة الكتاب ويمكن لمدرس المادة ان يحذفها ان أراد أن يقلص المقرر لسبب أو لآخر .

حزيران 1959

جون ريتز
فردريك ملفورد

تمهيد الطبعة الثانية المنقحة

الهدف الأولي من تنقيح الطبعة الأولى هو ادخال حقلين جديدين ، إذ شعرنا بانه من الضروري أن يحتوي الكتاب على هذين الحقلين لتلبية الغرض المنشود منه في المرحلة المتوسطة من التعليم الجامعي الأولي . هذان الحقلان هما مقدمة في النظرية النسبية الخاصة ، وخاصة بما يتعلق بتأثيراتها على الظواهر الكهرومغناطيسية ،ومقدمة في الكتروديناميك فرط التوصيل . يرجع أصل النظرية النسبية الى صعوبات معينة في النظرية الكهرومغناطيسية ظهرت عند صياغتها في مطلع هذا القرن . ولقد وفرت النسبية حال نشوئها اطاراً موحداً للظواهر الكهرومغناطيسية . وفضلاً عن ذلك عُدَّت النسبية بمثابة أداة سهلة (تحويلات لورنتز) لحساب مجالات الشحنات المتحركة . وهذا الحقل يعد أساساً للأعمال المتقدمة في الفيزياء ، ولهذا السبب فإنَّ تعرض الطالب المتخصص لهذا الحقل بصورة مبكرة يعدُّ ضماناً له . النظرية النسبية تشكل أساس الفصل السابع عشر في هذه الطبعة المنقحة من الكتاب .

تضمنت الطبعة الأولى فصولاً عن استجابة المواد التقليدية للمجالات الكهرومغناطيسية . ولهذا السبب نجد أن مواد مثل العوازل والقطع الممغنطة الفيرومغناطيسية والموصلات قد نوقشت ، كما تم جدولة الخواص الفيزيائية لأمثلة على هذه المواد . لكن نوعاً واحداً من المواد لم يناقش هي المواد مفرطة التوصيل . والمواد مفرطة التوصيل لم تعد مثيرة للاهتمامات العلمية ، إذ أن الملفات الحلزونية مفرطة التوصيل قد أصبحت شائعة الاستعمال في المختبرات .

كما أصبحت ادوات أخرى مفرطة للتوصيل تأخذ مكانة معتبرة في التطبيقات العلمية والهندسية المختلفة . ولهذا السبب يبدو أنه من الملائم مناقشة استجابة المواد مفرطة التوصيل للمجالات الكهربائية والمغناطيسية الساكنة ، وهذا مايشكل اساس الفصل الثامن عشر .

وباستثناء المادة المضافة ، فإن التغييرات التي حدثت في الكتاب تعد طفيفة . الفصل السادس عشر تم تطويله ليشمل شرحاً مبسطاً للاشعاع المنبعث عن توزيع شحني كيفي والفصل السابع عشر في الطبعة القديمة حول الكتروديناميك الشحنات المتحركة قد حل محله الفصل التاسع عشر في الطبعة الحالية . وقد قمنا بهذا الشيء لكي نبين أن مجالات الاشعاع للشحنات سريعة الحركة يمكن حسابها بطرق بديلة عن تحويلات لورنتز . كما تم إضافة عدد من المسائل والملاحق .

يرغب المؤلفان في تسجيل شكرهما للأشخاص الكثيرين الذين كتبوا لنا وعبروا عن إهتمامهم بالكتاب أو الذين اقترحوا تغييرات وإضافات . وبالفعل قد تم اخذ هذه الاقتراحات بعين الاعتبار ، كما تم احتواء العديد من هذه المقترحات .

آذار **1966**

جون رتيز
فردريك ملفورد

الفصل الأول

تحليل المتجهات
VECTOR ANALYSIS

خلال دراسة الكهربائية والمغناطيسية يمكن تذليل الشيء الكثير من الصعوبات وتبسيط التعقيدات باستعمال رموز ومصطلحات تحليل المتجهات . وفضلاً عن ذلك فإن استخدام تحليل المتجهات في هذا الموضوع يوضح الافكار الفيزيائية التي تتضمنها المعادلات الرياضية . والغرض من هذا الفصل هو عرض أساسيات تحليل المتجهات بصورة مختصرة ومركزة وتقديم كل ماهو مفيد بل وضروري من هذا الحقل لغرض معالجة الكهربائية والمغناطيسية . ان الذين لديهم إطلاع على هذا الحقل من المعرفة سيجدون هذا الفصل المختصر في تحليل المتجهات مفيداً ومقدمة جيدة لمحتويات هذا الكتاب .

1-1 تعاريف Definitions

خلال دراسة الفيزياء الأولية يتعرّف القاريء على عدد من المفاهيم الاساسية وبالأخص تقسيم الكميات الفيزيائية الى نوعين : كميات متجهة وأخرى لا متجهة (عددية) . وتعرف الكمية اللامتجهة كالآتي :

الكمية اللامتجهة هي تلك الكمية التي تميز كلياً بمقدارها .

والأمثلة على الكميات اللامتجهة كثيرة جداً منها الكتلة والزمن والحجم . ويعدٌّ المجال اللامتجه امتداداً لمفهوم الكمية اللامتجهة ، ويعرف بأنه دالة للموضع الذي يحدد كلياً بالمقدار لجميع نقاط الفضاء .

أما الكمية المتجهة فتعرف كالآتي :

الكمية المتجهة هي تلك الكمية التي تميز كلياً بمقدارها وإتجاهها .

وهناك أمثلة كثيرة على الكميات المتجهة منها بعد موضع معين عن نقطة الأصل والسرعة والتعجيل والقوة . ومتجه المجال هو تعميم للمتجه ونعني به دالة الموضع الذي يحدد كلياً بالمقدار وبالاتجاه لجميع نقاط الفضاء .

وبالامكان تنقية هذه التعاريف وتوسيعها . فعند معالجة المواضيع الفيزيائية بصورة متقدمة يستعاض عادة عن هذه التعاريف بتعاريف أخرى معطاة بدلالة خواص التحويل . وفضلاً عن ذلك ستواجهنا أحياناً انواع من هذه الكميات المعقدة مثل الكميات الممتدة tensors . بيد أن المتجهات واللامتجهات ستفي بالغرض المنشود .

1-2 جبر المتجهات Vector algebra

بما أن الجبر المتعلق بالكميات اللامتجهة مألوف لدى القاريء ، فإننا سنستعمل هذا الجبر لتطوير مايعرف بجبر المتجهات . ولتحقيق هذا الغرض نرى من الملائم إستخدام نظام الاحداثيات الديكارتية ذات الأبعاد الثلاثة . ويرمز للابعاد الثلاثة لهذا النظام بالمتغيرات x و y و z ، وقد يرمز لها بالكميات x_1 و x_2 و x_3 عندما تدعو الحاجة لذلك . وحسب هذا النظام يحدد المتجه بمركباته الثلاث باتجاه الاحداثيات x و y و z . فالمتجه* $\mathbf{V}$ على سبيل المثال يعين بمركباته V_x و V_y و V_z ، إذ أن

$$V_x = |\mathbf{V}| \cos \alpha_1,$$

$$V_y = |\mathbf{V}| \cos \alpha_2,$$

$$V_z = |\mathbf{V}| \cos \alpha_3,$$

---

* يرمز للمتجه عادة بان يكتب الحرف الذي يمثله بحرف غامق أو أن يوضع فوقه سهم .

والزوايا α ترمز للزوايا التي يعملها المتجه مع كل من الاحداثيات الثلاث على الترتيب . وفي حالة المجالات المتجهة ، فان كل من المركبات تعد دالة للاحداثيات x و y و z . وهنا ينبغي أن نؤكد على أن سبب اختيار نظام الاحداثيات الديكارتية هو لتبسيط الموضوع وسهولة فهمه لا غير . والحقيقة ان جميع التعاريف والعمليات الرياضية لاتعتمد على النظام المختار للاحداثيات .

يعرف حاصل جمع متجهين بانه المتجه الذي تكون مركباته مساوية لمجموع المركبات المناظرة للمتجهين الأصليين . فاذا كان المتجه **C** مساوياً لمجموع المتجهين **A** و **B** ، أي

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \tag{1-1}$$

فان

$$C_x = A_x + B_x, \quad C_y = A_y + B_y, \quad C_z = A_z + B_z. \tag{1-2}$$

وهذا التعريف لمجموع المتجهات يكافيء قانون متوازي الاضلاع الشائع لجمع المتجهات .

ويعرف طرح المتجهات بدلالة القيمة السالبة للمتجه . المتجه السالب هو المتجه الذي تكون مركباته مساوية للمركبات المناظرة للمتجه الأصلي باشارة سالبة . فاذا كان **A** متجهاً ، فان المتجه **A**- يعرف كالآتي :

$$(-\mathbf{A})_x = -A_x, \quad (-\mathbf{A})_y = -A_y, \quad (-\mathbf{A})_z = -A_z. \tag{1-3}$$

وعلى هذا الاساس تعرف عملية طرح المتجهات بأنها جمع المتجه السالب ، أي أن

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}). \tag{1-4}$$

وبما ان جمع الأعداد الحقيقية تمتلك خاصية الترافق associative ، فإن جمع المتجهات (وطرحها) يمتلك خاصية الترافق كذلك . وهذا يعني أن

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{C}) + \mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}. \tag{1-5}$$

وبعبارة أخرى لا حاجة للأقواس عند اجراء عملية الجمع كما هو الحال في التعبير الأخير .

والآن نأتي الى عملية الضرب ، ونلاحظ أن أبسط حالة هي ضرب لا متجه بمتجه . ويكون ناتج هذه العملية متجهاً تمتاز كل مركبة من مركباته بأنها تساوي حاصل ضرب الكمية اللامتجهة بالمركبة المناظرة للمتجه الأصلي . فاذا كانت c كمية لا متجهة و **A** كمية متجهة ، لأصبح ناتج الضرب **cA** مساوياً لكمية متجهة هي **B** بحيث أن

$$B_x = cA_x, \qquad B_y = cA_y, \qquad B_z = cA_z. \tag{1-6}$$

ومن الواضح أنه اذا كان **A** هو مجال متجه و c مجال لا متجه ، فان **B** سيكون مجالاً متجهاً أيضاً ، وانه ليس من الضروري أن يكون هذا المجال المتجه الجديد مضاعفاً بسيطاً للمجال الأصلي .

أما اذا كان المطلوب ضرب متجه بمتجه آخر ، فهناك اسلوبان لانجاز هذا الضرب ، هما نتاج متجه ونتاج لا متجه . لنأخذ أولاً النتاج اللامتجه (أو العددي) ، سنجد ان هذا الاسم مشتق من حقيقة أن ناتج ضرب المتجهين يكون كمية لا متجهة . ومع ذلك فهناك تسميات أخرى لهذا النوع من ضرب المتجهات وهي النتاج النقطي والنتاج الداخلي . ويكتب النتاج اللامتجه لضرب المتجهين **A** و **B** هكذا : **A.B** ، ويمثل بالمعادلة الآتية

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \tag{1-7}$$

وهذا التعريف يكافيء تعريفاً آخر مألوفاً وهو أن النتاج اللامتجه يساوي حاصل ضرب مقدار كل من المتجهين الأصليين بالآخر وبجيب تمام الزاوية المحصورة بينهما .

والنتاج المتجه لضرب كمية متجهة بأخرى متجهة كذلك يكون متجهاً ، والتسمية مستمدة من هذه الحقيقة . ولهذا النوع من ضرب المتجهات تسميات أخرى مألوفة هي النتاج التقاطعي والنتاج الخارجي . ويكتب النتاج المتجه هكذا : **A×B** ، واذا كان ناتج الضرب المتجه **C** فان

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B},$$

أو

$$C_x = A_yB_z - A_zB_y, \qquad C_y = A_zB_x - A_xB_z, \qquad C_z = A_xB_y - A_yB_x. \tag{1-8}$$

وهذا التعريف يكافيء الآتي : النتاج المتجه هو حاصل ضرب مقدار كل من المتجهين بالآخر وبجيب الزاوية المحصورة بين المتجهين الأصليين ، على أن يؤخذ الاتجاه حسب قاعدة لولب اليد اليمنى* .

ومن المهم ان نلاحظ ان النتاج التقاطعي يعتمد ترتيب المتجهين ، فاذا عكس هذا الترتيب لوجب ادخال اشارة ناقص أمام ناتج الضرب . ويمكن للمرء ان يتذكر بسهولة النتاج الاتجاهي اذا استخدم المحددات . فاذا فرضنا أن كلاً من **i** و **j** و **k** تمثل وحدة متجه (أي متجه مقداره وحدة واحدة) بالاتجاهات x و y و z على الترتيب لنتج لدينا الآتي

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (1\text{-}9)$$

وعند حساب هذا المحدد حسب القواعد المرعية للمحددات ستكون النتيجة متفقة مع التعريف المذكور سابقاً عن النتاج التقاطعي .

وهنا قد يتساءل المرء عن امكانية تقسيم المتجهات . والحقيقة أنه يمكن تقسيم متجه على لا متجه ، وتكون هذه الحالة ، بطبيعة الحال ، مشابهة تماماً لضرب المتجه بمقلوب اللامتجه . بيد ان تقسيم متجه على متجه آخر يكون ممكناً فقط في الحالة التي يكون فيها المتجهان متوازيين . ومن الناحية الاخرى يمكن أن نكتب حلولاً عامة للمعادلات الاتجاهية وأن نحصل على شيء يشبه عملية التقسيم . لنأخذ المعادلة :

$$c = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}, \qquad (1\text{-}10)$$

اذ ان الحرف c يمثل كمية لامتجه معروف ، و **A** كمية متجهة معروفة كذلك ، و **X** متجهاً مجهولاً . والحل العام لهذه المعادلة هو :

$$\mathbf{X} = \frac{c\mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} + \mathbf{B}, \qquad (1\text{-}11)$$

* دع المتجه **A** يدور نحو المتجه **B** خلال الزاوية الصغرى المحصورة بينهما . ولولب اليد اليمنى الذي يدور بهذه الطريقة سيتقدم باتجاه عمودي على المتجهين **A** و **B** معاً ، وهذا الاتجاه هو اتجاه $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$.

اذ ان **B** يمثل متجهاً ذا مقدار كيفي عمودي على المتجه **A** ، وهذا يعني ان **A. B** = O . ان ماقمنا به هو شيء شبيه جداً بقسمة c على المتجه **A** ، وبمعنى أدق أننا قد وجدنا الهيئة العامة للمتجه **X** الذي يحقق المعادلة (1-10) . ولايوجد حل منفرد لتلك المعادلة ، وهذه الحقيقة تفسر واقع المتجه **B** . وعلى الطراز نفسه يمكننا أن نأخذ المعادلة الاتجاهية الآتية :

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{X}, \tag{1-12}$$

إذ ان **A** و **C** يمثلان متجهين معلومين ، و **X** يمثل متجهاً غير معلوم . والحل العام لهذه المعادلة يتمثل في العلاقة الآتية :

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{C} \times \mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} + k\mathbf{A}, \tag{1-13}$$

اذ ان k تعبر عن كمية لااتجاهية كيفية . وهذه الحالة أيضاً تشبه الى حد كبير قسمة المتجه **C** على المتجه **A** . والمقدار اللامتجه k يعبر عن الحل اللامنفرد لهذه العملية . واذا كان على **X** ان تحقق المعادلتين (1-10) و (1-12) ، فعند ذلك تكون النتيجة منفردة وتعطى بالمعادلة :

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{C} \times \mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} + \frac{c\mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}. \tag{1-14}$$

ويمكننا دمج العمليات الجبرية المذكورة في أعلاه بطرق عديدة . ومعظم النتائج التي حصلنا عليها كانت بديهية ، ومع ذلك فهناك حالتان جديرتان بالاهتمام ، انهما مرتبطتان بالضرب الثلاثي بين المتجهات . لنأخذ أولاً النتاج اللامتجه الثلاثي المتمثل بالمعادلة **D = A.B × C** ، سنجد انه بالامكان ايجاده بسهولة بواسطة المحددات وكالآتي :

$$D = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{C}. \tag{1-15}$$

ان ناتج هذا الضرب لا يتغير بتبديل موضعي النقطة والتقاطع ، ولا بالتبديل الدوري للمتجهات الثلاثة . ولا ضرورة لوضع الاقواس وذلك لانه لامعنى للنتاج التقاطعي بين متجه ولا متجه . أما النتاج الثلاثي الاخر فهو النتاج المتجه الثلاثي المتمثل بالمعادلة **D = A × (B × C)** . وبتكرار استخدام تعريف النتاج التقاطعي حسبما جاء بالمعادلة (1-8) نجد ان :

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \qquad (1\text{–}16)$$

وغالباً مايطلّق على هذه القاعدة اسم "back cab rule" . ومما ينبغي ملاحظته هو أن وضع الاقواس ضروري في النتاج التقاطعي الثلاثي ، فبدون الاقواس تكون عملية الضرب غير معرفة .

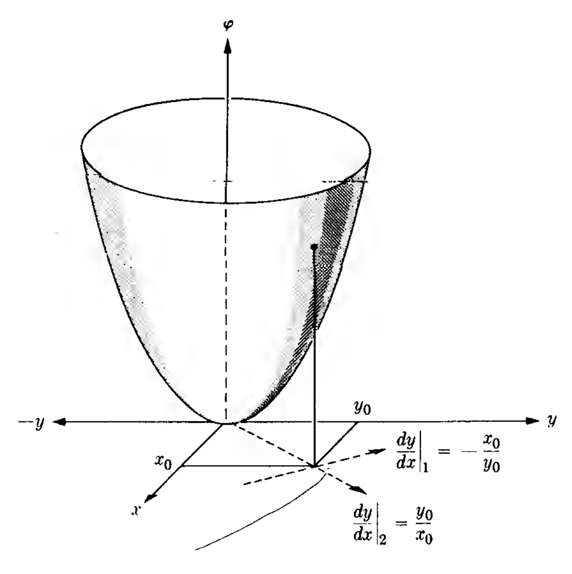
1-3 الانحدار (أول الميل) Gradient

ان توسيع الافكار المذكورة في اعلاه بحيث يشمل التفاضل والتكامل ، أي حسبان المتجهات ، هو ماسنعالجه الآن . وأبسط ماسنتناوله هو العلاقة بين مجال متجه معين ومشتقة مجال لا متجه . ومن الملائم أن ندخل باديء الامر فكرة المشتقة الاتجاهية لدالة ذات عدة متغيرات . ويقصد بالمشتقة الاتجاهية بانها معدل تغير الدالة باتجاه معين . ويرمز للمشتقة الاتجاهية لدالة لامتجهة ϕ عادة بالرمز $d\phi / ds$. ويجب ان يكون مفهوماً ان ds تمثل ازاحة صغيرة جداً بالاتجاه المقصود ، وأن ds هي مقدار المتجه ds . فاذا حللنا ds للمركبات dx و dy و dz لنتج لدينا الآتي :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{ds} &= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta s} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds}. \end{aligned}$$

ولتوضيح فكرة المشتقة الاتجاهية ، نأخذ دالة لا متجه ذات متغيرين . وبهذا فان $\phi(x, y)$ تمثل دالة لا متجه ذي بعدين . ويمكننا أن نرسم ϕ بدلالة البعدين x و y كما هو موضح في الشكل (1-1) للدالة $\phi(x, y) = x^2 + y^2$. وطبيعي ان المشتقة الاتجاهية عند النقطة (x_0, y_0) تعتمد على الاتجاه . فاذا اخترنا الاتجاه الذي يتفق مع $dy/dx = -x_0/y_0$ ، لحصلنا على :

$$\left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_{x_0,y_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \left[2x_0 - 2y_0\frac{x_0}{y_0}\right]\frac{dx}{ds} = 0. \qquad (1\text{–}17a)$$



الشكل **1.1** الدالة $\phi(x, y) = x^2 + y^2$ مرسومة بدلالة y, x برسم بياني ذي ابعاد ثلاثة

أما اذا اخترنا $dy/dx = y_0/x_0$ لوجدنا أن

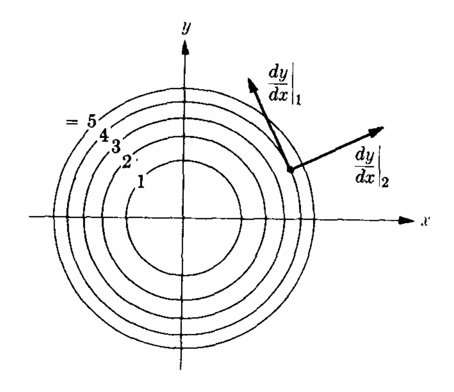
$$\left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_{x_0,y_0} = \left(2x_0 + 2\frac{y_0^2}{x_0}\right)\sqrt{\frac{x_0^2}{x_0^2+y_0^2}} = 2\sqrt{x_0^2+y_0^2}. \quad \text{(1–17b)}$$

وكاحتمال ثالث نختار $dy/dx = \alpha$ ، وبهذا ينتج :

$$\left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_{x_0,y_0} = (2x_0 + 2\alpha y_0)(1+\alpha^2)^{-1/2}. \quad \text{(1–17c)}$$

واذا ما تم مفاضلة هذه النتيجة بالنسبة لـ α ، وجعلت المشتقة مساوية للصفر ، لأمكن ايجاد قيمة α التي تجعل المشتقة عند قيمتها القصوى أو الدنيا . وعند إنجاز هذه العمليات نحصل على $\alpha = y_0/x_0$. وهذه النتيجة تعني أن اتجاه ذروة معدل التغير للدالة $\phi = x^2 + y^2$ يكون بالاتجاه الشعاعي . فإذا كان الاتجاه شعاعياً نحو الخارج فان الذروة هي ذروة معدل الزيادة ، واذا كان الاتجاه شعاعياً نحو الداخل فانها تساوي ذروة معدل النقصان أو القيمة الدنيا لمعدل الزيادة . وفي الاتجاه المحدد بالعلاقة $dy/dx = -x_0/y_0$ فان معدل تغير الدالة $x^2 + y^2$

يساوي صفراً .وهذا الاتجاه يكون مماساً للدائرة $x_o^2 + y_o^2 = x^2 + y^2$. ومن الواضح أن الدالة $\phi = x^2 + y^2$ لا تتغير على هذا المنحني . والاتجاه الذي عنده تصبح $d\phi/ds$ صفراً يعطي إتجاه المنحني المعبر عن ثبوت قيمة الدالة ϕ خلال النقطة تحت الاعتبار . وهذه الخطوط التي تكون بهيئة دوائر للدالة $x^2 + y^2$ تكون مماثلة لخطوط المناسيب المألوفة contour lines أو الخطوط المتساوية الارتفاع التي تظهر على الخرائط الطوبوغرافية . والشكل (2-1) يبين الدالة $\phi = x^2 + y^2$، مرسومة كخارطة مناسيبية contour map.



لشكل 2-1 رسم الدالة (x, y) ϕ الموضحة في الشكل (1-1) كخارطة مناسيبية ذات بعدين .

ويمكن تعميم فكرة خطوط المناسيب لكي تشمل الدوال ذات المتغيرات الثلاثة ، حيث تدعى السطوح الممثلة بالدالة "كمية ثابتة = ϕ (x, y, z)" سطوح تساوي الجهد . إن الشكل المرسوم بأبعاد ثلاثة والذي يناظر الشكل (2-1) يعدُّ الأسلوب العملي الوحيد لرسم مجال لامتجه للفضاء ذي الأبعاد الثلاثة .

والآن يصبح بوسعنا أن نعرف إنحدار دالة لا متجهة كما هو آتٍ :

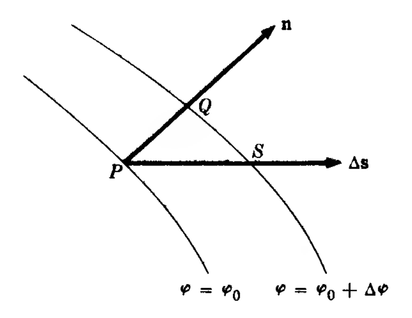
إن إنحدار دالة لامتجهة ϕ هو متجة مقداره يساوي ذروة المشتقة الاتجاهية عند النقطة تحت الاعتبار وإتّجاهه يكون بنفس إتجاه ذروة المشتقة الاتجاهية عند تلك النقطة .

ومن الواضح أن اتجاه الانحدار يكون عمودياً على سطح تساوي الجهد للدالة ϕ المار في النقطة تحت الاعتبار . واكثر رموز الانحدار شيوعاً هما الرمزان ∇ و **grad** ، ومع ذلك فاننا سنستعمل الرمز الأخير على الأغلب . ويمكن التعبير عن المشتقة الاتجاهية بدلالة الانحدار كالآتي :

$$\frac{d\varphi}{ds} = |\mathbf{grad}\ \varphi| \cos\theta, \tag{1-18}$$

اذا أن θ الزاوية المحصورة بين إتجاه ds واتجاه الانحدار . وهذا الشيء يتبين بوضوح في الحال عند ملاحظة الشكل (3-1) . واذا عبرنا عن الازاحة الاتجاهية التي مقدارها ds بالمتجه **ds** لأمكننا كتابة المعادلة (18-1) بالشكل الآتي :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \mathbf{grad}\ \varphi \cdot \frac{d\mathbf{s}}{ds}. \tag{1-19}$$



الشكل 3-1 جزان من سطحي تساوي جهد للدالة (x, y, z) ϕ . | grad ϕ | عند نقطة P يساوي غاية PQ /Δφ عندما تقترب PQ من الصفر ، و dφ/ ds تساوي غاية PS /Δ φ

وهذه المعادلة تمكننا من ايجاد الهيئة الصريحة explicit form للانحدار ، وباستخدام اي نظام للاحداثيات يتفق مع النظام المستعمل لـ **ds** . فحسب نظام الاحداثيات المتعامدة نعرف أن :

$$d\mathbf{s} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz.$$

وكذلك نعرف أن :

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz.$$

ومن هذه المعادلة والمعادلة (19-1) ينتج :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = (\mathbf{grad}\ \varphi)_x\, dx + (\mathbf{grad}\ \varphi)_y\, dy + (\mathbf{grad}\ \varphi)_z\, dz.$$

ومن تساوي معاملات الكميات التفاضلية ذات المتغيرات المستقلة في طرفي المعادلة ينتج :

$$\mathbf{grad}\ \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \qquad (1\text{-}20)$$

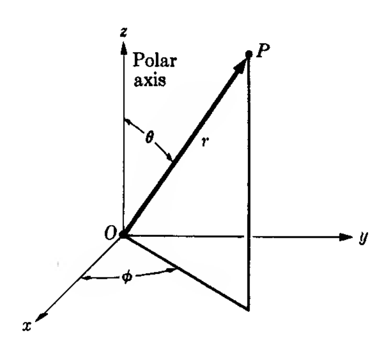
هذا هو انحدار الدالة اللامتجهة ϕ بدلالة الاحداثيات المتعامدة . وتستعمل الطريقة نفسها في الحالات الاكثر تعقيداً . وبدلالة الاحداثيات الكروية القطبية نحصل على ما يأتي :

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} d\phi, \qquad (1\text{-}21)$$

$$ds = \mathbf{a}_r\, dr + \mathbf{a}_\theta r\, d\theta + \mathbf{a}_\phi r \sin \theta\, d\phi, \qquad (1\text{-}22)$$

إذ ان تعريف الاحداثيات r و θ و ϕ هو كما موضح في الشكل (4-1) ، وان الكميات a_r و a_θ و a_ϕ تمثل وحدات للمتجه بالاتجاهات r و θ و ϕ على الترتيب . وباستخدام المعادلة (19-1) . ومن ثم جعل المعاملات ذات المتغيرات المستقلة في طرفي المعادلة متساوية نحصل على المعادلة المعبرة عن انحدار الدالة ϕ بدلالة الاحداثيات الكرويـة وهي :

$$\mathbf{grad}\ \varphi = \mathbf{a}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \qquad (1\text{-}23)$$



الشكل 4-1 تعريف الاحداثيات الكروية r و θ و ϕ

1-4 تكامل المتجهات Vector integration

هناك بالطبع جوانب أخرى للتفاضل الذي يتضمن المتجهات . ومع ذلك فمن الملائم ان نبدأ بمناقشة التكامل الاتجاهي أولاً . وسنأخذ ثلاثة أنواع من التكاملات : الخطية والسطحية والحجمية ، حسب طبيعة الكميات التفاضلية التي تظهر في الصيغة التكاملية . والدالة المطلوب تكاملها قد تكون دالة متجهة وقد تكون دالة لا متجهة ، ومع ذلك فإن الدمج بشكل معين بين الكميات المطلوب تكاملها والكميات التفاضلية يؤدي الى تكوين تكاملات قد لا تهمنا . ان مايهمنا في هذا الخصوص هو التكامل الخطي للمتجه والتكامل السطحي للمتجه والتكامل الحجمي للكميات المتجهة واللامتجهة .

واذا كان **F** متجهاً لأمكن كتابة تكامل **F** الخطي هكذا :

$$\int_{a\,C}^{b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}, \qquad (1\text{–}24)$$

إذ ان الرمز C يشير الى المنحني الذي ينجز عليه التكامل الخطي ، والرمزين a و b يشيران الى النهايتين الابتدائية والنهائية للمنحني . ولما كان النتاج النقطي **F.dl** هو كمية لامتجهة ، فمن الواضح عندئذ ان التكامل الخطي سيكون لا متجهاً . إن تعريف التكامل الخطي يتبع في الحال تعريف رايمان Riemann للتكامل المحدد . فالجزء المحصور بين النقطتين a و b من المنحني C يقسم الى عدد

كبير من الزيادات الصغيرة increments $\Delta \mathbf{l}_i$. ويتم اختيار نقطة في الجزء الداخلي لكل زيادة ، ومن ثم توجد قيمة المتجه **F** عند تلك النقطة . ثم يوجد النتاج اللامتجه لكل زيادة ، وبعد ذلك يحسب المجموع . وبهذا يعرف التكامل الخطي على أنه غاية المجموع عندما يقترب عدد الزيادات من مالانهاية بحيث تقترب قيمة كل من هذه الزيادات من الصفر . ويمكن التعبير عن هذا التعريف بالصيغة :

$$\int_{a_C}^{b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{l}_i.$$

ومن المهم ان نلاحظ ان التكامل الخطي اعتيادياً لا يعتمد على النهايتين a و b فحسب بل يعتمد كذلك على المنحني C الذي ينجز عليه التكامل . وللتكامل الخطي حول منحني مغلق أهمية كافية بحيث يستعمل رمز خاص به ، ألا وهو رسم دائرة صغيرة في وسط علامة التكامل ، أي :

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}. \qquad (1\text{–}25)$$

وقد يكون ناتج التكامل حول منحني مغلق صفراً ، وقد لا يكون . ولصنف المتجهات التي تمتاز بأن يكون تكاملها الخطي حول منحني مغلق مساوياً للصفر اعتبارات مهمة . ولهذا السبب غالباً مايواجه المرء تكاملاً خطياً مكتوباً بالشكل الآتي :

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}. \qquad (1\text{–}26)$$

اي بدون الحرف C عند علامة التكامل ، وهذا يعني أن التكامل الخطي مأخوذ على منحني مغلق غير محدد . وهذا الرمز يكون مفيداً فقط في تلك الحالات التي يكون فيها التكامل مستقلاً عن شكل المسار المغلق ضمن حدود واسعة نوعاً ما . وإذا أردنا أن نتجنب حدوث أي التباس أو غموض فمن الحكمة أن نعين المسار المغلق . ان الاسلوب الاساس الذي يمكننا من حساب التكاملات الخطية هو أن نحصل على وصف ذي مَعْلَمٍ parameter واحد للمنحني ، ومن ثم نستعمل هذا الوصف للتعبير عن التكامل الخطي كمجموع لثلاثة تكاملات اعتيادية بحيث يكون لكل تكامل بعد واحد . وفي جميع الحالات عدا البسيطة منها يكون هذا الاسلوب طويلاً ومملاً . ولكنه لحسن الحظ نادراً مايكون من الضروري حساب التكاملات بهذه الوسيلة . فعلى الاغلب يمكن تحويل التكامل الخطي الى تكامل سطحي أو ان

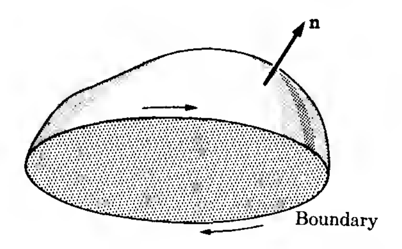
نبين ان التكامل الخطي لا يعتمد على شكل المسار الذي يصل بين نقطتي النهاية . وفي هذه الحالة الاخيرة يمكننا ان نختار مساراً سهلاً بين النقطتين لكي يصبح التكامل بسيطاً .

واذا كان **F** مرة أخرى متجهاً ، لأمكن كتابة التكامل السطحي للمتجه F كالآتي :

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da, \tag{1-27}$$

إذ يرمز الحرف S الى السطح الذي ننجز عليه عملية التكامل ، و da تمثل مساحة صغيرة جداً على السطح S ، و **n** وحدة متجه عمودي على da . فاذا كان السطح S مغلقاً فان **n** ترسم عمودية على السطح ونحو الخارج . اما اذا كان السطح S غير مغلق ومحدد فسيكون له حدوداً بطبيعة الحال . وعندئذ يكون العمود مهماً فقط بالنسبة للاتجاه الموجب الكيفي الذي يؤخذ حول الحدود . وبهذا يكون الاتجاه الموجب للعمود هو ذلك الاتجاه الذي يعبر عن تقدم لولب اليد اليمنى فيما اذا دار بالاتجاه الموجب حول المسار المحيط بالسطح كما هو مبين في الشكل (5-1) . ويمثل التكامل السطحي للمتجه **F** على سطح مغلق S كالآتي :

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da.$$



الشكل 5-1 علاقة العمود **n** على السطح مع الاتجاه المأخوذ حول الحدود المحيطة بالسطح .

ويمكننا سرد تعليقات مماثلة لتلك التعليقات التي ذكرت حول التكامل الخطي . فمن الواضح أن التكامل السطحي هو كمية لا متجهة ، وانه اعتيادياً يعتمد على السطح S . على انه توجد حالات جديرة بالاهتمام لا يكون فيها التكامل السطحي

معتمداً على السطح . أما تعريف التكامل السطحي فيمكن التعبير عنه بصورة مماثلة لتعريف التكامل الخطي . وسنترك الصياغة التفصيلية للتعريف تمريناً للطالب .

اذا كان **F** متجهاً و ϕ لا متجهاً ، فان مايهمنا هو التكاملان الحجميان الآتيان

$$J = \int_V \varphi \, dv, \qquad \mathbf{K} = \int_V \mathbf{F} \, dv. \tag{1-28}$$

وواضح أن J هو لا متجه وأن **K** هو متجه . إن تعريف هذه التكاملات يختصر بسرعة الى تكامل رايمان بثلاثة أبعاد عدا مايتعلق بـ **K** إذ يجب على المرء أن يلاحظ ان هناك تكاملاً واحداً لكل مركبة من مركبات **F** . وهذه التكاملات مألوفة بدرجة كافية ولا تحتاج الى مزيد من التعقيب .

1-5 التباعد : . . . . .Divergence

يعد عامل التباعد divergence operator من العوامل المهمة التي تعبر أساساً عن المفهوم الرياضي للاشتقاق derivation . ويعرف تباعد المتجه **F** (ورمزه **divF**) كالآتي :

إن تباعد المتجه يساوي غاية تكامله السطحي لوحدة الحجم عندما يقترب الحجم المحاط بالسطح من الصغر . أي :

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da.$$

وواضح أن التباعد هو دالة نقطية لا متجهة (مجال لا متجه) ، وأنه يعرف عند نقطة الغاية لسطح التكامل . والتعريف المذكور في أعلاه يمتلك بضعة مزايا : إنه لا يعتمد على الاختيار الخاص بنظام الاحداثيات ، وبالامكان استعماله لايجاد الهيئة الصريحة لعامل التباعد حسب اي نظام من أنظمة الاحداثيات .

حسب الاحداثيات المتعامدة يوفر عنصر حجمي مقداره $\Delta x \Delta y \Delta z$ قاعدة ملائمة لايجاد صيغة واضحة للتباعد . لنفرض أن إحدى اركان متوازي سطوح العنصر واقعة عند النقطة (x_0 و y_0 و z_0) ، عندئذ نحصل على :

$$F_x(x_0 + \Delta x, y, z) = F_x(x_0, y, z) + \Delta x \left.\frac{\partial F_x}{\partial x}\right|_{x_0, y, z},$$
$$F_y(x, y_0 + \Delta y, z) = F_y(x, y_0, z) + \Delta y \left.\frac{\partial F_y}{\partial y}\right|_{x, y_0, z}, \qquad (1\text{–}29)$$
$$F_z(x, y, z_0 + \Delta z) = F_z(x, y, z_0) + \Delta z \left.\frac{\partial F_z}{\partial z}\right|_{x, y, z_0},$$

حيث قد حذفت الحدود التي تحتوي على رتب أعلى لِـ Δx و Δy و Δz. ولما كان عنصر المساحة $\Delta y \Delta z$ عمودياً على محور x ، فإن عنصر المساحة $\Delta z \Delta x$ يكون عمودياً على محور y ، وأن عنصر المساحة $\Delta x \Delta y$ يصبح عمودياً على محور z ، وبهذا يؤول تعريف التباعد الى الآتي :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{\Delta x\, \Delta y\, \Delta z} \Big\{ & \int F_x(x_0, y, z)\, dy\, dz \\ & + \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \frac{\partial F_x}{\partial x} + \int F_y(x, y_0, z)\, dx\, dz \\ & + \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \frac{\partial F_y}{\partial y} + \int F_z(x, y, z_0)\, dx\, dy \\ & + \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \frac{\partial F_z}{\partial z} - \int F_x(x_0, y, z)\, dy\, dz \\ & \int F_y(x, y_0, z)\, dx\, dz - \int F_z(x, y, z_0)\, dx\, dy \Big\} \end{aligned} \qquad (1\text{–}30)$$

وتشير علامات الناقص في الحدود الثلاثة الأخيرة الى حقيقة أن العمود المقام على السطح والمرسوم نحو الخارج يكون بالاتجاه السالب للمحور في هذه الحالات الثلاث . عندئذ يمكن آخذ الغاية بسهولة ومن ثم ايجاد الصيغة الآتية لتباعد F وفقاً للاحداثيات المتعامدة

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \qquad (1\text{–}31)$$

وفي حالة الاحداثيات الكروية يمكن اتباع اسلوب مماثل لايجاد التباعد . نأخذ عنصراً حجمياً محاطاً بأجزاء صغيرة من الاحداثيات هي Δr و $\Delta \theta$ و $\Delta \phi$. وحجم هذا العنصر يساوي $r^2 \sin\theta\, \Delta r \Delta \theta \Delta \phi$. ولما كانت المساحة المحاطة بالاجزاء الصغيرة من الاحداثيات تعتمد على قيمة الاحداثيات الكروية (وهذه

نتيجة مختلفة عما هي في حالة الاحداثيات المتعامدة) ، فمن الأفضل أن تكتب $\mathbf{F.n}\Delta\,\mathbf{a}$ بصيغتها الصريحة

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\Delta a = F_r r^2 \sin\theta\,\Delta\theta\,\Delta\phi + F_\theta r \sin\theta\,\Delta\phi\,\Delta r + F_\phi r\,\Delta r\,\Delta\theta. \quad (1\text{–}32)$$

واضح من هذه المعادلة أن $r^2F_r\sin\theta$ ، وليس F_r ، هي التي يجب فكها حسب مسلسلة تايلور Taylor series . وبالمثل يجب فك معاملات الضرب باجزاء الاحداثيات في الحدود الأخرى للمعادلة . وبعد انجاز عملية الفك لهذه الحدود ، ومن ثم استعمالها لحساب التكامل السطحي في تعريف التباعد ، نحصل على :

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{r^2\sin\theta\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta\phi}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(F_r r^2\sin\theta)\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta r\sin\theta)\,\Delta\theta\,\Delta r\,\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial\phi}(F_\phi r)\,\Delta\phi\,\Delta r\,\Delta\theta\right\}\cdot \quad (1\text{–}33)$$

وعند أخذ الغاية نجد أن الصيغة الصريحة للتباعد حسب الاحداثيات الكروية تساوي :

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}\cdot \quad (1\text{–}34)$$

ويمكن استخدام هذه الطريقة لايجاد الصيغة الصريحة للتباعد حسب أي نظام للاحداثيات بشرط ان تكون هيئة حجم العنصر وهيئة سطح العنصر (او بدل ذلك عناصر الطول) معروفة .

ويمكن رؤية المعنى الفيزيائي للتباعد بيسر من خلال مثال مأخوذ من موضوع ميكانيك الموائع . فاذا فرضنا ان $\mathbf{V}$ هي سرعة المائع معطاة كدالة للموضع ، و ρ هي كثافة المائع ، لأصبح واضحاً أن $\oint_S \rho\mathbf{V}.\mathbf{n}\,da$ تمثل صافي كمية المائع التي تغادر الحجم المحاط بالسطح S لوحدة الزمن . واذا كان المائع غير قابلٍ للانضغاط ، فان التكامل السطحي يعدُّ مقياساً للمصدر الكلي للمائع المحاط بالسطح . وبهذا نجد ان تعريف التباعد المذكور في أعلاه يشير الى حقيقة أنه يمكن تفسير التباعد على أنه غاية شدة المصدر لوحدة الحجم ، أو كثافة المصدر للمائع غير القابل للانضغاط .
والآن يمكننا ذكر نص نظرية في غاية الأهمية ، وكذلك إثبات صحتها ، وهي نظرية التباعد : إن تكامل تباعد متجه خلال حجم V يساوي التكامل السطحي للمركبة العمودية للمتجه على السطح الذي يحتضن الحجم V . أي أن :

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F}\, dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da.$$

افرض أن الحجم مقسم الى عدد كبير من خلايا صغيرة ، ودع الخلية i تمتلك حجماً قدره ΔV_i محاطاً بسطح قدره S_i . عندئذ يصبح من الواضح أن :

$$\sum_i \oint_{S_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da, \qquad (1\text{–}35)$$

حيث يكون العمود متجهاً نحو الخارج لكل تكامل في الجهة اليسرى من هذه المعادلة . لكن العمود الذي يكون متجهاً نحو الخارج بالنسبة لخلية معينة ، هو نفسه يكون متجهاً نحو الداخل بالنسبة لخلية مجاورة . ولهذا السبب فإن جميع التكاملات في الجهة اليسرى من المعادلة (35-1) يحذف احدها الآخر ، عدا تلك التي تمثل السطح S،وهذا أساساً يثبت صحة المعادلة (35-1) . والآن يمكننا أن نحصل على نظرية التباعد وذلك بان ندع عدد الخلايا يقترب من اللانهاية بطريقة تجعل حجم كل خلية يقترب من الصفر .

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_i \left\{ \frac{1}{\Delta V_i} \oint_{S_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da \right\} \Delta V_i. \qquad (1\text{–}36)$$

وعند أخذ الغاية فإن علامة الجمع تصبح علامة تكامل تغطي الحجم V ، وأن نسبة التكامل السطحي الذي يغطي السطح S_i الى الحجم ΔV_i تؤول الى تباعد F ، وهذا يعني أن :

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F}\, dv, \qquad (1\text{–}37)$$

وبهذا حصلنا على نظرية التباعد . وستتهيأ لنا فرص عديدة لاستخدام نظرية التباعد سواءً في تطوير الجوانب النظرية للكهربائية والمغناطيسية أم في حساب التكاملات .

1-6 الالتفاف Curl

والالتفاف هو العامل التفاضلي المتجه الثالث . ويكتب التفاف متجه هكذا : curl F ، ويعرف كالآتي :

إن التفاف متجه هو غاية النسبة بين تكامل النتاج الاتجاهي للمتجه مع العمود المقام على سطح مغلق بالاتجاه الخارجي والحجم المحاط بذلك السطح ، عندما يقترب الحجم من الصفر ، اي ان :

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{F}\, da. \qquad (1\text{–}38)$$

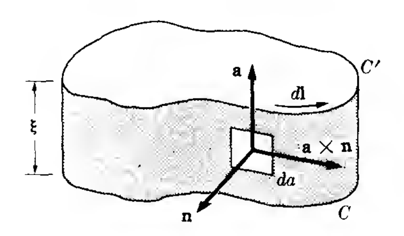
إن الشبه بين هذا التعريف وتعريف التباعد ظاهر بصورة واضحة ، فبدلاً من النتاج اللامتجه للمتجه مع العمود المرسوم نحو الخارج ، هنا لدينا نتاج متجه . وفيما عدا ذلك يكون التعريفان متطابقان . وهذا التعريف للالتفاف يكون ملائماً لايجاد الصيغة الصريحة للالتفاف باستعمال أنظمة مختلفة للاحداثيات . ومع ذلك فهناك تعريف آخر مفيد لاغراض أخرى . وينص هذا التعريف البديل للالتفاف على الآتي :

إن مركبة curl F باتجاه وحدة المتجه **a** هي غاية التكامل الخطي لوحدة المساحة عندما تقترب المساحة المحاطة بالخط المغلق من الصفر ، على أن تكون المساحة عمودية على **a** . وهذا يعني :

$$\mathbf{a} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{F} = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}, \qquad (1\text{–}39)$$

حيث يقع المنحني C المحيط بالسطح S في مستوٍ عمودي على **a** . ومن السهل رؤية التكافؤ بين تعريفي الالتفاف اذا تأملنا المنحني C والحجم الذي يتكون من ازاحة هذا المنحني مسافة قدرها ξ بالاتجاه العمودي على المستوي ، كما هو موضح في الشكل (1–6) . وعند أخذ النتاج النقطي للمتجه **a** ، العمود على المستوي ، مع التعريف الأول للالتفاف المتمثل بالمعادلة (1–38) نحصل على :

ولما كان المتجه **a** موازياً للعمود المقام على كل السطح المحيط بالحجم عدا ذلك الجزء المكون من الشريط الضيق المحدد بالمنحنين C، C′ ، فانه ينبغي أن نأخذ التكامل على هذا السطح فقط . فبالنسبة لهذا السطح نلاحظ أن $\mathbf{a} \times \mathbf{n}\, da$ تساوي



الشكل 1-6 الحجم المتكون من ازاحة مستوي المنحني C في الاتجاه a العمودي على المساحة

بالضبط ξ dl ، اذأن dl تمثل ازاحة صغيرة جداً على امتداد المنحني C . وفضلاً عن ذلك نلاحظ أن ξ S = V ، لذا ينتج :

$$\mathbf{a} \cdot \textbf{curl } \mathbf{F} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{\xi S} \oint \xi \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l},$$

وبحذف المسافة ξ من بسط المعادلة ومقامها فإنها تؤول الى التعريف الثاني للالتفاف . وعلى الرغم من إمكانية اثبات التكافؤ بين التعريفين بدون استخدام ذلك الحجم الخاص المستعمل هنا ، الا ان ذلك سيكون على حساب بساطة البرهان الذي ذكرناه تواً .

ويمكن حساب صيغة الالتفاف بمختلف أنظمة الاحداثيات بالطريقة نفسها التي استخدمت في حالة التباعد . وعليه فمن الملائم ان نستخدم الحجم $\Delta x \, \Delta y \, \Delta z$ وفقاً للاحداثيات المتعامدة . عندئذٍ نجد ان السطوح العمودية على محوري z, y هي وحدها التي تساهم في مركبة الالتفاف باتجاه محور x . واذا تذكرنا أن :

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i},$$

لرأينا أن مساهمة أوجه متوازي السطوح في مركبة الالتفاف باتجاه محور x تساوي :

$$(\textbf{curl } \mathbf{F})_x = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \{[-F_y(x, y, z + \Delta z) + F_y(x, y, z)] \, \Delta x \, \Delta y + [F_z(x, y + \Delta y, z) - F_z(x, y, z)] \, \Delta x \, \Delta z\}. \quad (1\text{-}41)$$

وعند فك هذه المعادلة بموجب مسلسلة تايلور وأخذ الغاية ينتج :

$$(\text{curl } \mathbf{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \tag{1-42}$$

هذه هي المركبة x للالتفاف . كما يمكننا إيجاد المركبتين z, y للالتفاف باستخدام الطريقة نفسها ، فنحصل على :

$$(\text{curl } \mathbf{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \qquad (\text{curl } \mathbf{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}. \tag{1-43}$$

وبالامكان أن يتذكر المرء صيغة الالتفاف بالاحداثيات المتعامدة بسهولة اذا استخدمت المحددات ، اذ أن :

$$\text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{1-44}$$

اما مسألة ايجاد صيغة الالتفاف باحداثيات الأنظمة الأخرى فانها أعقد بعض الشيء من الاحداثيات المتعامدة ,وستترك مع التمرينات .

وكما هو الحال مع التباعد ، فإن مفهوم الالتفاف يدخل في نظرية مهمة ومفيدة في الوقت ذاته وهي نظرية ستوكس Stokes' theorem .

نظرية ستوكس :

إن التكامل الخطي لمتجه حول مسار مغلق يساوي تكامل المركبة العمودية لالتفاف المتجه على أي سطح محاط بالمسار . وهذا يعني أن

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da, \tag{1-45}$$

اذ أن C تمثل المنحني المغلق الذي يحيط بالسطح S . وبرهان هذه النظرية يناظر تماماً برهان نظرية التباعد . وبهذا يقسم السطح S الى عدد كبير من الخلايا . وليكن

سطح الخلية i هو ΔS_i والمنحني المحيط به هو C_i . وبما أن المسارات المحيطة بجميع الخلايا هي باتجاه واحد ، فمن الواضح عندئذٍ أن مجموع التكاملات الخطية حول جميع الخلايا سيكون مساوياً بالضبط للتكامل الخطي حول المنحني المحيط بالسطح، حيث تحذف التكاملات حول المسارات الداخلية . ولهذا :

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}. \tag{1-46}$$

بقي أن نجد الغاية عندما يصبح عدد الخلايا مالانهاية بحيث يجعل مساحة كل خلية تقترب من الصفر ، عندئذٍ نحصل على النتيجة الآتية :

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i \frac{1}{\Delta S_i} \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}\, \Delta S_i$$

$$= \int_S \textbf{curl}\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da, \tag{1-47}$$

التي تمثل نظرية ستوكس . وهذه النظرية ، كنظيرتها نظرية التباعد ، مفيدة جداً في تطوير النظرية الكهرومغناطيسية وكذلك في حساب التكاملات . ومما تجدر ملاحظته هو أن كلاً من نظرية التباعد ونظرية ستوكس تعدُّ بمثابة تكامل جزئي .

1-7 تطورات أخرى Further developments

من الواضح أنه يمكن تكرار العمليات الرياضية اللازمة لأخذ الانحدار أو التباعد أو الالتفاف لأنواع مناسبة من المجالات . فعلى سبيل المثال نجد أنه من المهم أن يؤخذ تباعد انحدار مجال لامتجه . وقد يكون ناتج قسم من هذه العمليات المكررة صفراً . ومن هذه العمليات ماتدعو الحاجة الى إعطائها تسمية خاصة ، ومنها مايمكن التعبير عنها بدلالة عمليات أسهل . هناك عملية مزدوجة ومهمة هي تباعد إنحدار مجال لامتجه . ويعرف هذا العامل الذي يؤدي الى دمج عمليتين باسم عامل لابلاسيان Laplacian operator ، ويكتب عادة بهذا الشكل : ∇^2 . وعندما يؤثر هذا العامل على دالة مجال لامتجه معطاة بالاحداثيات المتعامدة تكون النتيجة كالآتي :

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \tag{1-48}$$

ولهذا العامل أهمية كبيرة في الكهربائية المستقرة ، وسنستخدمه بالتفصيل في الفصل الثالث .

أما التفاف انحدار أي مجال لامتجه فيساوي صفراً . ويمكن بسهولة تحقيق هذا النص اذا استخدمنا الاحداثيات المتعامدة . لنفرض ان دالة المجال اللامتجه هي ϕ ، عندئذٍ ينتج :

$$\textbf{curl grad } \varphi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial y}\right) + \cdots = 0, \quad (1\text{–}49)$$

وهذه النتيجة تحقق بالطبع النص الأصلي . كما يكون تباعد أي التفاف صفراً كذلك .ويمكن تحقيق هذه النتيجة مباشرة باستعمال الاحداثيات المتعامدة فينتج :

$$\text{div } \textbf{curl F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \cdots = 0. \quad (1\text{–}50)$$

والعملية الأخرى الممكنة هي أخذ الالتفاف لالتفاف مجال متجه . وباستخدام الاحداثيات المتعامدة يمكن إثبات صحة المعادلة الآتية :

$$\textbf{curl curl F} = \textbf{grad } \text{div } \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F}, \quad (1\text{–}51)$$

حيث أن لابلاسيان المتجه هو متجه مركباته المتعامدة هي لابلسيات المركبات المتعامدة للمتجه الاصلي . ويعرف لابلاسيان المتجه بدلالة أي نظام احداثيات غير نظام الاحداثيات المتعامدة وفق المعادلة (1–51) .

ويمكننا التوسع في استخدام العوامل التفاضيلية المتجهة على مختلف النتاجات المتجهة واللامتجهة . وهناك وسائل عديدة ممكنة لدمج العوامل التفاضيلية مع تلك النتاجات ، من أهمها تلك المبينة في الجدول (1–1) . ويمكن بسهولة تحقيق صحة هذه المتطابقات باستعمال الاحداثيات المتعامدة ، وعندئذٍ يصبح بوسعنا تعميم صحة المتطابقات بجميع أنظمة الاحداثيات .

الجدول (1-1)

صيغ من تحليل المتجهات تتضمن عوامل تفاضلية

(I-1)	$\nabla(\varphi + \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi$
(I-2)	$\nabla\varphi\psi = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$
(I-3)	$\text{div}\,(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \text{div}\,\mathbf{F} + \text{div}\,\mathbf{G}$
(I-4)	$\text{curl}\,(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \text{curl}\,\mathbf{F} + \text{curl}\,\mathbf{G}$
(I-5)	$\nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) = (\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F}\times\text{curl}\,\mathbf{G} + \mathbf{G}\times\text{curl}\,\mathbf{F}$
(I-6)	$\text{div}\,\varphi\mathbf{F} = \varphi\,\text{div}\,\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\nabla\varphi$
(I-7)	$\text{div}\,(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot\text{curl}\,\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\text{curl}\,\mathbf{G}$
(I-8)	$\text{div}\,\text{curl}\,\mathbf{F} = 0$
(I-9)	$\text{curl}\,\varphi\mathbf{F} = \varphi\,\text{curl}\,\mathbf{F} + \nabla\varphi\times\mathbf{F}$
(I-10)	$\text{curl}\,(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{F}\,\text{div}\,\mathbf{G} - \mathbf{G}\,\text{div}\,\mathbf{F} + (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G}$
(I-11)	$\text{curl}\,\text{curl}\,\mathbf{F} = \text{grad}\,\text{div}\,\mathbf{F} - \nabla^2\mathbf{F}$
(I-12)	$\text{curl}\,\nabla\varphi = 0$
(I-13)	$\oint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da = \int_V \text{div}\,\mathbf{F}\,dv$
(I-14)	$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{curl}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da$
(I-15)	$\oint_S \varphi\mathbf{n}\,da = \int_V \nabla\varphi\,dv$
(I-16)	$\oint_S \mathbf{F}(\mathbf{G}\cdot\mathbf{n})\,da = \int_V \mathbf{F}\,\text{div}\,\mathbf{G}\,dv + \int_V (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F}\,dv$
(I-17)	$\oint_S \mathbf{n}\times\mathbf{F}\,da = \int_V \text{curl}\,\mathbf{F}\,dv$
(I-18)	$\oint_C \varphi\,d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{n}\times\nabla\varphi\,da$

وبالامكان توسيع نظريتي التباعد وستوكس واشتقاق صيغ أخرى ، ومن أهم هذه الصيغ نظرية كرين Green's theorem التي تنص على :

$$\int_V (\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi)\,dv = \oint_S (\psi\,\mathbf{grad}\,\varphi - \varphi\,\mathbf{grad}\,\psi)\cdot\mathbf{n}\,da. \qquad (1\text{-}52)$$

وتنتج هذه النظرية من تطبيق نظرية التباعد على المتجه :

$$\mathbf{F} = \psi\,\mathbf{grad}\,\varphi - \varphi\,\mathbf{grad}\,\psi. \qquad (1\text{-}53)$$

فنحصل على :

$$\int_V \text{div}\,[\psi\,\mathbf{grad}\,\varphi - \varphi\,\mathbf{grad}\,\psi]\,dv = \oint_S (\psi\,\mathbf{grad}\,\varphi - \varphi\,\mathbf{grad}\,\psi)\cdot\mathbf{n}\,da. \qquad (1\text{-}54)$$

وباستعمال المتطابقة التي تتعلق بتباعد ناتج ضرب لا متجه بمتجه (لاحظ الجدول 1-1) ينتج :

$$\text{div}\,(\psi\,\textbf{grad}\,\varphi) - \text{div}\,(\varphi\,\textbf{grad}\,\psi) = \psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi. \qquad (1\text{–}55)$$

وبدمج المعادلتين (1-54) و (1-55) نحصل على نظرية كرين .

وهكذا انتهينا من هذه المناقشة المختصرة في تحليل المتجهات . ولقد أهملنا العديد من النتائج المهمة وأضفناها الى المسائل لغرض اختصار المناقشة . كما توخينا تجنب الحصول على درجة عالية من الدقة واستعملنا أسلوباً هادفاً ، اذ تناولنا كل ماتحتاج اليه من هذا الموضوع وحذفنا كل شيء عدا ذلك .

مسائل

1-1 اذا علمت ان المتجهات المذكورة في أدناه تشير الى النقاط A و B و C و D ابتداءً من نقطة الاصل

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k},$$
$$\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j},$$
$$\mathbf{C} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k},$$
$$\mathbf{D} = \mathbf{k} - \mathbf{j}.$$

أثبت ان الخطين **AB** و **CD** هما متوازيان ، ثم جد النسبة بين طوليهما .

1-2 أثبت أن المتجهين الآتيين متعامدان :

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k},$$
$$\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

1-3 برهن على أن المتجهات :

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k},$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k},$$
$$\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

تشكل جوانب مثلث قائم .

1-4 بتربيع طرفي المعادلة الآتية :

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{C}$$

وتفسير النتيجة هندسيا ، برهن "قانون الجيب تمام"

1-5 بيِّن ان كلاً من :

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\sin\alpha,$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{i}\cos\beta + \mathbf{j}\sin\beta$$

هو وحدة متجه واقع في المستوي xy ، وأنهما يعملان الزاويتين α و β مع محور x على الترتيب . جد صيغة لـ $\cos(\alpha-\beta)$ باستخدام النتاج اللامتجه .

1-6 اذا كان **A** متجهاً ثابتاً و **r** متجهاً يبدأ بنقطة الاصل وينتهي عند النقطة (x , y , z) ، بيِّن ان :

$$(\mathbf{r} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = 0$$

هي معادلة مستوي

1-7 بيّن ان :

$$(\mathbf{r} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{r} = 0$$

هي معادلة كرة ، علماً أنَّ **A** و **r** هما نفس المتجهين المذكورين في المسألة السابقة .

1-8 اذا كانت **A** و **B** و **C** متجهات واقعة بين نقطة الاصل والنقاط A و **B** و C بيّن ان :

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$

هو متجه عمودي على المستوي ABC .

1-9 أثبت ان المعادلة (13-1) هي حل للمعادلة (12-1) بالتعويض المباشر . [لاحظ أن المعادلة (12-1) تشير الى ان المتجه **C** عمودي على **A**] .

1-10 جد انحدار ϕ بالاحداثيات الاسطوانية ، علماً بأن :

$$ds = dr\mathbf{a}_r + r\, d\theta \mathbf{a}_\theta + dz\mathbf{k}.$$

ومما ينبغي ملاحظته هو أن r و θ لهما معنىً مختلف عما هو في المعادلتين (21-1) و (22-1) . بالنسبة للاحداثيات الكروية r تمثل مقدار متجه نصف القطر إبتداءً من نقطة الاصل ، و θ هي الزاوية القطبية . وبالنسبة للاحداثيات الاسطوانية فإن r تمثل المسافة العمودية مقاسة من محور الاسطوانة ، و θ الزاوية السمتية حول هذا المحور .

1-11 جد تعبيراً لتباعد المتجه **F** بالاحداثيات الاسطوانية بالاستناد الى تعريف التباعد .

1-12 جد تباعد المتجه

$$\mathbf{i}(x^2 + yz) + \mathbf{j}(y^2 + zx) + \mathbf{k}(z^2 + xy).$$

ثم جد التفاف المتجه كذلك .

1-13 اذا علم أن **r** تمثل متجهاً مرسوماً من نقطة الاصل الى النقطة (x , y , z) ، فبرهن صحة الصيغ الآتية :

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = 3; \qquad \operatorname{curl} \mathbf{r} = 0; \qquad (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad})\, \mathbf{r} = \mathbf{u}.$$

(لاحظ ان **u** ترمز لأي متجه) .

1-14 اذا كان **A** متجهاً ثابتاً ، بيّن ان :

$$\mathbf{grad}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{A}.$$

1-15 حقق صحة المتطابقات (I-6) و (I-9) المبينتين في الجدول (1-1) .

1-16 إذا علم أن r تمثل مقدار متجه مرسوم من نقطة الاصل الى النقطة (x , y , z) و f(r) دالة كيفية لـ r ، برهن أن :

$$\mathbf{grad}\,f(r) = \frac{\mathbf{r}}{r}\frac{df}{dr}.$$

1-17 حقق صحة المعادلة (1-51) مستعملاً الاحداثيات المتعامدة، ومستعملاً تعريف $\nabla^2 F$ بهذه الاحداثيات كما ورد في الكتاب .

1-18 برهن صحة المتطابقتين (I-15) و (I-16) المذكورتين في الجدول (1-1) . [ملاحظة : استخدم نظرية التباعد وواحدة أو أكثر من المتطابقات المذكورة في النصف الاول من الجدول (1-1)] .

الفصل الثاني ٢

الكهربائية المستقرة (الكهروستاتيكية)
ELECTROSTATICS

2-1 الشحنة الكهربائية Electric charge:

تعود المشاهدات الأولى لتكهرب الاجسام بالاحتكاك الى العصور القديمة . ومع ذلك فإنه من المألوف لدى الجميع أن دلك مشط مصنوع من المطاط الصلب بقطعة من الصوف يكسبه قابلية إلتقاط قطع صغيرة من الورق . اذ أن كلاً من المطاط والصوف يكتسب خاصية جديدة تدعى خاصية التكهرب وعند ذلك يصبح مكهرباً . صحيح ان هذه التجربة تصلح لادخال مفهوم الشحنة في ذهن القارىء ، لكن الشحنة نفسها لا تخلق خلال عملية الدلك ، اذا ان الشحنة الكلية أو مجموع الشحنات لكلا الجسمين يبقى نفسه كما كان قبل التكهرب . وعلى ضوء الفيزياء الحديثة فإننا نعرف أن الجسيمات المجهرية المشحونة وبالتحديد الالكترونات تنتقل في أثناء عملية الدلك من الصوف الى المطاط تاركة الصوف مشحوناً بشحنة موجبة ومشط المطاط مشحون بشحنة سالبة .

الشحنة هي خاصية أساسية مميزة للجسيمات الأولية التي تتكون منها المادة . والحقيقة إن جميع المواد تتكون من بروتونات ونيوترونات والكترونات ، لكنَّ اثنين من هذه الجسيمات فقط تحملان شحنات (هي البروتونات والالكترونات) . وعلى الرغم من أن المادة من وجهة نظر القياس المجهري تتركب من عدد هائل من الجسيمات المشحونة فان القوى الكهربائية المقتدرة المرافقة لهذه الجسيمات لا تظهر للعيان ، والسبب في ذلك هو وجود نوعين من الشحنات ، شحنات موجبة وأخرى سالبة ، وأن قطعة اعتيادية من المادة تحتوي على كميات متساوية تقريباً من كل

نوع . والمقصود بكلمة الشحنة ، من وجهة النظر العينية ، هو صافي الشحنة أو الشحنة الفائضة . فعندما نقول إنَّ الجسم مشحون فإننا نعني بذلك أن الجسم يمتلك شحنة فائضة ناتجة إما عن فائض في عدد الالكترونات (سالبة الشحنة) أو عن فائض في عدد البروتونات (موجبة الشحنة) . وفي هذا الفصل وفي الفصول القادمة سنرمز للشحنة عادة بالحرف q .

تشير الدراسات التجريبية الى أن الشحنة لا يمكن أن تفنى او تخلق . فالشحنة الكلية لمنظومة مغلقة لا يمكن ان تتغير . وحسب وجهة النظر العينية يمكن فصل وتجميع الشحنات بأشكال مختلفة ، بيد أن صافي الشحنة (أي المجموع الجبري لكل الشحنات) يبقى ثابتاً ومحافظاً على قيمته لأية منظومة مغلقة .

2-2 قانون كولوم Coulomb's law

قبل انتهاء القرن الثامن عشر حدث تطور في تقنية العلوم التجريبية لحد كافٍ للحصول على قياسات عملية دقيقة للقوى العاملة بين الشحنات الكهربائية . ويمكن تلخيص حصيلة تلك القياسات التي أثير حولها الجدل في ذلك الحين بثلاثة نصوص هي :

أ ــ هناك نوعان فقط لا غيرهما من الشحنات الكهربائية ندعوهما في الوقت الحاضر بأسم الشحنات الموجبة والشحنات السالبة .

ب ــ تؤثر شحنتان نقطيتان إحداهما على الأخرى بقوة تعمل على إمتداد الخط المستقيم الواصل بين الشحنتين ، ومقدار هذه القوة يتناسب عكسياً مع مربع البعد الفاصل بينهما .

جـ ــ ويتناسب مقدار القوة كذلك طردياً مع ناتج ضرب الشحنتين . والقوة المؤثرة بين الشحنتين تكون قوة تنافر اذا كانت الشحنتان متماثلتين ، وتكون قوة تجاذب اذا كانت الشحنتان مختلفتين .

يمثل النصان الأخيران مايدعى اليوم بقانون كولوم على شرف تشارلس أوغسطين دي كولوم (1736-1806) والذي يعد واحداً من الرواد الاوائل في القرن الثامن عشر في الكهربائية . ويمكن صياغة قانون كولوم بصيغة المتجهات على ضوء الرموز المستخدمة في الفصل الأول فنحصل على الآتي :

$$\mathbf{F}_1 = C\,\frac{q_1q_2}{r_{21}^2}\,\frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}}, \tag{2-1}$$

إذ أن $\mathbf{F}_1$ ترمز للقوة المؤثرة على الشحنة $\mathbf{q}_1$ و $\mathbf{r}_{21}$ تمثل المتجه الممتد من $\mathbf{q}_2$ الى $\mathbf{q}_1$ و r_{21} تمثل مقدار المتجه $\mathbf{r}_{21}$ ، أما C فيمثل ثابت التناسب الذي سنتحدث عنه بعد قليل . وحاصل قسمة المتجه $\mathbf{r}_{21}$ على مقداره (أي الكمية $\mathbf{r}_{21}/r_{21}$ في المعادلة 1-2) تعرف باسم وحدة المتجه وهو مصطلح سندرج على استخدامه في هذا الكتاب . واذا كان المطلوب ايجاد القوة المؤثرة على $\mathbf{q}_2$ بدلاً من $\mathbf{q}_1$ فعند ذلك يصبح من الضروري تغيير كل رمز سفلي من 1 الى 2 ومن 2 الى 1 . ومن المهم ادراك هذا المصطلح وتبنيه في الأعمال القادمة لما لهذا الاسلوب من اهمية في تتبع متغيرات المجال والمصدر .

يستخدم قانون كولوم على الشحنات النقطية . ويقصد بالشحنة النقطية ، حسب المفهوم العيني ، بانها تلك الشحنة التي تشغل حيزاً أبعاده صغيرة جداً مقارنة مع أي طول وثيق الصلة بالمسألة المعنية . وحسب معلوماتنا فإنه يصح استخدام قانون كولوم على الجسيمات الأولية المشحونةّ مثل البروتونات والالكترونات . كما يصح استعمال المعادلة (1-2) أيضاً في حالات التنافر الكهروستاتيكي بين النوى عند المسافات التي تزيد على 10^{-14} من المتر . أما اذا كان البعد بين الجسيمين المشحونين أقل من تلك المسافة فإنّ القوى النووية تصبح هي المهيمنة .

وعلى الرغم من أن المعادلة (1-2) هي بمثابة قانون تجريبي إلا ان هناك من البراهين والأدلة النظرية والعملية مايشير الى دقة قانون التربيع العكسي ، أي أن أس البعد r_{21} هو بالضبط 2 . ولقد تبين بتجربة غير مباشرة* إن أس الكمية r_{21} قد يختلف عن الرقم 2 بمقدار لا يزيد على جزء واحد من 10^9 .

والآن ينبغي مناقشة المقدار الثابت C المشار إليه في المعادلة (1-2) ، وذلك لأن هذا الثابت هو الذي يحدد نظام الوحدات ، فالمفروض أن تكون وحدات القوة والمسافة مستمدة من احد أنظمة الوحدات المستعملة في الميكانيك . وعليه فإن أبسط أسلوب يمكن اتباعه بهذا الخصوص هو أن نجعل مقدار الثابت C واحداً صحيحاً ، وأن نختار وحدة للشحنة بحيث تتفق المعادلة (1-2) مع النتائج التجريبية . كما يمكن استخدام أساليب أخرى تمتاز عن ذلك الأسلوب في إمكانية تحديد وحدة الشحنة مسبقاً . لقد أوضح جورجي (Giorgi) عام 1901 أن جميع

* أجرى التجربة نفسها العالمان كلفن وماكسويل ، والأخير حصل على أس قدره 2 بخطأ لا يزيد على جزء من 20000 [Plimpton and Lawton, Phys. Rev. 50, 1066 (1936)]

الوحدات الكهربائية الشائعة مثل الأمبير والفولت والأوم والهنري . . . وهلم جرا يمكن دمجها مع أحد أنظمة الوحدات الميكانيكية ، وبالاخص نظام الوحدات المتري (أي نظام المتر ـ كيلوغرام ـ ثانية) لتكوين نظام جديد للوحدات لجميع الكهربائية والمغناطيسية . وفي هذا الكتاب سنستخدم نظام جورجي في الوحدات أو كما يسمى النظام المتري المتطور لكي تكون نواتج العمليات الحسابية ذات وحدات متفقة مع الوحدات المستخدمة في القياسات المختبرية لما في ذلك من أهمية بالغة . وبما أن وحدة قياس الشحنة هي الكولوم ووحدة قياس المسافة هي المتر ووحدة قياس الزمن هي الثانية حسب هذا النظام ، فمن الواضح عندئذٍ ان تصبح وحدة الثابت C هي (نيوتن . متر^2 / كولوم^2) . لقد ثُبِّت مقدار وحدة قياس الشحنة ، الكولوم ، بالاستناد الى تجارب مغناطيسية معينة . وبهذا تصبح قيمة الثابت C حسب هذا النظام $C = 8.9874 \times 10^9 \text{n.m}^2/\text{coul}^2$. وسنستعيض عن هذا الثابت بثابت آخر مستخرج من العلاقة $C = 1/4\pi\epsilon_0$. وبهذه الاستعاضة التي تبدو معقدة للوهلة الأولى فائدة كبيرة في تبسيط المعادلات التي سنحصل عليها في المستقبل . ويرمز لهذا الثابت الجديد الذي سيتكرر استخدامه كثيراً في الكتاب بالرمز الاغريقي ϵ_0 . إنه يمثل خاصية للفراغ تدعى نفوذية الفراغ (أو نفوذية الفضاء الطليق) وقيمته تساوي $8.854 \times 10^{-12} \text{coul}^2/\text{n.m}^2$. وفي الملحق I نجد ان تعريفات الكولوم والامبير وسماحية الفضاء الطليق ونفوذية الفضاء الطليق ترتبط احداها بالأخرى وبسرعة الضوء بطريقة منطقية ، إذ أن الصياغة المنطقية لتلك التعاريف تتطلب معرفة الظواهر المغناطيسية وإنتشار الموجة الكهرومغناطيسية ، ومن غير الملائم مناقشة تلك التعاريف الآن . وفي الملحق الثاني نناقش أنظمة أخرى للوحدات الكهربائية وخاصة النظام الكاوسي .

وفي حالة وجود أكثر من شحنتين نقطيتين فانه بالامكان تعيين القوى المتبادلة بين هذه الشحنات بتكرار استخدام المعادلة (2-1) . وإذا إعتبرنا بشكل خاص منظومة مكونة من N من الشحنات النقطية لاصبحت القوة المؤثرة على الشحنة رقم i معطاة وفق المعادلة :

$$\mathbf{F}_i = q_i \sum_{j \neq i}^{N} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{ji}}{r_{ji}^3}, \qquad (2\text{-}2)$$

إذ تشير علامة الجمع في الطرف الأيمن من المعادلة الى حقيقة أن الجمع الاتجاهي يمتد لكي يشمل جميع الشحنات عدا الشحنة التي رقمها i . وهذه بالطبع هي قاعدة التراكب للقوى ، والتي تنص على أن القوة الكلية المؤثرة على جسم تساوي المجموع الاتجاهي لجميع القوى المؤثرة على الجسم كلاً على انفراد .

ويمكن توسيع فكرة التأثير المتبادل بين N من الشحنات النقطية وجعلها تشمل التأثير المتبادل بين شحنة نقطية وتوزيع متصل من الشحنة . وقد إخترنا هذه الهيئة من الشحنات بعناية لكي نتجنب الصعوبات التي تنشأ في حالة التأثير المتبادل بين توزيعين متصلين من الشحنات . والآن دعنا نفسر معنى التوزيع المتصل للشحنة قبل أن ندخل في صلب الموضوع . فمن المعروف جيداً أن الشحنة الكهربائية تتكون من مضاعفات لشحنة أساسية هي شحنة الالكترون . وبعبارة أخرى فإن هذا يعني أن قيمة أية شحنة كهربائية يجب ان تكون مساوية لشحنة الالكترون مضروبة في عدد صحيح . . إن هذا الانقطاع في قيمة الشحنة من ناحية الفيزياء العينية لا يسبب أية مشكلات وذلك لأن قيمة شحنة الالكترون تساوي 1.6019×10^{-19} coul وهو مقدار ضئيل جداً . إن صغر هذه الوحدة الأساسية للشحنة يعني أن الشحنات العينية تتألف من عدد هائل من الشحنات الالكترونية ، وهذا بدوره يعني أن أي عنصر صغير من الحجم مأخوذ من توزيع عيني من الشحنة يحتوي على عدد كبير جداً من الالكترونات . وعندئذٍ يصبح بالامكان أن يصف المرء أيَّ توزيع شحني بدلالة دالة كثافة الشحنة ، علماً أن كثافة الشحنة هي غاية الشحنة لوحدة الحجم عندما يصبح حجم الشحنة متناهي الصغر . لكنه ينبغي أخذ الحيطة والحذر عند إستخدام هذا النوع من الوصف على المسائل الذرية ، وذلك لأن هذه الحالات تتضمن عدداً قليلاً من الالكترونات وعندئذٍ لم يعد هناك معنى لعملية أخذ الغاية وفق المفهوم الرياضي . وبترك هذه الحالات الذرية جانباً يمكننا افتراض أن أية قطعة من الشحنة مقسمة الى اجزاء أصغر وأصغر الى درجة في غاية الصغر ومن ثم وصف التوزيع الشحني بدلالة الدوال النقطية الآتية :

تعرف الكثافة الحجمية للشحنة بموجب العلاقة :

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}, \tag{2-3}$$

وتعرف الكثافة السطحية للشحنة حسب العلاقة :

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}. \tag{2-4}$$

وبناءً على ماذكر عن طبيعة الشحنة q فان ρ و σ تمثلان كثافة الشحنة الفائضة أو كثافة صافي الشحنة . ومما تجدر الاشارة اليه هو انه في المواد الصلبة

الاعتيادية نجد أن كثافة الشحنة ρ (إن كانت قيمتها كبيرة جداً) ستتضمن تغيراً في الكثافة الموضعية للالكترونات لا يتجاوز الجزء الواحد من كل 10^9 من الاجزاء .

إذ وزعت شحنة بحيث شغلت حجماً قدره V بكثافة حجمية ρ وأصبحت كثافتها السطحية σ على السطح S المحيط بالحجم V ، لأمكن ايجاد القوة التي يؤثر بها هذا التوزيع الشحني على شحنة نقطية q محدد موضعها بالمتجه **r** وفق المعادلة (2-2) وذلك بالاستعاضة عن q_i بما تساويه بدلالة الكثافة الحجمية أي $\rho_j dv_j$ (أو بدلالة الكثافة السطحية للشحنة أي $\sigma\, da'_j$) :

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\rho(r')\,dv' + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\sigma(r')\,da'. \quad (2\text{–}5)$$

وهنا يستخدم المتغير **r´** لتحديد موضع نقطة معينة في التوزيع الشحني ، وهو بذلك يلعب نفس دور نقطة المصدر $\mathbf{r}_j$ في المعادلة (2-2) . وقد يبدو للوهلة الأولى أنه إذا وقعت النقطة المحددة بالمتجه **r** داخل التوزيع الشحني لأصبح التكامل الأول في المعادلة (2-5) متباعداً ، بيد أن الحال ليس كذلك ، إذ أن منطقة التكامل الواقعة ضمن المتجه **r** تساهم بقدر ضئيل جداً بحيث يمكن اهماله ، وبهذا يكون التكامل جيد السلوك well behaved (لاحظ المسألة 2-5) .

يتضح من المعادلة (2-5) أن القوة المؤثرة على الشحنة q تتناسب طردياً مع q . كما يتضح الشيء نفسه من المعادلة (2-2) . وهذه الملاحظة تقودنا لاستنباط متجه مجال مستقل عن الشحنة q ، وبالتحديد القوة لوحدة الشحنة . هذا المتجه يعرف بأسم المجال الكهربائي وسنتناوله بالتفصيل في البند القادم .

2-3 المجال الكهربائي The electric field

يعرف المجال الكهربائي عند نقطة ما بأنه غاية النسبة الآتية : القوة المؤثرة على شحنة إختبارية موضوعة عند تلك النقطة الى قيمة الشحنة الاختبارية ، وتؤخذ الغاية عند إقتراب قيمة الشحنة الاختبارية من الصفر . والرمز الاعتيادي للمجال الكهربائي هو **E** . وبذلك يأخذ المجال الكهربائي الصيغة الاتجاهية الآتية :

$$\mathbf{E} = \lim_{q\to 0}\frac{\mathbf{F}_q}{q} \quad (2\text{–}6)$$

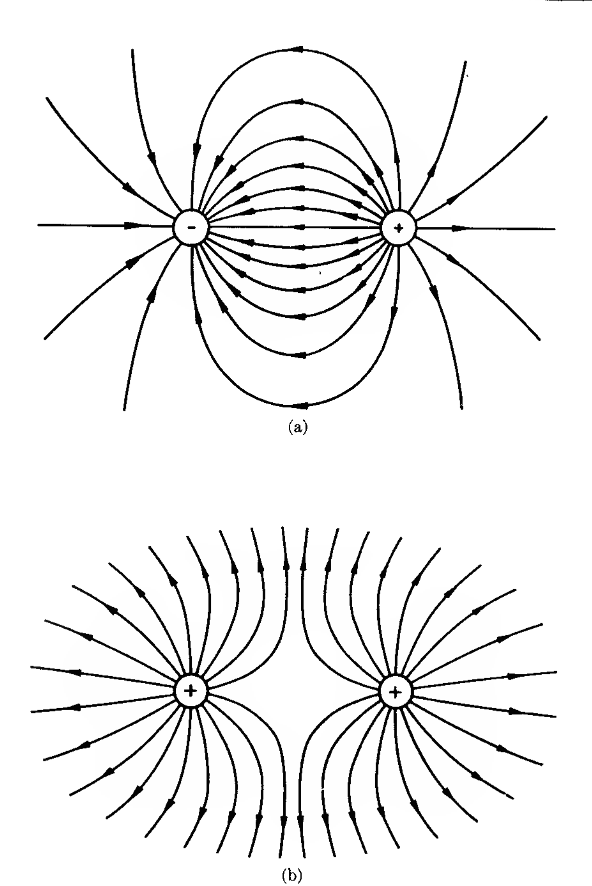
إن الهدف من إدخال عملية الغاية في تعريف المجال الكهربائي هو لجعل الشحنة الاختبارية غير مؤثرة على التوزيع الشحني المولد للمجال . فإذا فرضنا على سبيل المثال أن شحنة موزعة على سطح موصل (الجسم الموصل يتكون من مادة تستطيع الشحنة أن تنتقل فيها بحرية تامة) ، لرأينا أن جلب شحنة اختبارية في المنطقة المجاورة للموصل يؤدي الى حدوث توزيع جديد في شحنة الموصل . فاذا ما تم حساب المجال الكهربائي من إيجاد نسبة القوة الى قيمة الشحنة التي تحملها شحنة إختبارية محدودة القيمة ، لحصلنا على المجال الكهربائي الناشيء عن التوزيع الجديد لشحنة الموصل ، وليس عن التوزيع الاصلي لشحنة الموصل . ومع ذلك فهناك حالة خاصة لا تكون عملية أخذ الغاية ضرورية فيها وهي الحالة التي يمكن فيها اعتبار احدى شحنات التوزيع الشحني بمثابة شحنة إختبارية . في هذه الحالة يكون المجال عند موضع الشحنة الاختبارية ناشئاً عن جميع التوزيع الشحني عدا الشحنة الاختبارية . وفي حالات أخرى وبالاخص تلك الحالات التي يكون فيها التوزيع الشحني معيناً تكون القوة متناسبة مع قيمة الشحنة الاختبارية . في هذه الحالات ايضاً لا يكون أخذ الغاية ضرورياً . ومع ذلك فانه من الافضل دائماً ان تؤخذ الغاية اذا كان هناك شك في تأثير الشحنة الاختبارية على المجال .

المعادلتان (2-2) و (2-5) توفران اسلوباً جاهزاً للحصول على تعبير رياضي للمجال الكهربائي الناشيء عن توزيع شحني معين . لنأخذ توزيعاً شحنياً مكوناً من N من الشحنات النقطية $q_1, q_2, \ldots, q_N$ ونفرض انها موضوعة عند النقاط $\mathbf{r}_1$ ، $\mathbf{r}_2$ ، . . . ، $\mathbf{r}_N$ على الترتيب ، ومن توزيع حجمي لشحنة تشغل حجماً قدره V مميز بكثافة حجمية هي $\rho(\mathbf{r}')$ ، ومن توزيع سطحي لشحنة موزعة على سطح قدره S مميز بكثافة سطحية هي $\sigma(\mathbf{r}')$. فاذا وضعت شحنة إختبارية q عند النقطة $\mathbf{r}$ لتأثرت بقوة معطاة بالمعادلة الآتية :

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\rho(\mathbf{r}')\,dv' + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\sigma(\mathbf{r}')\,da', \qquad (2\text{-}7)$$

أما المجال الكهربائي عند الموضع المحدد بالمتجه $\mathbf{r}$ فيساوي غاية النسبة بين هذه القوة وقيمة الشحنة الاختبارية q . وبما ان النسبة لا تعتمد على قيمة الشحنة q نجد أن المجال عند $\mathbf{r}$ يأخذ الصيغة الآتية :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\rho(\mathbf{r}')\,dv'$$
$$+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\sigma(\mathbf{r}')\,da'. \quad (2\text{–}8)$$



الشكل 1-2 تخطيط المجال الكهربائي بواسطة خطوط القوة

والمعادلة (8-2) تعدُّ معادلة عامة جداً ، في معظم الحالات لا نحتاج الى جميع هذه الحدود .

الكمية التي عرّفناها تواً ـ وهي المجال الكهربائي ـ يمكن حسابها عند كل نقطة في الفضاء المحيط بمنظومة من الشحنات أو بتوزيع شحني معين . وبهذا نجد أن الدالة $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ هي مجال متجه . هذا المجال يمتلك خواصاً رياضية مثيرة سنقوم بدراستها في البنود القادمة من هذا الفصل وفي الفصل الآتي كذلك . وفي محاولة لرؤية تركيب المجال الكهربائي الناشيء عن توزيع معين من الشحنات استنبط ميشيل فراداي (1791–1867) وسيلة مساعدة واستحدث مفهوم خطوط القوة . وخط القوة هو خط (أو منحني) وهمي مرسوم بشكل معين بحيث يكون اتجاهه عند أية نقطة بنفس إتجاه المجال عند تلك النقطة .

لنأخذ ، على سبيل المثال ، المجال الكهربائي الناشيء عن شحنة نقطية موجبة q_1 . تكون خطوط القوة المعبرة عن هذا المجال شعاعية منبثقة من الشحنة بجميع الاتجاهات نحو الخارج . وعلى النمط نفسه تكون خطوط القوة للمجال الناشيء عند شحنة نقطية منفردة سالبة ، شعاعية كذلك ولكنها متجهة نحو الشحنة في هذه المرة . هذان المثالان يعدان في غاية السهولة ، لكنهما يوضحان خاصية مهمة لخطوط المجال وهي أن خطوط القوة تنتهي عند مصادر المجال الكهربائي ، أي عند الشحنات المولدة للمجال .

2–4 الجهد الكهروستاتيكي : The electrostatic potential

لاحظنا في الفصل الاول انه اذا تلاشى التفاف كمية متجهة لأمكن التعبير عن هذه الكمية المتجهة بمثابة انحدار لكمية لا متجهة . وهذا الكلام ينطبق على المجال الكهربائي المعطى بالمعادلة (2–8) . ولتحقيق ذلك نلاحظ ان أخذ التفاف المعادلة (2–8) يتضمن المفاضلة بالنسبة للمتغير $\mathbf{r}$. ويظهر هذا المتغير في تلك المعادلة في الدوال التي هي بهيئة $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3$ فقط . لذا يكفي أن نبين أنَّ التفاف الدوال التي تكون بتلك الهيئة يساوي صفراً . وباستخدام الصيغة (I–9) المعطاة في الجدول (1–1) والتي تتضمن التفاف المتجه المضروب بكمية لا متجهة نحصل على :

$$\operatorname{curl} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \operatorname{curl}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \left[\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right] \times [\mathbf{r}-\mathbf{r}']. \tag{2–9}$$

وبحساب التفاف المتجه $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ بصورة مباشرة (لاحظ التمرين 13-1) نحصل على

$$\mathbf{curl}\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0, \tag{2-10}$$

كما يمكننا حساب انحدار الكمية $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ على غرار التمرين (16-1) فينتج لدينا

$$\mathbf{grad}\,\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -3\,\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5}\cdot \tag{2-11}$$

وبالاستفادة من هاتين النتيجتين مع ملاحظة ان نتاج الضرب الاتجاهي بين متجهين متوازيين يساوي صفراً يتضح أن :

$$\mathbf{curl}\,\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0. \tag{2-12}$$

وبما أن جميع حدود المعادلة (8-2) هي بهذه الهيئة عندئذ يتضح ان التفاف المجال الكهربائي الذي تساهم في تكوينه كل حدود المعادلة يساوي صفراً . وبهذا نجد أن المعادلة (12-2) تشير الى وجود دالة لا متجهة ذات انحدار مساوٍ للمجال الكهربائي . بقي أن نجد تلك الدالة ، أي نجد هيئة الدالة U التي تحقق المعادلة

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad}\; U(\mathbf{r}), \tag{2-13}$$

وهذه الدالة U تدعى الجهد الكهروستاتيكي . ومما تجدر الاشارة اليه هو انه من الملائم وضع اشارة الناقص في المعادلة (13-2) .

إنه لمن السهل جداً ايجاد الجهد الكهروستاتيكي الناشيء عن شحنة نقطية q_1 وقدره

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}, \tag{2-14}$$

وبالامكان تحقيق صحة هذه النتيجة بالتفاضل المباشر . كما يمكن أن نعتمد على هذه النتيجة ونستنتج دالة الجهد للمجال الكهربائي المعطى وفق العلاقة (8-2) وهي :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,da', \tag{2-15}$$ ،

والتي يمكن بسهولة تحقيقها كذلك بإجراء التفاضل بصورة مباشرة . وقد يبدو للقاريء أن استنتاج المعادلتين (2-14) و (2-15) قد تم بشكل إعتباطي . إلا أن طريقة الاستنتاج لاتهم كثيراً ، مادامت دالة الجهد تحقق صحة العلاقة . (2-13)

ويمكننا الحصول على الجهد الكهروستاتيكي بصورة مباشرة حالما يثبت وجوده . فإذا ثبت وجود الجهد U لأصبح بالامكان كتابة العلاقة

$$\int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = -\int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{grad}\, U \cdot d\mathbf{r}', \tag{2-16}$$

حيث تم اختيار المرجع (ورمزه ref) عند نقطة يكون عندها الجهد صفراً . ومن تعريف الانحدار نحصل على :

$$\mathbf{grad}\, U \cdot d\mathbf{r}' = dU. \tag{2-17}$$

إن إستعمال المعادلة (2-17) في المعادلة (2-16) سيحولها الى الشكل الآتي :

$$-\int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{grad}\, U \cdot d\mathbf{r}' = -U(\mathbf{r}) = \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}', \tag{2-18}$$

والحقيقة هي أن هذه العلاقة تعدٌّ معكوساً للعلاقة (2-13) . واذا طبقنا المعادلة (2-18) على المجال الكهربائي الناشيء عن شحنة نقطية وإخترنا نقطة المرجع في مالانهاية حيث يكون الجهد عند هذه النقطة صفراً ، لحصلنا على النتيجة الآتية :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \tag{2-19}$$

وما هذه النتيجة في طبيعة الحال سوى حالة خاصة للمعادلة (2-14) وبالتحديد عندما تكون $\mathbf{r}_1$ صفراً . وبالإمكان التوسع في هذا الاشتقاق للحصول على المعادلة (2-15) ، لكن الاشتقاق سيكون مملاً ولا نرى ضرورة لإدخاله في هذا المكان .

وهناك جانب آخر مثير ومفيد للجهد الكهروستاتيكي يتمثل في علاقته الوطيدة مع الطاقة الكامنة المصاحبة للقوة المحافظة الكهروستاتيكية . وبصورة عامة فإن الطاقة الكامنة المصاحبة لقوة كيفية محافظة يمكن التعبير عنها بالعلاقة :

$$W(\mathbf{r}) = -\int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}', \tag{2-20}$$

إذ ترمز $W(r)$ الى الطاقة الكامنة عند الموقع r نسبة الى نقطة مرجع معينة تكون عندها الطاقة الكامنة صفراً . وفي حالة الكهروستاتيكية نلاحظ أن $F = qE$ ، لهذا يكون الجهد الكهروستاتيكي مساوياً للطاقة الكامنة لوحدة الشحنة فيما إذا تم اختيار نقطة المرجع نفسها في حالتي الجهد الكهروستاتيكي والطاقة الكامنة . تستخدم هذه الفكرة أحياناً لإدخال مفهوم الجهد الكهروستاتيكي . ومع ذلك نشعر أن إدخال مفهوم الجهد باستخدام المعادلة (2-13) يلعب دوراً متميزاً يتجلى في التأكيد على أهمية الجهد الكهروستاتيكي في تعيين المجال الكهروستاتيكي . وبطبيعة الحال لا يوجد مايدعو الى التساؤل حول تكافؤ هذين الأسلوبين في نهاية المطاف .

إن الاستفادة من الجهد الكهروستاتيكي في حساب المجالات الكهربائية يمكن رؤيتها بمقارنة المعادلتين (2-8) و (2-15) . المعادلة (2-8) هي معادلة إتجاهية ، وللحصول على المجال الكهربائي منها ينبغي حساب ثلاثة تكاملات أو ثلاث مجموعات لكل حد . وفي أفضل الأحوال يكون الحساب مملاً ومطولاً ، وقد يستحيل حساب التكامل في حالات معينة . ومن الناحية الأخرى نجد أنَّ المعادلة (2-15) هي معادلة لا إتجاهية تتضمن مجموعاً واحداً أو تكاملاً واحداً لكل حدٍ من حدود المعادلة . وفضلاً عن ذلك نلاحظ أن المقام في هذه المعادلة يكون بالهيئة $|r-r'|$ ، مما يجعل حساب التكامل أسهل مما هو عليه الحال في المعادلة (2-8) . لكن الاعتراض على ذلك هو ان حساب المجال الكهربائي يتطلب إجراء عملية التفاضل على الناتج الذي نحصل عليه من جراء تكامل المعادلة (2-15) . ويمكن رد هذا الاعتراض في الحال اذا لاحظنا أنه بالامكان إنجاز التفاضل دائماً إذا كانت المشتقات موجودة . والحقيقة هي انه اعتيادياً يكون انجاز التفاضل أسهل بكثير من اجراء التكامل . وسنرى في الفصل الثالث أن الجهد الكهروستاتيكي سيكون أكثر أهمية حتى في تلك المسائل التي يكون فيها التوزيع الشحني غير محدد ، ومع ذلك يجب تعيينه أثناء حل المسألة .

إن وحدة الطاقة في النظام المتري هي نيوتن ـ متر أو الجول ، وعليه تكون وحدة الجهد جول/ كولوم ، ولكثرة استخدامها فقد اعطيت اسماً خاصاً هو الفولت . أما وحدة المجال الكهربائي فهي نيوتن/ كولوم أو فولت/ متر .

2-5 الموصلات والعوازل Conductors and insulators:

وبالامكان تصنيف المواد تبعاً لسلوكها الكهربائي الى صنفين : الموصلات والعوازل . الموصلات هي تلك المواد التي تحتوي على عدد كبير من ناقلات الشحنة

الطليقة مثل الفلزات . وتمتلك ناقلات الشحنة (وهي الالكترونات في معظم الحالات) حرية التجول في الوسط الموصل ، وتستجيب الى أضعف المجالات الكهربائية . وهذه الناقلات هي المسؤولة عن تكوين التيار الكهربائي في الموصل طالما كان هناك مجال كهربائي مسلط على الموصل من مصدر خارجي للطاقة .

أما العوازل فهي تلك المواد التي تكون فيها الجسيمات المشحونة مشدودة بقوة ببقية مكونات جزيئات الوسط المادي . وتنحصر إستجابة الجسيمات المشحونة الى المجال الكهربائي في قدرتها على الانحراف قليلاً عن مواضعها الأصلية ، ولكنها غير قادرة على تغيير مواضعها المحددة داخل الجزيئات . واذا توخينا الدقة في التعبير فإن هذا التعريف ينطبق على العازل المثالي ، وهو الوسط الذي لا يحدث فيه توصيل كهربائي عندما يسلط عليه مجال كهربائي خارجي . وقد يحدث توصيل واهن في العوازل الفيزيائية الحقيقية ، إلا أن التوصيل في عازل نموذجي يكون 10^{20} مرة أقل مما هو عليه في موصل جيد . وبما أن العدد 10^{20} يعدُّ عاملاً هائلاً فإنه اعتيادياً يمكننا القول أن العوازل تعد غير موصلة .

وهناك مواد معينة (أنصاف الموصلات والالكتروليات) تمتلك خواصاً كهربائية متوسطة بين الموصلات والعوازل . وبقدر مايتعلق الأمر بسلوك هذه المواد في المجال الكهربائي الساكن (الستاتيكي) فان سلوكها يعد مشابهاً لسلوك الموصلات . ومع ذلك تكون الاستجابة العابرة لهذه المواد نوعاً ما أبطأ من الموصلات ، وهذا يعني انها تستغرق وقتاً أطول لكي تصل الى حالة الاتزان في مجال ساكن .

وفي هذا الفصل وفي الفصول الأربعة القادمة سنكون على صلة بسلوك المواد في المجالات الكهروستاتيكية . وعلى الرغم من أن استقطاب العازل يعد في الاساس ظاهرة بسيطة ، إلا أنها تولد تأثيرات معقدة نوعاً ما ، ولهذا سنرجيء دراستها الى الفصل الرابع . ومن الناحية الاخرى بالامكان معالجة الموصلات باسلوب سهل بدلالة المفاهيم التي تمت مناقشتها تواً .

وبما أن الشحنة يمكنها أن تتحرك بحرية في الموصل حتى في حالة وقوعها تحت تأثير المجالات الضعيفة جداً ، فإن ناقلات الشحنة (الالكترونات والايونات) تستمر في التحرك حتى تصل مواضع تكون فيها محصلة القوة المؤثرة عليها صفراً . وعندما تصل الشحنات الطليقة الى حالة الاستقرار ، تصبح المنطقة الداخلية للموصل منطقة خالية من المجال الكهربائي . وسبب ذلك يعود الى أن تعداد ناقلات الشحنة في المنطقة الداخلية للموصل يجب أن تنضب ، وإلاّ إستمرت في الحركة في حالة وجود المجال . ولهذا يتلاشى المجال الكهربائي في الجسم الموصل تحت الظروف

الستاتيكية . وفضلاً عن ذلك يصبح الجهد متساوياً لجميع نقاط المادة الموصلة نظراً لأن $E = O$ داخل الجسم الموصل . وبكلمات أخرى يمكننا القول أن كل موصل يشكل منطقة متساوية الجهد في الفضاء عندما يكون تحت ظروف ستاتيكية .

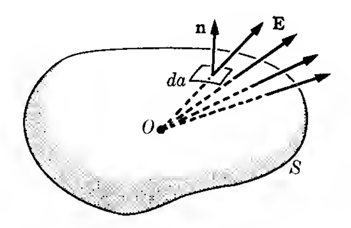
2-6 قانون كاوس Gauss' law

هناك علاقة مهمة بين تكامل المركبة العمودية للمجال الكهربائي على سطح مغلق والشحنة الكلية التي يحتضنها السطح . والآن سنناقش هذه العلاقة التي تعرف باسم قانون كاوس بتفصيل أكثر . إن المجال الكهربائي الناشيء عن شحنة نقطية q واقعة في نقطة الأصل عند نقطة محددة بالمتجه **r** يساوي :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{2-21}$$

لنأخذ التكامل السطحي للمركبة العمودية لهذا المجال على سطح مغلق (كالسطح المبين في الشكل 2-2 الذي يحيط بالشحنة q) ، سنحصل على :

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,da. \tag{2-22}$$

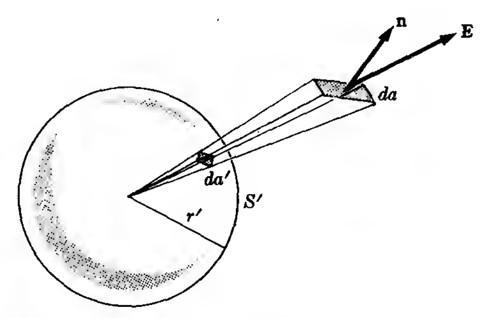


الشكل 2-2 سطح تخيلي مغلق يحتضن شحنة نقطية واقعة في نقطة الأصل

الكمية $(\mathbf{r}/r)\cdot\mathbf{n}\,da$ تمثل مسقط عنصر المساحة da على مستوٍ عمودي على **r** . وبتقسيم مساحة المسقط على الكمية r^2 نحصل على الزاوية المجسمة $d\Omega$ التي تكونها المساحة da . ويتضح من الشكل (3-2) أن الزاوية المجسمة المواجهة لعنصر المساحة da هي الزاوية نفسها التي تواجه عنصر المساحة da' الذي يقع على السطح الكروي

S' . ومركز هذا السطح منطبق على نقطة الاصل ، أما نصف قطره فيساوي r' كما هو موضح في الشكل . وعند ذلك يصبح بالامكان انجاز التكامل في المعادلة السابقة حيث ينتج :

$$\oint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,da = \oint_{S'} \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}}{r'^3}\,da' = 4\pi,$$

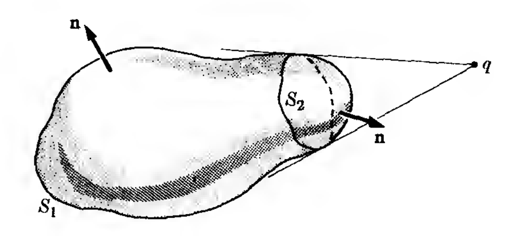


الشكل 3-2 رسم سطح كروي S' كوسيلة مساعدة لحساب الزاوية المجسمة المواجهة للمساحة **da**

ومنها نحصل على العلاقة الآتية :

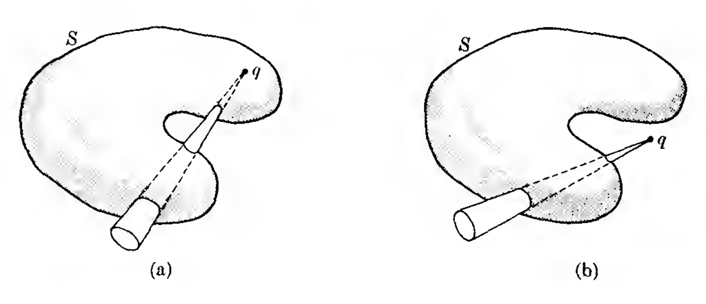
$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad (2\text{–}23)$$

والتي تمثل الحالة الخاصة المشروحة في أعلاه . واذا وقعت الشحنة q خارج السطح S . لأمكن تقسيم هذا السطح الى قسمين ، مساحة القسم الاول S_1 ومساحة القسم الثاني S_2 ولأصبح هذان القسمان مواجهين للزاوية المجسمة نفسها المتكونة عند الشحنة q كما هو مبين في الشكل (4-2) . لكن اتجاه العمود المقام على السطح S_1 يشير الى الاتجاه البعيد عن q ، على حين يكون العمود المقام على السطح S_2 مشيراً نحو q . ولهذا تكون مساهمة كل من هذين السطحين S_1 و S_2 للتكامل السطحي متساوية في المقدار ومتعاكسة في الاشارة ،مما يؤدي الى تلاشي التكامل الكلي للسطح المغلق . وبذلك يمكننا أن نستنتج أنه إذا أحاط السطح المغلق بالشحنة النقطية لأصبح التكامل السطحي للمركبة العمودية للمجال الكهربائي مساوياً q/ϵ_0 . أما اذا وقعت الشحنة q خارج السطح المغلق أصبح التكامل السطحي صفراً .



الشكل 4-2 يمكن تقسيم السطح المغلق S الى سطحين S_1 و S_2 ، كل منهما يواجه نفس الزاوية المجسمة عند الشحنة q .

ومما تجدر الإشارة اليه هو أن النص سالف الذكر ينطبق على جميع السطوح المغلقة مهما كان شكلها بل حتى اذا كان بالهيئة المبينة في الشكل (5-2) حيث يقطع عنصر الزاوية المجسمة السطح اكثر من مرة .



الشكل 5-2 عنصر الزاوية المجسمة يقطع السطح S اكثر من مرة .

لنأخذ الحالة التي يكون فيها السطح المغلق S محتضناً عدداً من الشحنات النقطية هي q_1 ، q_2 ، . . . ، q_N ، عندئذٍ يكون المجال الكهربائي الناشيء عن هذه الشحنات مساوياً للحد الاول من المعادلة (8-2) . كما أن كل شحنة تشكل زاوية مجسمة كلية قدرها 4π . ولهذا تؤول المعادلة (23-2) الى الآتي :

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, da = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i. \tag{2-24}$$

ويمكن تعميم هذه النتيجة في الحال لتشمل التوزيع الشحني المتصل المميز بالكثافة الشحنية . فاذا أخذنا عنصراً من التوزيع الشحني قدره ρdv ، واعتبرنا كل من هذه العناصر بمثابة شحنة نقطية ، لرأينا أنه يساهم بقدر $\rho dv/\epsilon_0$ في ناتج التكامل السطحي للمركبة العمودية للمجال الكهربائي بشرط ان يقع العنصر داخل السطح الذي نجري عليه عملية التكامل . ولهذا يكون التكامل السطحي الكلي مساوياً لمجموع ماتساهمه جميع العناصر من هذا النوع والتي تقع داخل السطح . فاذا فرضنا ان S تمثل السطح المغلق الذي يحيط بحجم التوزيع الشحني V لنتج لدينا :

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, da = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho\, dv. \qquad (2\text{–}25)$$

وتعرف المعادلتان (2-24) و (2-25) باسم قانون كاوس . الجهة اليسرى من هاتين المعادلتين وهي تكامل المركبة العمودية للمجال الكهربائي على السطح S تدعى أحياناً باسم فيض المجال الكهربائي خلال السطح S .

وباستخدام نظرية التباعد يمكن التعبير عن قانون كاوس بصيغة أخرى . تنص نظرية التباعد (المعادلة 1-37) على أن :

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F}\, dv.$$

وعند تطبيق هذه النظرية على التكامل السطحي للمركبة العمودية للمجال الكهربائي E فانها تؤول الى الشكل الاتي :

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, da = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E}\, dv, \qquad (2\text{–}26)$$

وبالاستعاضة عن التكامل السطحي في المعادلة (2-25) ينتج :

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{E}\, dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho\, dv. \qquad (2\text{–}27)$$

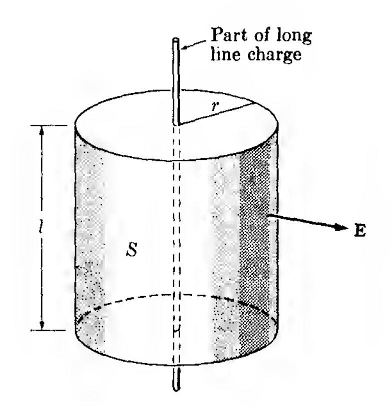
وهذه المعادلة تعد صحيحة لجميع الحجوم وبأي شكل كان الحجم V للشحنة . ان الطريق الوحيد الذي يمكن ان يحقق ذلك هو تساوي الكميتين المطلوب تكاملها في جهتي المعادلة (2-27) . وبناء على ذلك فان صحة هذه العلاقة ولأي حجم يختار للشحنة سيتضمن العلاقة :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho. \qquad (2\text{–}28)$$

ويمكننا ان نعد هذه النتيجة بمثابة صيغة تفاضلية لقانون كاوس .

2-7 استخدام قانون كاوس : Application of Gauss' law.

تعد المعادلة (28-2) أو بتعبير أدق صيغة محورة من هذه المعادلة سيتم إشتقاقها في الفصل الرابع ـ واحدة من المعادلات التفاضلية الأساسية في الكهربائية والمغناطيسية . ومن هذا المنطلق تعد هذه المعادلة مهمة بطبيعة الحال . ولكن قانون كاوس له أيضاً فوائد عملية . تتجلى هذه الفوائد بصورة رئيسة في توفير أسلوب سهل لحساب المجالات الكهربائية في الحالات التي يكون فيها المجال بقدر كافٍ من التماثل . وبكلمات أخرى ، بالامكان حساب المجال الكهربائي في الحالات المتميزة باعتباراتها الفيزيائية المهمة والتي يتوفر فيها التماثل باستعمال قانون كاوس بدلاً من حساب التكامل المعطى في اعلاه أو باستعمال الاساليب والطرق المعطاة في الفصل الثالث ، وعند ذلك يمكن توفير الكثير من العناء والجهد .



الشكل 6-2 سطح اسطواني يستخدم عند تطبيق قانون كاوس لحساب المجال الكهربائي الناشيء عن شحنة خطية طويلة .

ولكي يكون قانون كاوس مفيداً في حساب المجال الكهربائي ، ينبغي اختيار سطح مغلق بحيث يكون للمجال مركبة عمودية عليه ذات قيمة ثابتة لجميع نقاط السطح أو أن تكون قيمة المركبة صفراً . وعلى سبيل المثال خذ شحنة خطية طويلة جداً ذات كثافة شحنية قدرها λ لوحدة الطول كما هو مبين في الشكل

(2-6) . إن طبيعة التماثل في هذه الحالة تشير الى أن المجال الكهربائي المتولد يكون شعاعياً وغير معتمدٍ على الموقع سواء من ناحية البعد على امتداد خط الشحنة أم من ناحية الموضع الزاوي حول الشحنة الخطية . واستناداً الى هذه الملاحظات عن طبيعة المجال الكهربائي يتم اختيار السطح المغلق الملائم كما هو مبين في الشكل (2-6) . وعندئذٍ يصبح من السهل جداً حساب التكامل للمركبة العمودية للمجال الكهربائي على هذا السطح . النهايتان الدائريتان المستويتان للسطح المغلق لا تساهمان في ناتج التكامل وذلك لان المجال الكهربائي يكون موازياً لهما . وأما الجزء الاسطواني من السطح فانه يساهم بمقدار يساوي $2\pi r l E_r$ ، وسبب ذلك هو أن المجال E يكون شعاعياً وغير معتمدٍ على الموقع على السطح الاسطواني . وعندئذ يأخذ قانون كاوس الشكل الاتي :

$$2\pi r l E_r = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \cdot \qquad (2\text{-}29)$$

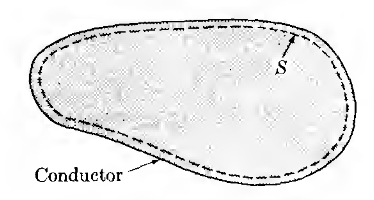
والآن يصبح بالامكان حل هذه المعادلة وايجاد المجال الكهربائي الناشيء عن الشحنة الخطية ، وبهذا نحصل على :

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \qquad (2\text{-}30)$$

ومما لاريب فيه أن حل التمرين (2-4) بالاستخدام المباشر للمعادلة (2-8) سيعطي النتيجة ذاتها ، وعندئذٍ سيتضح لنا الدور الذي يلعبه قانون كاوس في اختصار الحل وتوفير العناء بشكل ملموس .

نتيجة أخرى مهمة لقانون كاوس هي أن الشحنة التي يحملها جسم موصل مشحون تستقر على سطحه الخارجي . لقد رأينا في البند (2-5) أنَّ المجال الكهربائي يتلاشى داخل الجسم الموصل . وبوسعنا الآن أن نرسم سطحاً كاوسياً داخل الجسم الموصل وأن نستنتج طبقاً لقانون كاوس أن الشحنة الكلية داخل هذا السطح (أوأي سطح آخر مرسوم داخل الموصل) تساوي صفراً. وأخيراً نرسم السطح الكاوسي S المبين في الشكل (2-7) القريب جداً من السطح الحقيقي للموصل . وهنا أيضاً بطبيعة الحال تكون الشحنة الكلية داخل هذا السطح صفراً . ولهذا فإنَّ المكان الوحيد المتروك للشحنة حتى تستقر عليه هو سطح الجسم الموصل لكي لا يحدث تناقض مع قانون كاوس .

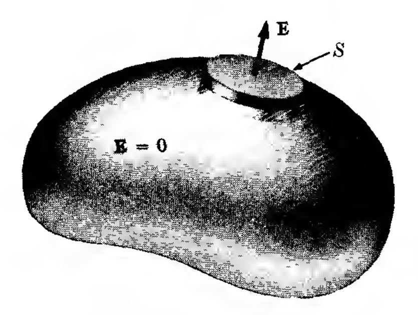
إن المجال الكهربائي خارج جسم موصل مشحون وبالضبط عند سطحه يجب أن يكون عمودياً على سطح الموصل . وسبب ذلك هو أن سطح الموصل يُعدُّ سطحاً



الشكل 7-2 سطح كاوسي مرسوم داخل جسم موصل مشحون

متساوي الجهد ، وأن $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\, U$. لنفرض أن الشحنة المستقرة على سطح الجسم الموصل معطاة بدلالة الكثافة السطحية للشحنة σ . واذا طبقنا قانون كاوس على سطح مغلق صغير بهيئة علبة أقراص ، وهو السطح S المبين في الشكل (8-2) ، لحصلنا على :

$$E\,\Delta S = \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)\Delta S,$$



الشكل 8-2 تطبيق قانون كاوس على سطح مغلق بهيئة علبة أقراص S بحيث يقطع السطح الحقيقي للجسم الموصل المشحون .

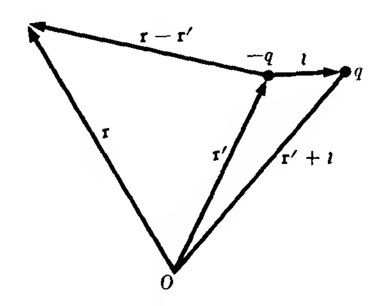
اذ ترمز ΔS الى مساحة الجزء المستوي من سطح كاوس (أي إحدى قاعدتي علبة الأقراص) . ومن هذه المعادلة يمكننا أن نحصل على المجال الكهربائي خارج الموصل المشحون وبالضبط عند سطحه ومقداره يساوي :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \qquad (2\text{–}31)$$

2-8 ثنائي القطب الكهربائي The electric dipole

يتكون ثنائي القطب الكهربائي من شحنتين متساويتين ومتعاكستين تفصلهما مسافة صغيرة . ويمكننا دراسة المجال الكهربائي والجهد الناشيء عن ثنائي القطب بالاستفادة من المعادلات المذكورة في البندين (3-2) و (4-2) . افرض أن شحنة قدرها $-q$ مثبتة عند النقطة $\mathbf{r}'$ وأن شحنة قدرها $+q$ واقعة عند النقطة $\mathbf{r}'+\mathbf{l}$ كما هو موضح في الشكل (9-2) . عندئذٍ يمكننا ايجاد المجال الكهربائي عند نقطة ما باستخدام العلاقة (8-2) ، ولتكن هذه النقطة $\mathbf{r}$. المجال الكهربائي عند هذه النقطة يساوي :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{l}|^3} - \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right\}. \tag{2-32}$$



الشكل 9-2 المجال الكهربائي الناشيء عن شحنتين نقطيتين .

وهذه المعادلة تعد صحيحة للمجال الكهربائي الناشيء عن ثنائي القطب مهما كانت قيمة الشحنة q وقيمة المسافة $\mathbf{l}$. إن ما يهمنا هو المجال الناشيء عن ثنائي القطب الذي يكون البعد الفاصل بين شحنتيه $\mathbf{l}$ صغيراً بالمقارنة مع البعد $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$. ولهذا بوسعنا فك المعادلة (32-2) وابقاء الحد الأول غير المتلاشي فقط . وسنتناول هذا النمط بشيء من التفصيل نظراً لشمولية إستعمالاته . في البداية تنشأ الصعوبة في فك المعادلة (32-2) بسبب مقام الحد الأول لها . لهذا سنأخذ مقلوب هذا المقام ونكتبه بالشكل الآتي :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \boldsymbol{l}|^{-3} = [(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 - 2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{l} + l^2]^{-3/2}$$
$$= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3}\left[1 - \frac{2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \frac{l^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}\right]^{-3/2}$$

والآن يصبح من السهل فك المعادلة الأخيرة باستعمال نظرية ذي الحدين . وعند إبقاء الحدود التي تعد خطية بالنسبة للبعد l نحصل على الآتي :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \boldsymbol{l}|^{-3} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3}\left\{1 + \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \cdots\right\}, \quad (2\text{–}33)$$

اذا أهملنا الحدود التي تحتوي على l^2 . وباستعمال المعادلة (33–2) مع المعادلة (32–2) مع المحافظة على بقاء الحدود التي تعد خطية بالنسبة للبعد l فقط ينتج :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\boldsymbol{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \cdots\right\}. \quad (2\text{–}34)$$

وهذه المعادلة تعطي ذلك الجزء من المجال الكهربائي الناشيء عن ثنائي قطب كهربائي محدود والذي يتناسب تناسباً طردياً مع البعد الفاصل بين الشحنتين . هناك بالطبع حدود أخرى تتناسب طردياً مع مربع ومكعب البعد بل ومع أس أعلى من التكعيب . ولكنه اذا كان البعد بين الشحنتين صغيراً أصبحت مساهمة تلك الحدود للمجال الكهربائي ضئيلة جداً . وعند أخذ الغاية التي عندها يقترب البعد l من الصفر فإن جميع الحدود تتلاشى مالم تصبح الشحنة غير محدودة . أما إذا اخذت الغاية عند اقتراب البعد من الصفر في الحالة التي تصبح فيها الشحنة q غير محدودة وبحيث تبقى الكمية ql ثابتة ، فإنَّ جميع الحدود تتلاشى عدا ذلك الحد الذي يكون خطياً بالنسبة للبعد l . عند هذه الغاية يتكون مايدعى بثنائي القطب النقطي . وتكون الشحنة الكلية لثنائي القطب النقطي صفراً ، وليس له امتداد في الفضاء ، ويميَّز كلياً بالعزم الذي يمتلكه . وهذا العزم يساوي غاية الكمية $q\boldsymbol{l}$ عندما تقترب l من الصفر ، وسنستعمل الرمز $\mathbf{p}$ للتعبير عن عزم ثنائي القطب الذي يساوي :

$$\mathbf{p} = q\boldsymbol{l}. \quad (2\text{–}35)$$

وبدلالة عزم ثنائي القطب تأخذ المعادلة (34–2) الصيغة الآتية :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right\}. \qquad (2\text{–}36)$$

ومما تجدر الاشارة إليه هو أن توزيع الجهد الناشيء عن ثنائي القطب النقطي مهم أيضاً . ويمكن إيجاده بالبحث عن الدالة التي يكون انحدارها مساوياً الجهة اليمنى للمعادلة (36–2) . وعلى أية حال فمن الأسهل تطبيق المعادلة (15–2) على حالة التوزيع الشحني المكون من شحنتين نقطيتين تفصلها مسافة صغيرة . وباستخدام الرموز المعطاة في المعادلة (32–2) نحصل على المعادلة المعبرة عن توزيع الجهد في هذه الحالة وهي :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\boldsymbol{l}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]. \qquad (2\text{–}37)$$

وعند فك الحد الاول لهذه المعادلة وبالطريقة ذاتها التي استعملت في فك الحد الأول للمعادلة (32–2) مع إبقاء الحد الخطي بالنسبة للبعد $\boldsymbol{l}$ فقط ، فان المعادلة (37–2) ستؤول الى الشكل الآتي :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\boldsymbol{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \qquad (2\text{–}38)$$

وتعد هذه المعادلة صحيحة الى الدرجة نفسها من التقريب كما في المعادلة (34–2) ، وهذا يعني أن الحدود التي تتناسب مع l^2 أو مع البعد المرفوع لأس أعلى من التربيع قد اهملت في هذه المعادلة . أما في حالة ثنائي القطب النقطي فان المعادلة (38–2) تصبح مضبوطة ، ومن الأفضل كتابتها بدلالة العزم كالآتي :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \qquad (2\text{–}39)$$

وهذه المعادلة تعطي الجهد الناشيء عن ثنائي القطب الكهربائي . ومن هذا الجهد يمكن ايجاد المجال الكهربائي لثنائي القطب كما هو معطى بالعلاقة (36–2) . ومن المهم كذلك أن نجد الطاقة الكامنة لثنائي القطب الكهربائي عندما يوضع في مجال كهربائي خارجي . ففي الحالة التي تكون فيها الشحنة $-q$ موضوعة عند النقطة $\mathbf{r}$ والشحنة $+q$ عند النقطة $\mathbf{r}+\boldsymbol{l}$ في مجال كهربائي معطى بدلالة دالة الجهد $U_{ext}(\mathbf{r})$ ، فإنَّ الطاقة الكامنة لثنائي القطب تصبح :

$$W = -qU_{ext}(\mathbf{r}) + qU_{ext}(\mathbf{r}+\mathbf{l}). \qquad (2\text{–}40)$$

واذا كانت $\mathbf{l}$ صغيرة بالمقارنة مع $\mathbf{r}$ ، لأمكن فك الدالة $U_{ext}(\mathbf{r}+\mathbf{l})$ وابقاء الحدين الاوليين فقط لنحصل على :

$$U_{ext}(\mathbf{r}+\mathbf{l}) = U_{ext}(\mathbf{r}) + \mathbf{l}\cdot \mathbf{grad}\, U_{ext}, \qquad (2\text{–}41)$$

حيث ينبغي استعمال قيمة الانحدار عند النقطة $\mathbf{r}$. وبالاستعاضة عن هذه النتيجة في المعادلة (2–40) ينتج :

$$W = q\mathbf{l}\cdot \mathbf{grad}\, U_{ext}. \qquad (2\text{–}42)$$

وبأخذ الغاية لثنائي القطب النقطي يمكن كتابة هذه المعادلة بدلالة العزم فينتج :

$$W(\mathbf{r}) = \mathbf{p}\cdot \mathbf{grad}\, U_{ext}, \qquad (2\text{–}43)$$

والتي هي معادلة مضبوطة بطبيعة الحال . ولما كان المجال الكهربائي مساوياً لانحدار الجهد الكهروستاتيكي باشارة سالبة ، فان الصيغة البديلة للمعادلة (2–43) ستكون

$$W(\mathbf{r}) = -\mathbf{p}\cdot \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}). \qquad (2\text{–}44)$$

هذه إذن هي الطاقة الكامنة لثنائي القطب $\mathbf{p}$ الموضوع في مجال كهربائي خارجي $\mathbf{E}_{ext}$ ، حيث تحسب الدالة $\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r})$ عند موضع الثنائي .

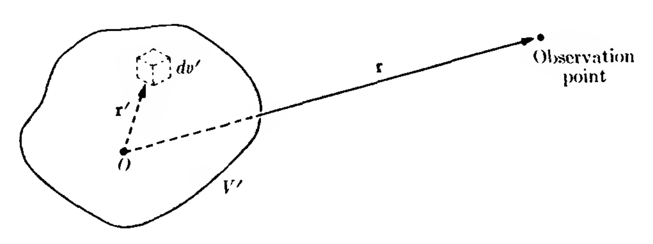
ومن المهم أن نشير الى أنه قد ناقشنا في هذه الفقرة نوعين من الجهد . فالمعادلات (2–37) و (2–38) و (2–39) تعبر عن الجهد الكهروستاتيكي الناشيء عن ثنائي القطب . وأما العلاقات من (2–40) الى (2–43) فإنها تعبر عن الطاقة الكامنة لثنائي قطب موضوع في مجال كهربائي خارجي ذي دالة جهد معلومة $U_{ext}(\mathbf{r})$. وهذا المجال ناشيء عن شحنات أخرى غير الشحنتين المكونتين ثنائي القطب . والحقيقة أن مجال ثنائي القطب يجب أن يستثنى لكي نتجنب الحصول على نتيجة لا نهائية . ومن الممكن أن يقودنا ذلك النص الى أسئلة معقدة نوعاً ما ومرتبطة بما يسمى القوى الذاتية والطاقات الذاتية والتي لا نستطيع مناقشتها في هذا المكان . ومع ذلك قد يلاحظ المرء أن الطاقة الكامنة الناشئة عن التأثير المتبادل لثنائي القطب مع مجاله الخاص تنتج عن القوى المؤثرة على الثنائي من قبل نفسه . تلك القوى تسمى في علم الديناميك (اي الحركة) قوى داخلية ، وهي

لا تؤثر على الثنائي ككل . وسنكتفي بهذا القدر من المناقشة الذي يفي بهدفنا ، ولا نرى ضرورة لاضافة إعتبارات أخرى حول هذه المسألة .

2-9 مفكوك متعدد الأقطاب للمجالات الكهربائية :
Multipole expansion of electric fields

يظهر من التعريف المذكور في أعلاه لعزم ثنائي القطب أن جوانباً معينة لتوزيع الجهد الناشيء عن توزيع محدد من الشحنة يمكن التعبير عنها بدلالة عزم ثنائي القطب الكهربائي . ولهذا فمن الضروري أن نُعرِّف عزم ثنائي القطب لتوزيع شحني كيفي لكي نتمكن من إنجاز ذلك . وبدلاً من ان نجد تعريفاً مفتعلاً سنأخذ مفكوك تعبير معين لجهد كهروستاتيكي ناشيء عن توزيع شحني إعتباطي . ولتقليل عدد المحاور الموضعية سنأخذ توزيعاً شحنياً في المنطقة المجاورة لنقطة الأصل للمحاور . كما أننا سنضيف قيداً آخراً وهو ان نجعل التوزيع الشحني برمته محصوراً داخل كرة نصف قطرها a ، ونفرض أن نصف القطر صغيراً بالمقارنة مع بعد نقطة المراقبة . لنأخذ نقطة بصورة كيفية داخل التوزيع الشحني ونحدد موقعها بالمتجه $\mathbf{r}'$ ، ونفرض أن كثافة الشحنة عند هذه النقطة هي $\rho(\mathbf{r}')$. كما نحدد موقع نقطة المراقبة بالمتجه $\mathbf{r}$ كما هو مبين في الشكل (2-10) . نلاحظ أنّ دالة الجهد عند النقطة $\mathbf{r}$ معطاة بالعلاقة :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dv', \qquad (2\text{–}45)$$



الشكل 2-10 تشغل الشحنة الحجم V بكثافة شحنية قدرها $\rho(\mathbf{r}')$. مطلوب حساب المجال الكهربائي عند البعد r .

إذ ترمز dv' لعنصر من الحجم داخل التوزيع الشحني ، V' ترمز للحجم الذي تشغله الشحنة بأجمعها . واستناداً الى التقييد الذي وضعناه بالنسبة لنقاط المراقبة باعتبارها بعيدة عن نقطة الاصل ، يصبح بالامكان فك الكمية $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}$ على شكل متوالية ذات أس تصاعدي لـ $\mathbf{r}'/\mathbf{r}$. وبهذا تكون النتيجة كالآتي :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = (r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' + r'^2)^{-1/2}$$
$$= \frac{1}{r}\left\{1 - \frac{1}{2}\left[-\frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right] + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}[\quad]^2 + \cdots\right\}, \quad (2\text{–}46)$$

حيث تظهر الحدود الثلاثة الاولى فقط بشكل جلي . ومما ينبغي ملاحظته هو أنه على الرغم من امكانية اهمال $(\mathbf{r}'/\mathbf{r})^2$ مقارنة مع $(2\mathbf{r}'.\mathbf{r}/r^2)$ ، قد لا تحذف من المجموعة الاولى من الكميات المحصورة بين قوسين لانها بنفس مرتبة الحد المهيمن في المجموعة الثانية المحصورة بين قوسين . وباستعمال المعادلة (2–46) ، وبعد حذف الحدود التي تحتوي على $\mathbf{r}'$ مرفوعة للاس 3 أو أي أس أعلى من هذا الرقم ، تؤول المعادلة (2–45) الى الآتي :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\left\{\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2}\left[\frac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3}\right] + \cdots\right\}\rho(r')\,dv'. \quad (2\text{–}47)$$

وبما ان $\mathbf{r}$ مقدار ثابت لا يعتمد على المتغير $\mathbf{r}'$ فبالامكان إخراجه خارج علامة التكامل ، وبهذا نحصل على :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{r}\int_{V'}\rho(r')\,dv' + \frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\int_{V'}\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\,dv'\right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\,\frac{x_i x_j}{r^5}\int_{V'}(3x_i'x_j' - \delta_{ij}r'^2)\rho(\mathbf{r}')\,dv'\right\}, \quad (2\text{–}48)$$

اذ ترمز الكميتان x_i و x_j الى المركبات الافقية والشاقولية للمتجه $\mathbf{r}$ و x_i' و x_j' الى المركبات الافقية والشاقولية للمتجه $\mathbf{r}'$ ، وأما δ_{ij} فتعرف كالآتي :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

ومن السهل تفسير المعادلة (2-48) . التكامل الاول في المعادلة واضح أنه يمثل الشحنة الكلية ، والحد الاول يمثل الجهد الذي يمكن ان ينشأ فيما لو كانت الشحنة بأجمعها مركزة عند نقطة الاصل . وأما التكامل الثاني فانه على درجة كبيرة من التماثل مع عزم ثنائي القطب الكهربائي المعرف في البند السابق ولهذا يدعى عزم ثنائي قطب التوزيع الشحني . وسنعد هذا الحد بمثابة تعميم للتعريف المعطى للشحنتين النقطيتين المتساويتين والمتعاكستين . وعلى أية حال فمن السهل أن نبين أن هذين التعريفين يعطيان النتيجة ذاتها . والحد الثاني من المعادلة (2-48) هو الجهد الذي يمكن أن ينشأ فيما لو كان ثنائي القطب النقطي الذي يساوي عزم ثنائي قطب التوزيع الشحني واقعاً عند نقطة الاصل . ومن المثير ان نلاحظ ان عزم ثنائي قطب التوزيع الشحني مستقل عن نقطة أصل الاحداثيات فيما اذا كانت الشحنة الكلية صفراً . ولتحقيق ذلك نأخذ نظاماً جديداً للاحداثيات ، بحيث تقع نقطة الاصل لهذا النظام عند الموضع $\mathbf{R}$ في النظام القديم . واذا رمزنا لنقطة معينة في النظام القديم بالمتجه $\mathbf{r}'$ ، وللنقطة نفسها حسب النظام الجديد بالمتجه $\mathbf{r}''$ لنتج لدينا :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'' + \mathbf{R}. \tag{2-49}$$

ولهذا يأخذ عزم ثنائي القطب حسب النظام القديم الصيغة الآتية :

$$\mathbf{p} = \int_{V'} \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\, dv' = \int_{V'} (\mathbf{r}'' + \mathbf{R})\rho(r')\, dv' = \int_{V'} \mathbf{r}''\rho\, dv' + \mathbf{R}Q, \tag{2-50}$$

وهذا مايثبت صحة النص المذكور في أعلاه .

والحد الثالث من المعادلة (2-48) يمكن كتابته كالآتي :

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij}, \tag{2-51}$$

اذ ان

$$Q_{ij} = \int_{V'} (3x_i'x_j' - \delta_{ij}r'^2)\rho(r')\, dv'. \tag{2-52}$$

هناك تسع مركبات للكمية Q_{ij} مصاحبة لقيم i و j ، التي تساوي 1 و 2 و 3 . ومن هذه المركبات التسع يوجد ست مركبات متساوية على شكل أزواج ، وبهذا يبقى ست مركبات متميزة . هذه المجموعة من الكميات تشكل مايدعى بأسم ممتد

عزم رباعي القطب* quadrupole moment tensor ، وتمثل امتداداً لمفهوم عزم ثنائي القطب . وبطبيعة الحال هناك عزوم ذات رتب أعلى ناشئة عن الحفاظ على الحدود ذات الرتب العالية عند فك المعادلة (2-48) . ان متعددة الاقطاب ذات الرتب العالية مهمة في الفيزياء النووية ، ومع ذلك فسوف لا تناقش أكثر من ذلك في هذا الكتاب .

وتستعمل متعددة الاقطاب الكهربائية ، حسبما تشير المعادلة (2-48) ، لتقريب المجال الكهربائي الناشيء عن توزيع شحني . وفضلاً عن ذلك هناك استعمالات أخرى عديدة ، ولكنها جميعاً تقع في نطاق تقريب توزيع شحني حقيقي متصل الى شحنات نقطية وثنائيات أقطاب نقطية ، وهلم جرا . وبفضل هذه التقريبات غالباً مايصبح حل المسائل المعقدة جداً ممكناً .

---

* الكميات الممتدة هي تعميم للكميات المتجهة ، وهناك مناقشة أولية معطاة عنها في البند 4-17 .

مسائل

2-1 جسيمان مشحونان كتلة كل منهما m وشحنته q علقا بخيطين طولهما l . جد الزاوية θ التي يعملها كل خيط مع الشاقول .

2-2 كرتان صغيرتان موصلتان متماثلتان مشحونتان ، الكرة الاولى تحمل شحنة قدرها 2.0×10^{-9} coul والثانية -0.5×10^{-9} coul . جد القوة بينهما عندما تكونان على بعد قدره 4 cm . إذا لامست إحدى الكرتين الكرة الأخرى ثم وضعتا على بعد 4 cm ، ما القوة بينهما ؟

2-3 وضعت ثلاث شحنات نقطية ، شحنة كل منها 3×10^{-9} coul ، على ثلاثة أركان لمربع طول ضلعه 15 cm . جد مقدار وعين إتجاه المجال الكهربائي المتكون عند الركن الشاغر للمربع .

2-4 خط لا نهائي الطول من الشحنات ، ذو كثافة شحنية منتظمة قيمتها λ لوحدة الطول . استعمل اسلوب التكامل المباشر لايجاد المجال الكهربائي عند نقطة تبعد r عن الخط .

2-5 (أ) قرص دائري نصف قطره R يحمل شحنة ذات كثافة سطحية منتظمة قيمتها σ لوحدة المساحة . جد المجال الكهربائي عند نقطة واقعة على محور القرص وعلى بعد قدرة z عن مستوي القرص . (ب) وضع جسم اسطواني دائري قائم نصف قطره R وارتفاعه L بصورة موازية لمحور z . فاذا علم أن الجسم يحمل شحنة ذات كثافة حجمية غير منتظمة معطاة وفق الدالة $\rho(z) = \rho_0 + \beta z$ وأن نقطة المرجع تقع عند مركز الجسم الاسطواني ، جد القوة المؤثرة على شحنة نقطية q موضوعة عند مركز الاسطوانة .

2-6 قشرة كروية رقيقة موصلة نصف قطرها R تحمل شحنة قدرها Q موزعة بصورة منتظمة . جد الجهد عند نقطة كيفية واقعة (أ) داخل القشرة و (ب) خارج القشرة مستخدماً طريقة التكامل المباشر .

2-7 شحنتان نقطيتان $-q$ و $+\frac{1}{2}q$ موضوعتان عند نقطة الأصل وعند النقطة $(a, 0, 0)$ على الترتيب . عند أية نقطة واقعة على امتداد محور x يصبح المجال الكهربائي صفراً ؟ ارسم مخططاً لسطح تساوي الجهد على المستوي x, y الذي يمر بالنقطة التي أشرنا اليها تواً . هل حقيقة أن جهد هذه النقطة هو الأدنى ؟

2-8 أثبت أنَّ سطح تساوي الجهد $(U = 0)$ في التمرين السابق ذو شكل كروي . ما محاور مركز هذه الكرة ؟

2-9 توزيع شحني منتظم ذو شكل اسطواني دائري قائم نصف قطره R وطوله L . أحسب الجهد الكهروستاتيكي عند نقطة واقعة على محور الاسطوانة وخارج التوزيع اذا علمت أن الكثافة الحجمية للشحنة تساوي ρ .

2-10 افرض أن منطقة في الفضاء تحتوي على مجال كهربائي موازٍ لمحور x . برهن على أن المجال لا يعتمد على المحورين y و z في هذه المنطقة . واذا كانت هذه المنطقة خالية من الشحنة الكهربائية ، اثبت ان المجال لا يعتمد أيضاً على x .

2-11 اذا كانت شدة عزل الهواء (أي شدة المجال الكهربائي اللازم لتوليد تفريغ هالي) تساوي $3\times 10^{6}\,v/m$ ، فما أعلى جهد يمكن أن تحصل عليه كرة موصلة معزولة نصف قطرها $10\,cm$ ؟

2-12 جسم موصل يحتوي على فجوة في داخله ، فإذا وضعت شحنة نقطية q داخل الفجوة برهن على أن شحنة محتثة قدرها $-q$ تتولد على سطح الفجوة (إستخدم قانون كاوس) .

2-13 إذا علم أن المجال الكهربائي في الغلاف الجوي عند سطح الكرة الأرضية يساوي تقريباً $200\,v/m$ ومتجهاً نحو الاسفل ، وأنه يساوي $20\,v/m$ عند ارتفاع قدره $1400\,m$ عن سطح الارض وإتجاهه نحو الاسفل ايضاً ، فما متوسط كثافة الشحنة في الغلاف الجوي للكرة الأرضية عند ارتفاع يقل عن $1400\,m$ ؟ وهل أن هذه الشحنة تنتج عن فائض في الأيونات الموجبة أم السالبة ؟

2-14 لوحان موصلان متوازيان وكبيران جداً تفصلهما مسافة قدرها d ، فاذا حصل اللوحان على شحنة موزعة بانتظام على السطحين الداخليين لهما بكثافة قدرها σ و $-\sigma$ على الترتيب ، جد تعبيراً للمجال الكهربائي المتكون بين اللوحين . برهن على أن المجال الكهربائي المتكون في المنطقة الخارجية يساوي صفراً . (إن اللوحين الموصلين المشحونين المتوازيين الذين تكون مساحتهما محدودة يولدان اساساً المجال الكهربائي نفسه في المنطقة المحصورة بينهما بشرط أن تكون أبعاد اللوحين كبيرة بالمقارنة مع البعد الفاصل d ، وترتيب بهذا الشكل يدعى متسعة ــ انظر الى الفصل السادس) .

2-15 توزيع شحني كروي ذو كثافة حجمية دالة للبعد r عن مركز التوزيع ، أي أن $\rho = \rho(r)$. فاذا علمت أن دالة الكثافة هي كما معطاة في أدناه ، عين المجال الكهربائي دالة للبعد r . أنجز عملية التكامل على النتيجة التي حصلت عليها لتحصل على تعبير للجهد الكهروستاتيكي $U(r)$ عاداً أن $U(\infty) = 0$.

أ ــ $\rho = A/r$ اذ أن A تمثل مقداراً ثابتاً للبعد $0 \le r \le R$

$\rho = 0$ للبعد $r > R$

ب ــ $\rho = \rho$ أي ان الكثافة تساوي مقداراً ثابتاً للبعد $0 \le r \le R$

$\rho = 0$ للبعد $> R$

2-16 باستعمال المعادلة (39-2) المعبرة عن الجهد الناشيء عن ثنائي القطب **p** ، ارسم مخططاً لسطوح تساوي الجهد في مستوي ثنائي القطب . من الملائم أن يوضع ثنائي القطب عند نقطة الأصل . استعمل النتيجة التي حصلت عليها لرسم عدد من خطوط القوة الكهربائية . قارن النتيجة مع الشكل (1-2) .

2-17 (أ) أثبت أن القوة المؤثرة على ثنائي قطب **p** موضوع مجال كهربائي خارجي $\mathbf{E}_{ext}$ يساوي $\mathbf{p}.\nabla\mathbf{E}_{ext}$. (ب) أثبت أن العزم الدوراني المؤثر على ثنائي القطب الموضوع في هذا المجال يساوي :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times [\mathbf{p} \cdot \nabla\mathbf{E}_{ext}] + \mathbf{p} \times \mathbf{E}_{ext},$$

إذ أن **r** تمثل متجه بعد ثنائي القطب عن النقطة التي يطلب تعيين العزم الدوراني حولها . والكمية $\mathbf{p} \times \mathbf{E}_{ext}$ ، والتي لا تعتمد على النقطة المطلوب حساب العزم الدوراني حولها ، تسمى ازدواج الدوران turning couple المؤثر على ثنائي القطب .

2-18 ثلاث شحنات مرتبة بشكل مصفوفة خطية . الشحنة $-2q$ موضوعة عند نقطة الأصل ، والشحنتان اللتان يكون قدر كل منهما $+q$ موضوعتان عند النقطتين $(0, 0, l)$ و $(0, 0, -l)$ على الترتيب . جد تعبيراً مبسطاً للجهد $U(r)$ عند النقاط التي تكون أبعادها $|r|\gg l$. ارسم مخططاً لسطوح تساوي الجهد في المستوي x, z .

2-19 ما ممتد عزم رباعي القطب quadrupole moment tensor للتوزيع الشحني المبين في التمرين السابق ؟

الفصل الثالث ٣

حل المسائل الكهروستاتيكية
SOLUTION OF ELECTROSTATIC PROBLEMS

مما لا شك فيه أن حل أية مسألة كهروستاتيكية يُعدُّ سهلاً في الحالة التي يكون فيها التوزيع الشحني محدداً ، حيث يمكن إيجاد كل من الجهد والمجال الكهربائي ، كما رأينا ، بصورة مباشرة وذلك بان نجعل التكامل يغطي التوزيع الشحني بأجمعه ، أي أن

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \tag{3-1}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\,dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \tag{3-2}$$

بيد أن معظم المسائل في واقع الحال هي ليست من هذا النوع . فاذا لم يكن التوزيع الشحني محدداً سلفاً ، فقد يصبح من الضروري أن نعين المجال الكهربائي قبل أن نحسب التوزيع الشحني . وعلى سبيل المثال ، قد تتضمن مسألة كهروستاتيكية عدة موصلات بحيث يكون الجهد أو الشحنة الكلية لكل موصل من هذه الموصلات معلوماً ، ولكن توزيع الشحنة على سطح الموصل لن يكون معلوماً بصورة عامة ، ولا يمكن معرفته مالم ينجز الحل الكامل للمسألة .

إن مانهدف إليه في هذا الفصل هو تطوير اسلوب بديل لمعالجة المسائل الكهروستاتيكية ، ولتحقيق هذا الغرض سنقوم أولاً باشتقاق المعادلة التفاضلية

الاساس التي تتفق مع مستلزمات الجهد U . وفي هذا الفصل سنهمل المسائل التي تتضمن أجساماً عازلة ، على أننا سنقوم بحل مثل هذا النوع من المسائل في الفصل الرابع .

3-1 معادلة بويزون Poisson's equation

إن كل ماسنحتاجه من علاقات أساسية قد تم اشتقاقها في الفصل السابق . وقبل كل شيء لدينا الصيغة التفاضلية لقانون كاوس وهي :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho. \tag{3-3}$$

وفضلاً عن ذلك يمكننا التعبير عن E للمجال الكهروستاتيكي الخالص حسب المعادلة

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U. \tag{3-4}$$

وبدمج المعادلتين (3-3) و (3-4) نحصل على :

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{3-5a}$$

ومن الملائم أن نفكر بالكمية div grad على أنها عامل تفاضلي منفرد رمزه $\nabla \cdot \nabla$ أو ∇^2 . وهذا العامل يدعى لابلاسيان Laplacian . لذا :

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{3-5b}$$

ومن الواضح أن اللابلاسيان هو عامل تفاضلي لا متجه خالص ، وأن المعادلة (3-5b) معادلة تفاضلية تدعى معادلة بويزون . والعامل ∇^2 يتضمن تفاضلاً لأكثر من متغير . ولهذا تعد معادلة بويزون معادلة تفاضلية جزئية يمكن حلها حالما تعرف الدالة $\rho(x, y, z)$ وشروط الحدود المناسبة .

والعامل ∇^2 شأنه في ذلك شأن الانحداد والتباعد والالتفاف لا يشير الى نظام معين من أنظمة الاحداثيات . ولكي يصبح بوسعنا حل مسألة معينة يجب علينا أن

نكتب ∇^2 بدلالة الاحداثيات x, y, z أو ϕ , θ , r أو . . . الخ . ويعد اختيار نظام معين من الاحداثيات أمراً كيفياً . ومع ذلك اعتيادياً يقع الاختيار على النظام الذي ينسجم مع طبيعة التناظر في المسألة الكهروستاتيكية التي نحن بصددها لغرض تبسيط الحل . ويمكن بسهولة ايجاد $\nabla^2 U$ باحداثيات مختلف الأنظمة بأن نأخذ انحدار U أولاً ، ومن ثم نجد التباعد باستعمال التعابير الرياضية المناسبة حسبما جاء في الفصل الأول . وبذلك نحصل على :

وفق الاحداثيات المتعامدة :

$$\nabla^2 U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \tag{3-6}$$

وفق الاحداثيات الكروية :

$$\nabla^2 U \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}. \tag{3-7}$$

وفق الاحداثيات الاسطوانية :

$$\nabla^2 U \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \tag{3-8}$$

ونقترح على القارىء ملاحظة المراجع المدرجة في نهاية هذا الفصل لكي يتعرف على صيغ اللابلاسيان بأنظمة أخرى للاحداثيات أكثر تعقيداً من الانظمة التي أشرنا اليها تواً . ومما ينبغي ملاحظته هو ان r و θ لها معانٍ مختلفة في المعادلتين (3-7) و (3-8) . اذ أن r تمثل مقدار متجه نصف القطر من نقطة الاصل و θ الزاوية القطبية وفق الاحداثيات الكروية . أما بالنسبة للاحداثيات الاسطوانية فان r تمثل المسافة العمودية عن محور الاسطوانة و θ الزاوية السمتية حول ذلك المحور .

3-2 معادلة لابلاس **Laplace's equation**

في طائفة معينة من المسائل الكهروستاتيكية التي تتضمن موصلات ، تكون الشحنة بأجمعها مستقرة على سطح الموصلات أو تكون بهيئة شحنات نقطية مثبتة .

وفي مثل هذه الحالات تكون ρ صفراً عند معظم النقاط في الفضاء . وبهذا نجد أن معادلة بويزون تؤول الى صيغة أبسط عندما تتلاشى كثافة الشحنة . هذه الصيغة تعرف باسم معادلة لابلاس وهي :

$$\nabla^2 U = 0, \tag{3-9}$$

لنفرض لدينا مجموعة مكونة من N من الموصلات (قد يكون واحد أو اكثر من هذه المجموعة شحنة نقطية) لكل منها جهد ثابت قدره U_I, U_{II}, U_N..., على الترتيب . والمسألة هي ايجاد الجهد عند جميع النقاط في الفضاء الكائن خارج الموصلات . ويمكن انجاز ذلك بأن نجد حلاً لمعادلة لابلاس يؤول الى قيم U_I و U_{II} و ....U_N على سطوح الموصلات المعنية . ان حلاً من هذا النوع لمعادلة لابلاس قد يكون مفرداً ، وهذا يعني انه لايوجد حل آخر لمعادلة لابلاس يحقق شروط الحدود نفسها . وسنبرهن صحة هذا النص فيما يلي . والحل الذي نحصل عليه بهذه الطريقة لمعادلة لابلاس لا ينطبق على النقاط الداخلية للموصلات ، وذلك لان الموصلات تمتلك شحنة سطحية وهذا مايقود الى انقطاع في انحدار الجهد عبر السطح (لاحظ البند 7-2) . ولكنه سبق ان رأينا كيف ان المنطقة الداخلية لكل موصل هي منطقة ذات جهد ثابت . ولهذا يعد حل هذه المسألة كاملاً .

وسوف نصف بشيء من التفصيل طريقتين لحل معادلة لابلاس : تتمثل الطريقة الاولى في تركيب حل عام للمعادلة (9-3) من حلول خاصة بنظام احداثيات مستمد من تناظر المسألة . أما الطريقة الثانية فهي طريقة الصور . وفضلاً عن ذلك سنجد حلاً عاماً كاملاً للمسألة ببعدين . وقبل تبني هذه الانماط المحددة علينا أن نتوقف لكي نبرهن على صحة بعض الخواص المهمة لحل معادلة لابلاس .

النظرية 1:

اذا كانت U_n.... و U_2 و U_1 هي حلولاً لمعادلة لابلاس فان :

$$U = C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots + C_n U_n, \tag{3-10}$$

يعد أيضاً حلاً للمعادلة . الرموز C تعني ثوابتاً كيفية .

ان البرهان يتبع في الحال حقيقة أن :

$$\begin{aligned}\nabla^2 U &= \nabla^2 C_1 U_1 + \nabla^2 C_2 U_2 + \cdots + \nabla^2 C_n U_n \\ &= C_1 \nabla^2 U_1 + C_2 \nabla^2 U_2 + \cdots + C_n \nabla^2 U_n \\ &= 0.\end{aligned}$$

وباستخدام النظرية I يمكننا أن نركب حلين أو اكثر من حلول معادلة لابلاس بطريقة تجعل الحل الناتج يحقق المجموعة المعطاة لشروط الحدود . وسنأتي الى عدد من الامثلة على ذلك في البنود القادمة .

النظرية **II** (نظرية الانفراد) :

إن أي حلين من حلول معادلة لابلاس اللذين يحققان شروط الحدود نفسها يختلف أحدهما عن الآخر بثابت جمعي على الاكثر .

ولكي نبرهن صحة هذه النظرية نأخذ منطقة مغلقة حجمها V_0 خارج السطوح $S_I, S_{II}, \ldots S_N$ التي تمثل سطوح مختلف الموصلات التي تتضمنها المسألة . ويحيط بهذه السطوح من الخارج السطح S ، وقد يكون هذا السطح واقعاً في مالانهاية أو ان يكون سطحاً فيزيائياً حقيقياً يحتضن الحجم V_0 . دعنا نفرض ان U_1 و U_2 هما حلان لمعادلة لابلاس داخل V_0 ، وبالاضافة الى ذلك يمتاز هذا الحلان بأن لهما شروط الحدود نفسها على السطوح $S, S_I, S_{II}, \ldots, S_N$. ويمكن تعيين شروط الحدود هذه بأن نعطي قيماً لـ U أو $\partial U/\partial n$ على السطوح المحددة .

والآن نعرف دالة جديدة بدلالة الحلين لمعادلة لابلاس وهي :

$$\Phi = U_1 - U_2.$$

وبديهي ان :

$$\nabla^2 \Phi = \nabla^2 U_1 - \nabla^2 U_2 = 0$$

داخل الحجم V_0 . وفضلاً عن ذلك ، اما Φ أو **n.grad** Φ تصبح صفراً على الحدود . دعنا نستخدم نظرية التباعد على المتجه $\Phi \nabla \Phi$:

$$\begin{aligned}\int_{V_0} \operatorname{div}(\Phi \nabla \Phi)\, dV &= \int_{S+S_I+\cdots S_N} \Phi \nabla \Phi \cdot \mathbf{n}\, dS \\ &= 0,\end{aligned}$$

وذلك لان التكامل في الجهة اليمنى من المعادلة يكون صفراً . ويمكن فك التباعد حسب المعادلة (I-6) في الجدول (1-1) لينتج :

$$\text{div}\,(\Phi\nabla\Phi) = \Phi\nabla^2\Phi + (\nabla\Phi)^2$$

لكن الدالة $\nabla^2\Phi$ تتلاشى عند جميع النقاط داخل V_0 ، ولهذا تؤول نظرية التباعد في هذه الحالة الى الصيغة :

$$\int_{V_0} (\nabla\Phi)^2\, dV = 0.$$

والآن $(\nabla\Phi)^2$ يجب أن تكون موجبة أو صفراً عند كل نقطة داخل V_0 . ولما كان تكامل هذه الكمية يساوي صفراً ، فمن الواضح عندئذٍ أن يكون الاحتمال الوحيد الممكن هو :

$$\nabla^2\Phi = 0$$

وبهذا نكون قد برهنا صحة هذه النظرية . والدالة التي يكون انحدارها صفراً عند جميع النقاط لا يمكن أن تتغير . ولهذا نجد أن الدالة Φ تكون ذات قيمة واحدة لجميع النقاط داخل V_0 وعلى السطوح المحيطة بالحجم . فاذا كانت شروط الحدود معطاة وذلك بتعيين U_1 و U_2 على السطوح $S, S_1, \ldots, S_N$، لأصبحت قيمة الدالة Φ صفراً عند جميع النقاط الواقعة داخل V_0 طالما كانت قيمتها صفراً على تلك السطوح . أما اذا كانت شروط الحدود معطاة بدلالة $\partial U_1/\partial n$ و $\partial U_2/\partial n$، لأصبحت $\nabla\Phi$ صفرا عند جميع النقاط داخل V_0 و $\nabla\Phi\cdot\mathbf{n} = 0$ على الحدود . والحل الوحيد الذي ينسجم مع النص الأخير هو أن تكون الدالة Φ مساوية لقيمة ثابتة .

3-3 معادلة لابلاس بمتغير واحد مستقل
Laplace's equation in one independent variable

إذا كانت U دالة لمتغير واحد فقط ، عندئذٍ تؤول معادلة لابلاس الى معادلة تفاضلية اعتيادية . لنأخذ الحالة التي تكون فيها الدالة U دالة لاحداثي واحد هو x ، أي U(x) ، لذا ينتج لدينا :

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 0 \qquad \text{and} \qquad U(x) = ax + b \tag{3-11}$$

وهذه المعادلة تعبر عن الحل العام ، حيث يتم اختيار الثابتين b, a حسب شروط الحدود . والحقيقة أن هذه النتيجة مرت علينا في الفصل السابق ، إنها تمثل الجهد بين لوحين موصلين مشحونين عموديين على محور x .

وبالنسبة لأنظمة الاحداثيات الأخرى لن يكون الحال أكثر تعقيداً فيما لو بقيت U دالة لمتغير واحد فقط . فاذا كانت الدالة U وفق نظام الاحداثيات الكروية دالة للبعد r فقط ، أي U(r) ، لوجدنا أن معادلة لابلاس والحل العام لها يأخذان الصيغتين الآتيتين .

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right) = 0, \qquad U(r) = -\frac{a}{r} + b. \tag{3-12}$$

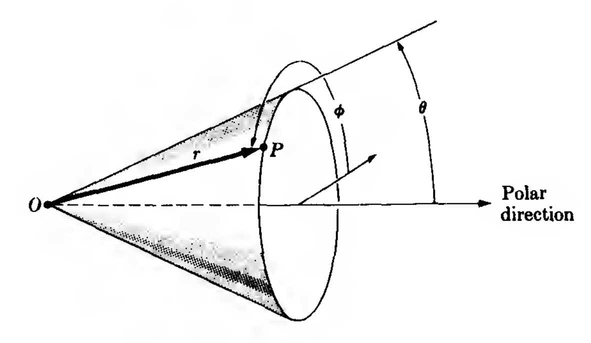
أما حل معادلة لابلاس بدلالة الاحداثيات الاسطوانية للدالة المستقلة عن المتغيرين θ ، z ، أي U(r) ، فسنتركها كتمرين للقارىء

3-4 حلول معادلة لابلاس بالاحداثيات الكروية ــ التوافقيات المنطقية
Solutions to Laplace's equation in spherical coordinates Zonal harmonics

وبعد ذلك نوجه اهتمامنا الى حلول معادلة لابلاس عندما تكون U دالة لأكثر من متغير . والعديد من المسائل التي تهمنا تتعلق بموصلات على شكل كرات أو اسطوانات ، ولهذا يصبح لزاماً علينا أن نستعمل الاحداثيات الكروية أو الاحداثيات الاسطوانية لايجاد حلول معادلة لابلاس . نبدأ أولاً بمعادلة المسألة الكروية ، وسنجد أنه من الأفضل أن نقصر مناقشتنا على الحالات التي تكون فيها U غير معتمدة على الزاوية السمتية ϕ . وطبيعي أن هذا التقييد سيقصر قدرتنا على حل صنف معين من المسائل ، غير أن الكثير من المسائل الفيزيائية التي تهمنا تقع لحسن الحظ ضمن هذا الصنف المقيد من المسائل . والحقيقة أن المسائل الأكثر تعقيداً تقع خارج نطاق هذا الكتاب .

وعلى هذا الأساس تكون U دالة لمتغيرين فقط ، أي $U(r, \theta)$ ، بالنسبة للحالة الكروية ، إذ أن r تمثل قيمة نصف القطر من نقطة أصل مثبتة 0 وθ هي الزاوية القطبية (لاحظ الشكل 1-3) . وباستعمال المعادلة (3-7) تأخذ معادلة لابلاس الصيغة الآتية لهذه الحالة :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)=0. \qquad (3\text{-}13)$$



الشكل 1-3 موقع النقطة P بدلالة الاحداثيات الكروية r , θ , Φ .

وسنعتمد في حل هذه المعادلة التفاضلية الجزئية على أسلوب معروف بإسم "فصل المتغيرات" . وبتعويض حل بهيئة :

$$U(r,\theta)=Z(r)P(\theta)$$

في المعادلة (3-13) ينتج لدينا الآتي :

$$\frac{1}{r^2}P(\theta)\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)+\frac{Z(r)}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)=0. \qquad (3\text{-}14)$$

لاحظ أن المشتقات الجزئية قد استبدلت بمشتقات كلية وذلك لأن كل من P, Z دالة لمتغير واحد فقط . وبتقسيم المعادلة (3-14) على $U(r, \theta)$ وبضربها في r^2 تؤول هذه المعادلة الى الشكل الآتي :

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)=-\frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right). \qquad (3\text{-}15)$$

الجهة اليسرى من هذه المعادلة دالة للمتغير r فقط والجهة اليمنى دالة للمتغير θ . والطريقة الوحيدة التي تجعل الدالة لـ r مساوية لدالة لـ θ لجميع قيم θ, r هي أن تكون الدالتان مساوية لمقدار ثابت . لذلك سنفرض ان كل جهة من جهتي المعادلة (15-3) تساوي k ، إذ أن k هي ''ثابت الفصل'' .

ليس من الضروري ان تقود جميع قيم k الى حلول مقبولة وفق اسس فيزيائية . لنأخذ المعادلة التي تحتوي على المتغير θ اولاً :

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + kP = 0. \tag{3-16}$$

وهذه هي معادلة لاجندر Legendre's equation . والحلول الوحيدة التي تُعدُّ مقبولة فيزيائياً والتي تكون محددة لمدى كامل للمتغير θ من الصفر الى π ، هي تلك الحلول التي ترافق $k = n(n+1)$ ، إذا أن n ترمز لأي عدد موجب صحيح . وسنرمز للحل الذي يلائم عدداً معيناً من n بالرمز $P_n(\theta)$. وجميع حلول المعادلة (16-3) لقيم أخرى لـ k تعد معتلة السلوك ill-behaved في جوار $\theta = 0$ أو $\theta = 180°$ ، إذ تصبح لا نهائية بل حتى غير معرفة عند هذه القيم للمتغير θ * . وهذه الحلول لا يمكن جعلها تلائم شروط الحدود الفيزيائية ولهذا يجب إهمالها † .

إن الحلول المقبولة ، $P_n(\theta)$ ، تعد متعددة الحدود بالنسبة لـ $\cos\theta$ ، وتعرف عادة باسم متعددات حدود لاجندر Legendre polynomials . ويبين الجدول (1-3) دوال لاجندر الأربع الاولى . وواضح من المعادلة (16-3) أنه بالامكان ضرب P_n بأي ثابت كيفي .

لنعود الآن الى المعادلة التي تحتوي على المتغير r وهي :

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) = n(n+1)Z, \tag{3-17}$$

---

* لقد كانت المناقشة هنا مختصرة جداً . ونقترح على القاريء المهتم بالموضوع الرجوع الى المراجع الرياضية التي تعالج معادلة لاجندر بالتفصيل . وعلى سبيل المثال أنظر الى الكتاب المؤلف من قبل Margenau و Murphy (الصفحة 61) والمدرج في نهاية هذا الفصل . وتكتب معادلة لاجندر عادة بصيغة مختلفة وذلك بتعويض $x = \cos\theta$. وبهذا يرمز لحلول معادلة لاجندر بالرمز $P_n(x)$ أو $P_n(\cos\theta)$.

† إن هذا النص يتطلب مواصفات معينة . وفي عدد من المسائل الكهروستاتيكية يمكن استثناء المناطق المحيطة بـ $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ بصورة طبيعية . فعلى سبيل المثال . السطوح المخروطية الموصلة . عند توفر هذه الشروط يمكن إستخدام حلول للمعادلة (16-3) ذات قيم أخرى للثابت k . ومسائل من هذا النوع سوف لا تؤخذ بالاعتبار هنا .

حيث سبق أن استخدمنا الصيغة الصريحة لـ k التي أعطت حلول θ المقبولة . وبتأمل المعادلة (17-3) يظهر أن هناك حلين مستقلين هما :

$$Z_n = r^n \qquad \text{and} \qquad Z_n = r^{-(n+1)}.$$

ويمكننا الحصول على حلول معادلة لابلاس من :

$$U_n(r, \theta) = Z_n(r) \times P_n(\theta),$$

وهنا يجب الانتباه جيداً الى ضرورة جعل الدالتين Z و P مرادفتين لقيمة واحدة لـ n . وهذا هو شرط ملزم وذلك لأن طرفي المعادلة (15-3) يساويان الثابت نفسه وهو $n(n+1)$.

وهكذا استطعنا أن نحل معادلة لابلاس بالاحداثيات الكروية وفقاً لما جاء في المناقشة في أعلاه ، وحصلنا على مجموعة من الحلول التي تعرف باسم توافقيات منطقية zonal harmonics هي

$$U_n = r^n P_n(\theta) \qquad \text{or} \qquad U_n = r^{-(n+1)} P_n(\theta), \qquad (3\text{–}18)$$

الجدول 1-3

متعددات حدود لاجندر لقيم n التي تساوي 0 , 1 , 2 , 3

n	$P_n(\theta)$
0	1
1	$\cos\theta$
2	$\frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

إذ أن $P_n(\theta)$ تعد واحدة من متعددات الحدود المدرجة في الجدول (1-3) و n تمثل عدداً صحيحاً موجباً أو صفراً . والتوافقيات المنطقية تشكل مجموعة كاملة من الدوال ، وهذا يعني أنه يمكن تكوين حلاً عاماً لمعادلة لابلاس بتركيب هذه الحلول حسب النظرية I بشرط أن تظهر المسالة الفيزيائية تناظراً سمتياً ملائماً .

هناك عدد من التوافقيات المنطقية معروفة لدينا جيداً . فأحد الحلول $n=0$ وبالتحديد "U = مقداراً ثابتاً" يُعدُّ حلاً بديهياً لمعادلة لابلاس يصح لأي نظام للاحداثيات . التوافق المنطقي r^{-1} هو جهد شحنة نقطية و $r^{-2}\cos\theta$ هو جهد ثنائي القطب .

3-5 كرة موصلة في مجال كهربائي منتظم :
Conducting sphere in a uniform electric field

والآن سنشرح فائدة التوافقيات المنطقية للمسائل الكهروستاتيكية ذات التماثل الكروي وذلك بحل مسألة الكرة الموصلة غير المشحونة عند وضعها في مجال كهربائي منتظم E_o . إن خطوط المجال الكهربائي المنتظم تكون متوازية ، ولكن وجود الكرة الموصلة فيه سيغير المجال بطريقة تجعل الخطوط ترتطم بسطح الموصل الذي يكون سطح تساوي جهد على الأغلب . وإذا فرضنا أن اتجاه المجال الكهربائي المنتظم كان في الأصل بالاتجاه القطبي (اتجاه المحور z) ، وعددنا نقطة الأصل لنظام الاحداثيات المعتمد منطبقة على مركز الكرة ، عندئذٍ يتضح من طبيعة التماثل في هذه المسألة أن الجهد سيكون مستقلاً عن الزاوية السمتية ϕ في هذه الحالة ، كما يمكن التعبير عنه كمجموع لتوافقيات منطقية .

دعنا نفرض أن نصف قطر الكرة الموصلة التي تعدُّ بمثابة سطح تساوي الجهد يساوي a ، وأن جهد هذه الكرة يساوي U_o . والمشكلة هي ايجاد حل لمعادلة لابلاس في المنطقة الكائنة خارج الكرة . والذي يؤول الى القيمة U_o على سطح الكرة ذاتها ، وفي الوقت نفسه يحصل على الصيغة الصحيحة عند أخذ الغاية للنقاط البعيدة جداً عن الكرة . وهذا الحل يمكن كتابته بالشكل الآتي :

$$\begin{aligned} U(r,\theta) = A_1 + C_1 r^{-1} &+ A_2 r\cos\theta \\ &+ C_2 r^{-2}\cos\theta + \tfrac{1}{2}A_3 r^2(3\cos^2\theta - 1) \\ &+ \tfrac{1}{2}C_3 r^{-3}(3\cos^2\theta - 1) + \cdots, \end{aligned} \qquad (3\text{–}19)$$

اذ أن الاحرف A و C تمثل ثوابت كيفية . وعند القيم الكبيرة للبعد r يكون التشوه الحاصل في المجال الكهربائي ضئيلاً جداً بالمقارنة عما كان عليه قبل وضع الكرة الموصلة فيه ، ولهذا يكون بهيئة المجال الكهربائي المنتظم ، لذا :

$$[\mathbf{E}(r, \theta)]_{r\to\infty} = \mathbf{E}_0 = E_0\mathbf{k},$$
$$[U(r, \theta)]_{r\to\infty} = -E_0 z + \text{constant},$$
$$= -E_0 r\cos\theta + \text{constant}. \qquad (3\text{–}20)$$

ولكي تتفق المعادلتان (19–3) و (20–3) عند المسافات الكبيرة لـ r ، يشترط أن تكون : $A_2 = -E_0$. كما إن جميع الثوابت الاخرى التي يرمز لها بالحرف A إبتداءً من A_3 فأعلى يجب ان تكون صفراً .

والحد $C_1 r^{-1}$ يولد مجالاً شعاعياً ، وهذه نتيجة تنسجم مع حالة الكرة الموصلة المشحونة كما هو متوقع . بيد أن المسألة التي نحن بصددها تتعلق بكرة موصلة غير مشحونة ، ولهذا يجب ان تكون قيمة الثابت C_1 صفراً . وعند سطح الكرة نلاحظ ان : $U = U_0$ ، وأن الجهد يصبح مستقلاً عن الزاوية θ . أما الحدان اللذان يحتويان على $\cos\theta$ فيمكننا ان نجعل أحدهما يمحو الآخر . لكن الحدود التي تحتوي على r مرفوعة لأس سالب أعلى من واحد فلا يمكن لأحدهما أن يمحو الآخر ، لأنها تحتوي على دوال لاجندر مختلفة . والاحتمال الوحيد الذي بقي لدينا هو أن نعوض عن جميع الثوابت C_i ، في حالة $i \geq 3$ ، بصفر . عندئذ تصبح المعادلة (19–3) كما يأتي :

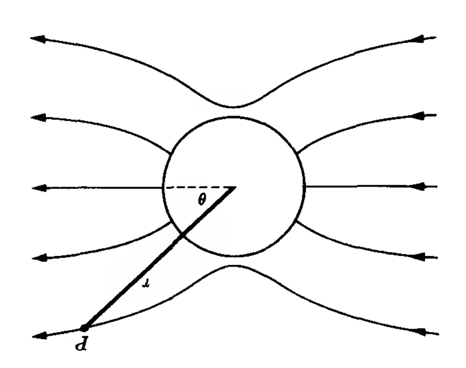
$$U(r, \theta) = A_1 - E_0 r\cos\theta + C_2 r^{-2}\cos\theta, \qquad \text{for} \quad r \geq a,$$
$$U(a, \theta) = U_0. \qquad (3\text{–}21)$$

وبما ان هذين التعبيرين للجهد متكافئان ، فينبغي ان تكون : $r = a$ و $A_1 = U_0$ و $C_2 = E_0 a^3$.

ومن هذا التعبير الاخير للجهد لا يمكننا حساب المجال الكهربائي عند جميع النقاط في الفضاء (لاحظ الشكل 2–3) فحسب ، بل كذلك يمكننا حساب الكثافة السطحية للشحنة الموزعة على سطح الكرة الموصلة .

$$\left.\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial U}{\partial r} = E_0\left(1 + 2\frac{a^3}{r^3}\right)\cos\theta, \\ E_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} = -E_0\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)\sin\theta, \end{aligned}\right\} \quad \text{for} \quad r \geq a, \qquad (3\text{–}22)$$

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 E_r\Big|_{r=a} = 3\epsilon_0 E_0\cos\theta. \qquad (3\text{–}23)$$



الشكل 3-2
خطوط الفيض الكهربائي في حالة وضع كرة موصلة في مجال كهربائي منتظم

وبهذا نجد أن الشحنة الكلية على الكرة تصبح

$$Q = a^2 \int_0^\pi \sigma(\theta) 2\pi \sin\theta \, d\theta,$$

وبديهي أن ناتج التكامل يساوي صفراً ، وهذه النتيجة تتفق مع ما فرضناه في البداية وهو أن الكرة غير مشحونة .

3-6 التوافقيات الاسطوانية Cylindrical harmonics

بالامكان حل معادلة لابلاس بالاحداثيات الاسطوانية بطريقة فصل (أو تفريق) المتغيرات أيضاً . وهنا أيضاً سنقتصر الحل على صنف محدد من المسائل ، وهي المسائل التي يكون الجهد فيها مستقلاً عن الاحداثي z . وهذه الحلول تكون ملائمة للمسائل التي تتضمن موصلاً اسطوانياً طويلاً أو سلكاً طويلاً . غير أنها لا تلائم الموصلات الاسطوانية أو الاسلاك القصيرة .

واذا كان الجهد لا يعتمد على الاحداثي z ، لاصبحت معادلة لابلاس بالاحداثيات الاسطوانية بالصيغة الآتية :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0. \qquad (3\text{-}24)$$

وبالتعويض عن $U = Y(r)S(\theta)$

تأخذ المعادلة (24-3) الصيغة الآتية :

$$\frac{r}{Y}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dY}{dr}\right) = -\frac{1}{S}\frac{d^2S}{d\theta^2} = k, \tag{3-25}$$

هنا أيضاً يلعب k دور ثابت الفصل . وتعد المعادلة التي تحتوي على المتغير θ بسيطة نوعاً ما ، وذات حلول بشكل $\cos k^{1/2}\theta$ و $\sin k^{1/2}\theta$. ولكي يكون لهذه الحلول معنى فيزيائياً ، فيجب ان يكون كل حل بمثابة دالة وحيدة القيمة للمتغير θ ، لذا

$$\cos k^{1/2}(\theta + 2\pi) = \cos k^{1/2}\theta,$$
$$\sin k^{1/2}(\theta + 2\pi) = \sin k^{1/2}\theta.$$

أو ، بكلمات أخرى ، بعد أن يأخذ المتغير θ مداه الكامل بين القيمتين 0 و 2π ، يجب ان تتصل الدالة بصورة سلسة بقيمتها عند $\theta = 0$. وهذه الحالة تتحقق عندما تكون $k = n^2$ فقط ، إذ ان n هي عدد صحيح . ويمكننا بالاضافة الى ذلك ان نشترط ان يكون العدد الصحيح موجباً (أو صفراً) دون أن نخسر أياً من تلك الحلول .

لنعود الآن الى المعادلة التي تحتوي على المتغير r ، حيث يمكننا التحقق بسهولة من أن الدالة Y(r) تساوي r^n أو r^{-n} ، ما لم تكن قيمة n صفراً . ففي هذه الحالة تصبح قيمة الدالة Y(r) مقداراً ثابتاً أو $Y(r) = \ln r$. ولهذا تأخذ الحلول المطلوبة لمعادلة لابلاس ، والتي تعرف بأسم التوافقيات الاسطوانية ، الصيغ الآتية :

$$\begin{array}{ll} 1, & \ln r, \\ r^n \cos n\theta, & r^{-n} \cos n\theta, \\ r^n \sin n\theta, & r^{-n} \sin n\theta. \end{array}$$

هذه الدوال تشكل مجموعة متكاملة من المتغيرات r و θ بالاحداثيات الاسطوانية . كما يمكن الحصول على الجهد $U(r,\theta)$ بتركيب التوافقيات الاسطوانية حسب النظرية I .

* 3-7 معادلة لابلاس بالاحداثيات المتعامدة :
Laplace's equation in rectangular coordinates

كما يمكن كذلك حل معادلة لابلاس بالاحداثيات المتعامدة بطريقة فصل المتغيرات . وبالتعويض عن :

$$U(x, y, z) = f_1(x)f_2(y)f_3(z),$$

في معادلة لابلاس ينتج :

$$\frac{1}{f_1(x)}\frac{d^2f_1}{dx^2} + \frac{1}{f_2(y)}\frac{d^2f_2}{dy^2} = -\frac{1}{f_3(z)}\frac{d^2f_3}{dz^2}. \qquad (3\text{–}26a)$$

الجهة اليسرى من المعادلة دالة للاحداثيات x و y ، والجهة اليمنى من المعادلة دالة للاحداثي z فقط . لذلك يجب ان يكون كل من طرفي المعادلة مساوياً لنفس المقدار الثابت k . وهذا هو المقدار الثابت الاول . والمعادلتان اللتان يمكن الحصول عليهما من المعادلة (3-26a) هما

$$\frac{d^2f_3}{dz^2} + kf_3 = 0, \qquad (3\text{–}26b)$$

$$\frac{1}{f_2}\frac{d^2f_2}{dy^2} = k - \frac{1}{f_1}\frac{d^2f_1}{dx^2}$$

وقد كتبت هذه المعادلة الأخيرة بطريقة جعلت المتغير x مفصولاً عن المتغير y . كما يمكن جعل كل طرف من هذه المعادلة مساوياً لثابت فصلٍ ثانٍ قيمته m− . لذا

$$\frac{d^2f_2}{dy^2} + mf_2 = 0, \qquad (3\text{–}26c)$$

$$\frac{d^2f_1}{dx^2} - (k + m)f_1 = 0. \qquad (3\text{–}26d)$$

وبالامكان حل المعادلات (3-26b) و (3-26c) و (3-26d) بسهولة . ومن الحلول النموذجية للدالة U(x, y, z) الحل الآتي :

$$U(x, y, z) = Ae^{-(k+m)^{\frac{1}{2}}x} \cos m^{1/2}y \cos k^{1/2}z. \qquad (3\text{–}27)$$

ويمكننا الحصول على سبعة حلول مستقلة اخرى لثابتي الفصل k و m باجراء واحد أو اكثر من التعويضات الآتية : $+(k+m)^{1/2}x$ بدلاً من

* يمكن حذف البنود المؤشرة بهذه العلامة دون فقدان إستمرارية الموضوع .

$-(k+m)^{1/2}x$ و $\sin m^{1/2} y$ بدلاً من $\cos m^{1/2} y$ و $\sin k^{1/2} z$ بدلاً من $\cos k^{1/2} z$.

والى حد الآن لم نضع قيوداً على الثابت k أو الثابت m ، بيد أن شروط الحدود للمسألة المعنية تقيد الثابت k (أو الثابت m) بمجموعة منقطعة من القيم الموجبة أو السالبة . وقد يكون من المفيد أن نشير الى حقيقة أن شروط الحدود هي التي تميز الحلول الملائمة للمعادلة التفاضلية . والدالة

$$U(x, y, z) = \sum_p \sum_q A_{pq} e^{-(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} x} \cos py \cos qz$$

لقيم مثبتة من الاحداثيات x و y هي بالضبط مفكوك مسلسلة فورير Fourier series expansion لدالة زوجية كيفية للمتغير z .

إن الحلول المتمثلة بالمعادلة (27-3) اذا اخذت على انفراد لا تمثل حلولاً بسيطة ، وسوف لا نحاول أن نجعلها تلازم الاوضاع الفيزيائية الخاصة . إن مايهمنا في واقع الحال هي الحالة التي يكون فيها ثابتا الفصل صفراً ، ولهذا سنوجه إهتمامنا صوب هذه الناحية . يتضح من المعادلة (26d-3) أن كلاً من :

$$f_1(x) = a_1 x, \qquad \text{أو} \qquad f_1(x) = \text{constant}$$

يمثل حلاً لتلك المعادلة . كما يمكننا الحصول على $f_2(y)$ من المعادلة (26c-3) ، وهلم جرا . لذا

$$U(x, y, z) = A_1 xyz + A_2 xy + A_3 yz + A_4 xz + A_5 x + A_6 y + A_7 z + A_8, \quad (3\text{-}28a)$$

إذ أن مجموعة الرموز A تمثل ثوابتاً كيفية . وبالإمكان تطبيق هذا الحل على الحالة التي تكون فيها ثلاثة مستويات موصلة متقاطعة بزوايا قائمة . فإذا كانت هذه المستويات هي مستويات الاحداثيات المتعامدة نفسها ، أي xy و yz و zx ، وكانت جميعها ذات جهد واحد ، لنتج :

$$U(x, y, z) = A_1 xyz + A_8. \quad (3\text{-}28b)$$

والتمرين الذي سنتركه للقاريء هو تعيين كثافة الشحنة السطحية على المستويات الاحداثية التي تنسجم مع متطلبات المعادلة (28b-3) .

* 3-8 معادلة لابلاس ذات البعدين.الحل العام :
Laplace's equation in two dimensions. General solution

اذا كان الجهد دالة لاحداثيين متعامدين ، لأمكن كتابة معادلة لابلاس كالآتي :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \qquad (3\text{–}29a)$$

بالامكان الحصول على حل عام لهذه المعادلة بواسطة التحويل الى مجموعة من المتغيرات المستقلة . ومع ذلك علينا أن نؤكد أن تحويلاً من هذا النوع سيؤدي الى تبسيط المعادلة الأصلية في الحالات ذات البعدين فقط . افرض أن

$$\xi = x + jy, \qquad \eta = x - jy,$$

إذ أن $j = \sqrt{-1}$ وهي وحدة العدد التخيلي . وبدلالة هاتين العلاقتين نحصل على :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

و

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial \xi\, \partial \eta} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

و

$$\nabla^2 U = 4\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0. \qquad (3\text{–}29b)$$

ومن الواضح أن الحل العام لهذه المعادلة يكون بالصيغة الآتية

$$U = F_1(\xi) + F_2(\eta) = F_1(x + jy) + F_2(x - jy), \qquad (3\text{–}30)$$

اذ ان الرمزين F_1 و F_2 يمثلان دالتين كيفيتين . وهاتان الدالتان هما بصورة عامة كميات مركبة . ومع ذلك يمكن تركيب دالتين حقيقيتين حسب الطريقة الآتية . أولاً دع :

$$F_2(x - jy) = F_1(x - jy)$$

وهذا يعني أن الدالتين F_1 و F_2 لهما نفس الاعتماد على زاويتيهما ، لذا :

$$U_1 = F_1(x + jy) + F_1(x - jy) = 2\,\mathrm{Re}\,[F_1(x + jy)],$$

إذ أن Re ترمز للجزء الحقيقي من الدالة المركبة . وبالاضافة الى ذلك فإن الدالة التخيلية الثانية للجهد تساوي

$$U_2 = -j[F_1(x + jy) - F_1(x - jy)] = 2\,\mathrm{Im}\,[F_1(x + jy)],$$

إذ أن Im تشير الى الجزء التخيلي . وبهذا نجد أن كلا الجزأين الحقيقي والتخيلي لأية دالة مركبة F(x+jy) يمثلان حلولاً لمعادلة لابلاس .

إن الحلول التي وجدناها بهذه الطريقة هي ليست مقصورة على نظام خاص للاحداثيات . فعلى سبيل المثال ، نجد أن التوافقيات الاسطوانية المذكورة في البند 3-7 قد حصلنا عليها من الدوال المركبة* :

$$(x + jy)^n = r^n e^{jn\theta},$$

و

$$\ln (x + jy) = \ln r + j\theta$$

ومن الناحية الأخرى عندما نحاول حل مسألة معينة ذات بعدين ، فإننا لا نجد أسلوباً قياسياً لإيجاد الدالة المركبة المناسبة . وهذه الطريقة تعطي عدداً كبيراً من الحلول ، وبذلك يصبح من المتعذر سردها جميعاً ونبذ تلك الحلول التي لا تتفق مع شروط الحدود للمسألة . وفي الحالات البسيطة يمكن إيجاد الدوال المطلوبة بطريقة المحاولة والخطأ . وفي حالات أخرى قد تكون طريقة الـ conformal mapping (وهي طريقة خارج نطاق هذا الكتاب) مفيدة .

3-9 الصور الكهروستاتيكية Electrostatic images

يعد حل معادلة لابلاس الذي يحقق مجموعة معطاة من شروط الحدود حلاً وحيداً . وعلى هذا الاساس إذا حصل المرء على حل معين ممثل بالدالة U(x, y, z) بطريقة ما ولاحظ أن هذه الدالة تتفق مع جميع شروط الحدود ، لأمكن عدّ هذا الحل منجزاً بشكل كامل . وطريقة الصور هي أسلوب يمكننا من الحصول على تلك النتيجة بدون حل معادلة تفاضلية . وهذه الطريقة هي ليست طريقة عامة يمكن استخدامها على جميع أنواع المسائل الكهروستاتيكية ، ومع ذلك فهناك عدد

* تربط الاحداثيات المتعامدة بالاحداثيات الاسطوانية بالطريقة الاعتيادية وهي : $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$.

لا بأس به من المسائل المهمة التي تقع ضمن ذلك الصنف الذي يمكن تطبيق هذه الطريقة عليه . وبذلك نرى أنه من الضروري مناقشة هذا الأسلوب هنا .
لنفرض انه بالامكان كتابة الجهد بالصيغة الآتية :

$$U(\mathbf{r}) = U_1(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\sigma(r')\,da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \qquad (3\text{-}31)$$

إذ أن U_1 تمثل دالة معينة أو دالة سهلة الحساب ، والتكامل يمثل مساهمة الشحنة السطحية الموجودة على جميع الموصلات التي تتضمنها المسألة في تكوين الجهد . أما الدالة σ فهي غير معروفة . وقد يحدث ، وهذا هو جوهر طريقة الصورة ــ الشحنة . إن الحد الأخير للمعادلة (3-31) يمكن الاستعاضة عنه بالجهد U_2 الناشيء عن توزيع شحني معين . وهذا الشيء ممكن طالما كانت سطوح جميع الموصلات تنطبق على سطوح تساوي الجهد التي تمثل مجموع الجهدين $(U_1 + U_2)$. وتدعى الشحنات التي تولد الجهد U_2 بشحنات الصورة . والواقع أنه لا وجود لهذه الشحنات بطبيعة الحال . أما موقعها الظاهري فيكون "داخل" مختلف الموصلات ، ويكون الجهد $U = U_1 + U_2$ حلاً متحققاً للمسألة في المنطقة الخارجية فقط .

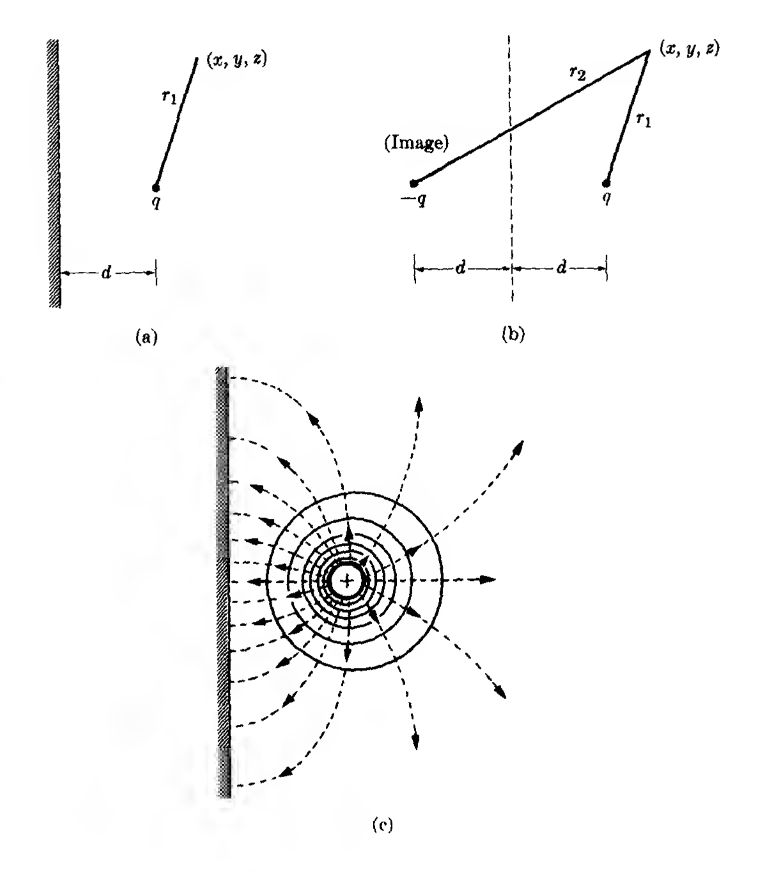
وسنحل مسألة الشحنة النقطية q الموضوعة بالقرب من مستوي موصل محدود الابعاد كمثال على تلك الطريقة . ولوضع الصيغ الرياضية للمسألة افرض أن المستوي الموصل ينطبق على المستوي yz ، وأفرض أن الشحنة النقطية تقع على المحور x عند البعد $x = d$ (لاحظ الشكل 3-3a) . ان الجهد الذي يلائم الفرضية المتمثلة في المعادلة (3-31) هو

$$U_1(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x - d)^2 + y^2 + z^2}} \qquad (3\text{-}32)$$

خذ الآن مسألة مختلفة متعلقة بشحنتين نقطيتين هما (q و q−) موضوعتين على بعد قدره 2d كما هو موضح في الشكل (3-3b) . والجهد الناشيء عن هاتين الشحنتين

$$U(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}, \qquad (3\text{-}33)$$

لا يحقق معادلة لابلاس عند جميع النقاط خارج الشحنات فحسب ، بل يؤول الى قيمة ثابتة (وبالأخص صفر) على السطح العمود والمنصف للمسافة الفاصلة بين الشحنتين كذلك . ولهذا نجد ان المعادلة (3-33) تحقق شروط حدود المسألة



الشكل 3-3
مسألة الشحنة النقطية والمستوي الموصل وقد تم حلها بطريقة الصورة ـ الشحنة : (أ) المسألة الأصلية ، (ب) موضع الشحنة الصورة ، (جـ) خطوط القوة (متقطعة) وسطوح تساوي الجهد (متصلة).

الأصلية . ولما كانت حلول معادلة لابلاس وحيدة ، فان العلاقة (33-3) تمثل الجهد الصحيح في نصف الفضاء الكلي الكائن خارج المستوي الموصل . أما الشحنة q− التي تسبب نشوء الجهد

$$U_2(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \qquad (3\text{-}34)$$

فتدعى صورة الشحنة النقطية q . وطبيعي أن لا وجود للصورة ، وأن المعادلة (32-3) لا تعطي الجهد بصورة صحيحة سواءً داخل المستوي الموصل المبين في الشكل (3a-3) أم على يساره .

ويمكننا الحصول على المجال الكهربائي E في المنطقة الخارجية من أخذ الانحدار السالب للمعادلة (33-3) . وبما أن سطح المستوي الموصل يمثل سطحاً بينياً يربط بين حلين مختلفين لمعادلة لابلاس ، الحل الاول U = 0 والحل الثاني معطى بالمعادلة (33-3) ، فإنَّ الانقطاع في المجال الكهربائي يعبر عنه بالكثافة السطحية للشحنة على السطح وقيمتها تساوي :

$$\sigma(y, z) = \epsilon_0 E_x|_{x=0} = -\frac{qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \qquad (3\text{-}35)$$

والشكل (3c-3) يبين خطوط القوة وسطوح تساوي الجهد لأصل المسألة التي نحن بصددها . والواقع ان هذه الخطوط والسطوح هي نفس خطوط القوة ونفس سطوح تساوي الجهد للحالة المكونة من شحنتين نقطيتين (لاحظ الشكل 3b-3) ، ولكنها لا تستمر في المنطقة الكائنة على يسار المستوي . وانه لواضح من الشكل أن جميع خطوط الفيض التي من المتوقع أن تتقارب نحو صورة الشحنة ، تنقطع عند المستوي كما هو مبين في الشكل (3c-3) . ولهذا تكون الشحنة الكلية على المستوي مساوية لشحنة الصورة (q−) . ومن الممكن رياضياً الحصول على النتيجة نفسها بتكامل المعادلة (35-3) على السطح بأجمعه (انظر الى المسألة 10-3) .

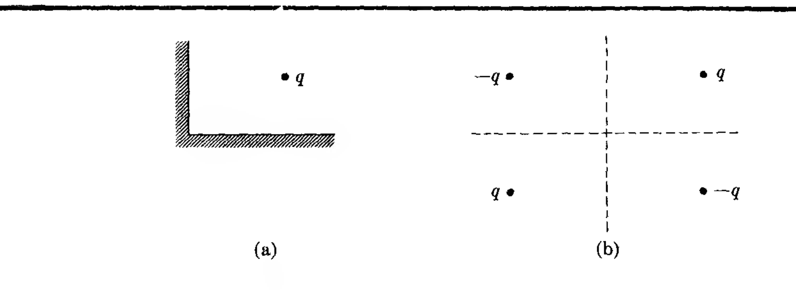
من المؤكد ان الشحنة النقطية q تؤثر بقوة تجاذبية على المستوي ، وذلك لان الشحنة السطحية المحتثة تكون ذات علامة معاكسة . وحسب قانون نيوتن للفعل ورد الفعل ، فان هذه القوة تساوي القوة التي يؤثرها المستوي على الشحنة q . وبما ان الشحنة النقطية لا تعاني من تأثير أية قوة ناشئة عن مجالها الخاص بها ، لذا ينتج :

$$\mathbf{F} = -q\,\mathbf{grad}\,U_2, \qquad (3\text{-}36)$$

وهذه بالضبط هي القوة التي تتأثر بها الشحنة النقطية بسبب وجود الشحنة الصورة .

وهناك مسألة أخرى يمكن حلها بسهولة وفق مفهوم الصور ، وهي تعيين المجال الكهربائي لشحنة نقطية q في المنطقة المجاورة لتقاطع قائم لمستويين موصلين (لاحظ الشكل 4a-3) . إن مواضع الشحنات الصور هي كما مبين في الشكل (4b-3) .

ويتضح من ملاحظة هذا الشكل أن جهد المستويين المرسومين بشكل خطوط متقطعة يكون صفراً ، وذلك بسبب التأثير الكلي للجهود الناشئة عن الشحنة q وعن الشحنات الصور الثلاث .



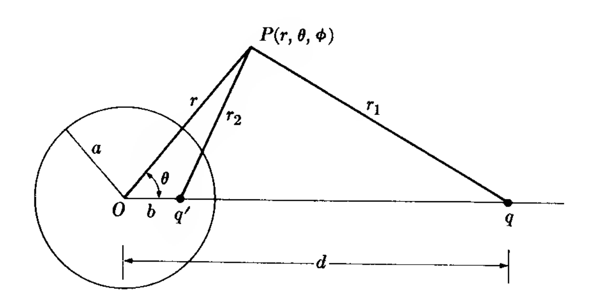
الشكل 4-3 شحنة نقطية عند ركن قائم الزاوية

3-10 شحنة نقطية وكرة موصلة :

Point charge and conducting sphere

تتمثل الصعوبة في حل المسائل بأسلوب الصور أساساً في ايجاد مجموعة الشحنات الصور التي تولد ، بالاشتراك مع الشحنات الاصلية ، سطوحاً لتساوي الجهد عند الموصلات . ويكون حل المسألة سهلاً في الحالات التي يتوفر فيها تناظر هندسي بسيط فقط ، كما هي الحال بالنسبة لشحنة نقطية q موضوعة بجوار كرة موصلة ، إذ يصبح من الضروري أن تتوفر شحنة صورة منفردة بحيث تجعل من الكرة سطحاً ذات جهد قدره صفر . ولهذا تدعو الحاجة الى شحنة صورة اضافية لتغيير جهد الكرة الى قيمة أخرى ثابتة .

سنبدأ أولاً بتعيين مقدار الصورة q' وبتحديد موضعها بحيث ينتج عنها وعن الشحنة النقطية q بصورة مشتركة جهداً قيمته صفر عند جميع نقاط الكرة . والوضع الهندسي لهذه الحالة موضح في الشكل (3-5) . تقع الشحنة النقطية q على بعد قدره d عن مركز الكرة ، ونصف قطر الكرة a . ويبدو واضحاً من التناظر الهندسي لهذه المسألة أن الشحنة الصورة q' ستقع على الخط المستقيم المار بالشحنة q وبمركز الكرة .



الشكل 3-5 شحنة نقطية q واقعة بجوار كرة موصلة ، ´q تمثل الشحنة الصورة .

وأسهل طريقة للحصول على النتائج المرغوبة هي باستخدام الاحداثيات الكروية ، على ان تكون نقطة الاصل للاحداثيات مركز الكرة نفسها . وليكن الخط الذي يصل q بنقطة الاصل محوراً قطبياً . بقي أن نجد المسافة b وقيمة الشحنة´q بدلالة الكميات المحددة q و d و a . إن الجهد الناشيء عن الشحنتين q و´q عند النقطة P يساوي :

$$U(r, \theta, \phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta}}\right] \tag{3-37}$$

وعلى سطح الكرة يكون : $r = a$ و $U(a, \theta, \phi) = 0$ لجميع قيم θ و ϕ . لكننا نجد من المعادلة (3-37) أنه بوسع الدالة $U(a, \theta, \phi)$ أن تساوي صفراً لجميع قيم θ فقط بشرط ان يتناسب أحد الجذرين التربيعيين مع الآخر تناسباً طردياً . ونحصل على هذه الحالة اذا توفر الشرط : $b = a^2/d$ ، إذ ان :

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta} = \frac{a}{d}\sqrt{d^2 + a^2 - 2ad\cos\theta}.$$

لذا :

$$b = \frac{a^2}{d}, \tag{3-38}$$

كما أن :

$$q' = -\frac{a}{d}q. \tag{3-39}$$

ومن هاتين المعادلتين يمكن تحديد موقع الشحنة الصورة الاولى وتعيين قيمتها .

أما الشحنة الصورة الثانية q'' فيمكن وضعها عند مركز الكرة دون ان يحدث تغيير في طبيعة تساوي الجهد للسطح الكروي . ويمكن ضبط قيمة q'' لكي تنسجم مع شروط الحدود للمسألة المعنية وفيما عدا ذلك يمكن أخذ القيمة بشكل كيفي . وبهذا حصلنا على الحل الكامل لمسألة الشحنة النقطية ـ الكرة الموصلة :

الجهد عند جميع النقاط خارج الكرة يساوي :

$$U(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} + \frac{q''}{r}\right] \tag{3-40}$$

وجهد الموصل الكروي يساوي :

$$U(a, \theta, \phi) = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 a}; \tag{3-41}$$

وكثافة الشحنة السطحية على الكرة تساوي :

$$\sigma(\theta, \phi) = -\epsilon_0 \frac{\partial U}{\partial r}\bigg|_{r=a} \tag{3-42}$$

وجميع خطوط القوة التي نتوقع تقاربها بصورة عمودية نحو الشحنات الصور يقطعها السطح الكروي للموصل . وبهذا فان الشحنة الكلية للكرة تساوي مجموع الشحنات الصور ، وهذا يعني ان :

$$Q = q' + q''. \tag{3-43}$$

ويمكن تحقيق صحة هذه النتيجة بالتكامل المباشر للمعادلة (3-42) .

ومن الحالات الخاصة الجديرة بالاهتمام الكرة المتصلة بالارض اذ ينتج :

$$U(a) = 0, \; q'' = 0;$$

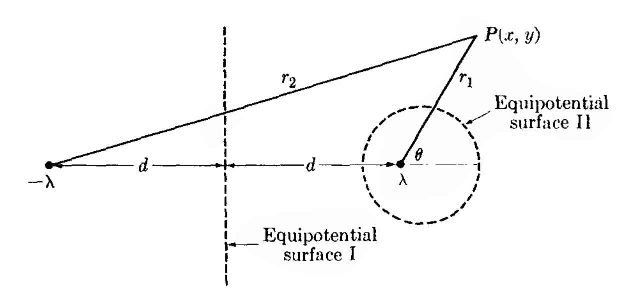
والجسم الكروي غير المشحون إذ ان :

$$q'' = -q'.$$

3-11 الشحنات الخطية والصور الخطية :
Line charges and line images

الى حد الآن بقي أسلوب الصور مقصوراً على المسائل التي تتضمن شحنات نقطية وبالتالي صوراً نقطية . وفي هذا البند سنتناول عدداً من المسائل التي يمكن حلها بواسطة الصور الخطية . لنأخذ خطين متوازيين لا نهائيي الطول من الشحنات الخطية ، بكثافة خطية قدرها λ و$-\lambda$ لوحدة الطول على الترتيب ، كما هو موضح في الشكل (3-6) . ويعطى الجهد الناشيء عن هذه المنظومة عند أية نقطة حسب المعادلة :

$$U = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}[\ln r_1 - \ln r_2] = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2}, \qquad (3\text{-}44)$$



الشكل 3-6

شحنتان خطيتان متوازيتان لا نهائيتا الطول (تمتلكان كثافة خطية قدرها λ و$-\lambda$) ومرسومتان بصورة عمودية على الورقة .

r_1 و r_2 يمثلان البعدين العموديين النازلين من النقطة الى الشحنتين الخطيتين . ويمكن الحصول على سطوح تساوي الجهد بجعل المعادلة (3-44) مساوية لمقدار ثابت . إن التعبير المكافيء لذلك هو

$$\frac{r_1}{r_2} = M, \qquad (3\text{-}45)$$

إذ يشير الحرف M الى مقدار ثابت . وبهذا يمكن تعيين سطوح تساوي الجهد من المعادلة (3-45) .

وسطح تساوي الجهد الذي يتوافق مع الحالة التي يكون فيها $M = 1$ هو مستوٍ واقع في منتصف المسافة الفاصلة بين الشحنتين الخطيتين ، وهو السطح I المؤشر في

الشكل . وجهد هذا المستوي يساوي صفراً . وبهذا نكون قد عالجنا مسألة الشحنة الخطية الطويلة الممتدة بموازاة سطح موصل . والمعادلة (44-3) تعطينا القيمة الصحيحة للجهد في المنطقة التي تمثل نصف الفضاء . دعنا نفرض ان الشحنة الخطية المبينة في الجهة اليمنى من الشكل هي الشحنة المعينة التي تقع على بعد قدره d من المستوي الموصل . وبهذا فإن الشحنة الخطية الكائنة في الجهة اليسرى من الشكل تلعب دور الصورة . وهنا أيضاً نجد ان الشحنة الكلية على المستوي تساوي الشحنة الصورة .

والآن دعنا نجد سطوح تساوي الجهد التي تتوافق مع قيم أخرى للثابت M . ويمكننا الحصول على الهيئة العامة للسطح بالتعبير عن r_1 و r_2 بالاحداثيات المتعامدة . ومن الملائم أن نختار نقطة الاصل لمنظومة الاحداثيات على الشحنة الخطية الموجبة ، وأن نجعل هذه الشحنة تنطبق على محور z ، وبهذا تكون الشحنة الخطية الثانية واقعة عند $x=-2d$ و $y=0$. والآن نجد أن :

$$r_1^2 = x^2 + y^2$$

و

$$r_2^2 = (x + 2d)^2 + y^2,$$

وبعد اجراء بعض التحويرات الجبرية تؤول المعادلة (45-3) الى الآتي :

$$x^2 + y^2 - \frac{4M^2xd}{1 - M^2} = \frac{4M^2d^2}{1 - M^2}. \qquad (3\text{–}46)$$

وهذه معادلة إسطوانة دائرية موازية لمحور z . فإذا كانت قيمة M أقل من واحد ، أحاطت الاسطوانة بالشحنة الخطية الموجبة ، كما يفعل سطح تساوي الجهد II المبين في الشكل . أما محور الاسطوانة فيمر بالنقطة :

$$x = \frac{2M^2d}{1 - M^2}, \qquad y = 0; \qquad (3\text{–}47)$$

ونصف قطر الاسطوانة يساوي :

$$R_c = \frac{2Md}{1 - M^2}. \qquad (3\text{–}48)$$

والآن أصبحنا في وضع يؤهلنا لحل عدد من المسائل الجديرة بالاهتمام والتي تتضمن موصلات اسطوانية ، ومع ذلك سنقصر مناقشتنا على نوع واحد من هذه المسائل . لنأخذ مسألة الاسطوانة الموصلة الطويلة الممتدة بموازاة مستوٍ موصلٍ ،

ونفرض ان الاسطوانة تحمل شحنة قدرها λ لوحدة الطول . ويمكننا الاستفادة من الشكل 6-3 لتوضيح المسألة ، ونفرض أن الموصلين ينطبقان على السطحين المنقطين . وفي هذه الحالة تكون الشحنتان الخطيتان صوراً ، ويكون الجهد في المنطقة المحيطة بالاسطوانة وعلى يمين المستوي ممثلاً بالمعادلة (44-3) . ومن الواضح عندئذٍ ان الشحنة المحتثة على السطح تساوي λ – لوحدة المسافة باتجاه z .

3-12 منظومة الموصلات . معاملات الجهد :

System of conductors. Coefficients potential

ناقشنا في البنود السابقة عدداً من الطرق المهمة للحصول على حلول لمعادلة لابلاس . وقد كانت تلك الطرق ، بشكل عام ، مقصورة من حيث الاعتبارات العملية على المسائل التي تكون فيها الموصلات بأشكال هندسية بسيطة . وعندما تكون أشكال الموصلات معقدة فان الحل الرياضي الكامل يكون بعيد المنال . ومع ذلك فبالامكان استخلاص استنتاجات معينة حول المنظومة ، وذلك يرجع الى سبب واحد هو أن الجهد يحقق معادلة لابلاس . والحقيقة سنبرهن هنا على وجود علاقة خطية بين جهد أحد الموصلات وشحنات الموصلات الاخرى في المنظومة . وتمتاز المعاملات التي تظهر في هذه العلاقة ، وتدعى معاملات الجهد ، بأنها دوال للتشكيل الهندسي ، كما يمكن تعيينها مباشرة من التجربة لانه لا يمكن حسابها في جميع الحالات .

أفرض ان هناك N من الموصلات ذات تشكيل هندسي ثابت ، وان جميع تلك الموصلات غير مشحونة عدا الموصل j الذي يحمل شحنة قيمتها Q_{jo} . وسنشير الى الحل الملائم لمعادلة لابلاس في الفضاء خارج الموصلات بالرمز $U^{j}(x,y,z)$ ، وسنعبر عن جهد كل من تلك الموصلات كالآتي: $U_1^{(j)}, U_2^{(j)}, \ldots, U_j^{(j)}, \ldots, U_n^{(j)}$. والآن دعنا نغير شحنة الموصل j ونكسبه شحنة جديدة قيمتها λQ_{j0} . ولما كانت λ تمثل مقداراً ثابتاً فان الدالة $\lambda U^{(j)}(x,y,z)$ تحقق معادلة لابلاس . وهذا يعني ان هذه الدالة قد حققت شروط حدود جديدة يمكن رؤيتها من خلال المناقشة الآتية . إن الجهد عند جميع النقاط في الفضاء مضروب بالثابت λ ، ولهذا فان جميع مشتقات الجهد (وخاصة الانحدار) ستضرب بـ λ كذلك . كما ان جميع الكثافات الشحنية ستضرب بـ λ أيضاً وذلك لأن $\sigma = \epsilon_0 E_n$. ومن ذلك نستنتج ان شحنة الموصل j هي λQ_{j0} وأن جميع الموصلات الاخرى تبقى غير مشحونة .

ان حل معادلة لابلاس الذي يلائم مجموعة معينة من شروط الحدود يعد حلاً منفرداً . وبهذا نكون قد وجدنا الحل الصحيح وهو $\lambda U^{(j)}(x, y, z)$ لهذه المسألة بعد تحويرها . والاستنتاج المثير للاهتمام والذي يمكن استنباطه من هذه المناقشة هو ان جهد كل موصل يتناسب طردياً مع الشحنة Q_j التي يحملها الموصل j ، أي ان

$$U_i^{(j)} = p_{ij}Q_j, \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{3-49}$$

إذ ان p_{ij} مقدار ثابت يعتمد على التشكيل الهندسي فقط .

وبالامكان تطبيق المناقشة نفسها على الحالة التي يكون فيها الموصل k حاملاً لشحنة قيمتها : $Q_k = \nu Q_{ko}$ ، وجميع الموصلات الاخرى غير مشحونة . هنا يكون الحل الملائم لمعادلة لابلاس هو : $\nu U^{(k)}(x, y, z)$ ، حيث يشير الرمز $U^{(k)}$ الى الحل المرافق لجعل الكمية : $\nu = 1$. وعليه يصبح من الواضح ان :

$$\lambda U^{(j)}(x, y, z) + \nu U^{(k)}(x, y, z) \tag{3-50}$$

يعدُّ حلاً مناسباً للحالة التي يكون فيها الموصلان مشحونين . ومرة أخرى نشير الى كون الحل منفرداً لمجموعة معطاة من شروط الحدود . وعليه يمكن عدّ المعادلة (3-50) بمثابة حل لهذه الحالة ، وأنه يمكن كتابة جهد أي من الموصلات كما يأتي :

$$U_i = p_{ij}Q_j + p_{ik}Q_k, \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{3-51}$$

ويمكن تعميم هذه النتيجة لتشمل الحالة التي تكون فيها جميع الموصلات (وعددها N) مشحونة :

$$U_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}Q_j. \tag{3-52}$$

وهذه هي العلاقة الخطية التي كنا نبحث عنها بين الجهد والشحنة ، إذ أن المعاملات p_{ij} هي معاملات الجهد . وسيتضح في الفصل السادس أن صفيف array هذه المعاملات يكون متناظراً ، وهذا يعني أن .

$$p_{ij} = p_{ji}.$$

3-13 حلول معادلة بويزون Solutions of Poisson's equation.

ناقشنا في البنود السابقة معادلة لابلاس وتعرفنا على كيفية حلها بشيء من التفصيل . بيد أن معادلة لابلاس ملائمة لتلك المسائل الكهروستاتيكية التي تمتاز

بأن تكون الشحنة باجمعها مستقرة على سطوح الموصلات أو متركزة على شكل شحنات نقطية أو خطية . وسنرى في الفصل القادم أنه من الضروري أن تكون الشحنات الطليقة* فقط موزعة بهذه الطريقة . على أنه لو مُلئت المنطقة الكائنة بين الموصلات بواحد أو أكثر من الأوساط العازلة البسيطة ، لوجدنا أن معادلة لابلاس تصح أيضاً في هذه الأوساط .

والآن دعنا نأخذ مسألة كهروستاتيكية بحيث يكون جزءاً من الشحنة (المفترض وجودها) معطى بدلالة $\rho\ (x, y, z)$ ، وهي دالة معروفة ، والجزء الباقي من الشحنة (الشحنة المحتثة) مستقراً على سطوح الموصلات . إن مسألة من هذا النوع تتطلب حلاً لمعادلة بويزون . والحل العام لهذه المسألة يمكن كتابته بشكل تكامل من نوع المعادلة (1-3) على أن يغطي التكامل جميع الشحنة المفترضة زائداً حلاً لمعادلة لابلاس . ويجب أن يتم اختيار حل معادلة لابلاس بحيث يحقق الجهد الكلي جميع شروط الحدود .

وعندما تكون الشحنة بأجمعها معطاة ، أي عندما تكون : $dq = \rho(x, y, z)\, dv$ معروفة لجميع النقاط في الفضاء ، فإنَّ المعادلة (1-3) تمثل الحل الكامل لمعادلة بويزون ، كما يمكن انجاز هذا التكامل (إما تحليلياً أو عددياً) . ومع ذلك توجد حالة واحدة يمكن فيها الحصول على حل معادلة بويزون بأسلوب مباشرٍ مفضلٍ على الحل المتمثل في المعادلة (1-3) . وهذا مايحدث بالفعل عندما تكون كل من الدالتين U, ρ هي دالة لمتغير مستقل واحد . وكمثال على هذه الحالة نأخذ ρ دالة للاحداثي الكروي r فقط ، وندع الشحنة الكلية موزعة بشكل مناظر كروي . عند ذلك تصبح المعادلة (3-5b) :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(r). \qquad (3\text{–}53)$$

وسنفرض أن الشحنة الكلية محددة ، وهذا يعني أن الشحنة لا تمتد الى مالانهاية ، أو ان كثافة الشحنة تهبط الى الصفر عند انصاف الاقطار الكبيرة . عندئذ يمكن اجراء التكامل على المعادلة (3-53) بصورة مباشرة ، بفرض ان الدالة $\rho(r)$ معطاة وأن ثابتي التكامل يمكن تعيينهما من : (1) قانون كاوس للمجال الكهربائي عند نصف قطر معين ، و (2) حقيقة أن U تقترب من الصفر عندما تقترب r من مالانهاية .

* وهي الشحنات التي تمتلك حرية الحركة أو التي يمكن نقلها من جسم لآخر .

المراجع

نوصي بمراجعة الكتب الآتية للحصول على مزيد من الايضاحات حول :

1- مناقشة كاملة لمعادلة لاجندر .

2- الصيغة العامة لمعادلة لابلاس في الاحداثيات المتعامدة والمنحنية .

3- مناقشة كاملة لحل معادلة لابلاس .

H. Margenau and G. M. Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry,* D. Van Nostrand Co., Inc., New York, 1943.

J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory,* McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1941.

W. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism,* Addison-Wesley, 1955.

مسائل

3-1 قشرتان كرويتان موصلتان ، نصفا قطريهما r_a و r_b وضعتا بحيث ينطبق مركز الأولى على مركز الثانية ، ثم شحنتا الى أن أصبح جهداهما U_a و U_b على الترتيب . فإذا كان $r_b > r_a$ ، جد الجهد عند النقاط الواقعة بين القشرتين وعند النقاط الواقعة خارج القشرة الكبيرة $r > r_b$.

3-2 قشرتان اسطوانيتان طويلتان متحدتا المحور نصفا قطريهما r_a و r_b ، شحنتا الى أن أصبح جهداهما U_a و U_b على الترتيب . جد الجهد عند النقاط الكائنة بين القشرتين .

3-3 إذا كان U_1 حلاً لمعادلة لابلاس ، برهن على أن المشتقة الجزئية لـ U_1 بالنسبة الى واحد أو أكثر من الاحداثيات المتعامدة (أي $\partial U_1/\partial x$ و $\partial^2 U_1/\partial x^2$ و $\partial^2 U_1/\partial x \partial y$ و ... الخ) تعد حلاً أيضاً .

3-4 بيّن أن نصف التوافقيات المنطقية تولد من مفاضلة r^{-1} بصورة متعاقبة بالنسبة الى الاحداثي z ($z = r \cos \theta$) .

3-5 جد $\nabla^2 U$ بالاحداثيات الاسطوانية (المعادلة 8-3) من صيغة الاحداثيات المتعامدة بالتعويض المباشر مستخدماً : $x = r\cos \theta$ و $y = r \sin\theta$.

3-6 جد جهد رباعي قطب محوري (يتكون من شحنات نقطية $q, -2q, q$ موضوعة على محور z عند المسافات $l, 0, -l$ عن نقطة الأصل . ثم جد الجهد عند المسافات $r \gg l$ فقط ، وبين أن هذا الجهد يتناسب طردياً مع إحدى التوافقيات المنطقية .

3-7 كرة موصلة نصف قطرها a تحمل شحنة كلية قيمتها Q ، وضعت في مجال كهربائي E_0 . جد الجهد عند جميع النقاط خارج الكرة .

3-8 موصل اسطواني طويل غير مشحون نصف قطره a ، وضع في مجال كهربائي منتظم E_0 بحيث كان اتجاه المجال عمودياً على محور الاسطوانة . جد الجهد عند جميع النقاط خارج الاسطوانة ، ثم جد كثافة الشحنة المحتثة على السطح الاسطواني .

3-9 * أثبت أن الدالة :

$$\operatorname{Im} A[(x + jy)]^{1/2} = A r^{1/2} \sin \tfrac{1}{2}\theta$$

تحقق معادلة لابلاس ، بيد أن المجال الكهربائي المشتق من هذه الدالة يحدثُ فيه انقطاع عند : $\theta = 0$. (لاحظ أن r و θ هما إحداثيان اسطوانيان هنا) . الدالة

---

* المسائل المؤشرة بعلامة النجمة هي أكثر صعوبة من غيرها من المسائل .

يمكن استعمالها لوصف الجهد عند حافة مستوٍ موصلٍ مشحون . رالمستوي الموصل ينطبق على المستوي xz عند القيم الموجبة من x فقط . جد كثافة الشحنة على المستوي . ارسم مخططاً يبين عدداً من سطوح تساوي الجهد وعدداً من خطوط القوة .

3-10 شحنة نقطية q موضوعة على بعد قدره d من مستوي موصل متصل بالأرض ويمتد الى مالانهاية . جد الشحنة الكلية المحتثة على المستوي بأسلوب التكامل المباشر لكثافة الشحنة السطحية .

3-11 شحنتان نقطيتان q_1 و q_2 موضوعتان بالقرب من مستوي موصل لا نهائي الأبعاد . جد الشحنات الصور اللازمة لجعل المستوي سطحاً ذا جهد ثابت . وهل يمكنك ، بالاستناد إلى هذه النتيجة التي حصلت عليها تواً ، أن تتنبأ عن توزيع الشحنة الصورة اللازمة في حالة وجود جسم ذي شكل كيفي وكثافة حجمية قيمتها ρ موضوع بالقرب من مستوٍ لا نهائي المساحة ؟

3-12 جد القوة بين شحنة نقطية q وكرة موصلة غير مشحونة نصف قطرها a ، علماً بأن الشحنة النقطية تقع على مسافة قدرها r عن مركز الكرة ، حيث

$$r > a$$

3-13 بين أنه بالإمكان حل مسألة الكرة الموصلة غير المشحونة الموضوعة في مجال كهربائي منتظم أصلاً (E_0) بطريقة الصور . [ملاحظة : إن المجال الكهربائي في المنطقة المجاورة لنقطة الأصل يمكن عدّه مقارباً للمجال الناشيء عن شحنتين نقطتين Q و $-Q$ موضوعتين على محور z عند النقطتين $z = -L$ و $z = +L$ على الترتيب . المجال يصبح أكثر إنتظاماً عند إقتراب L من مالانهاية . ومن الواضح أن : $Q/2\pi\epsilon_0 L^2 = E_0$]

3-14 شحنة نقطية q موضوعة داخل قشرة كروية موصلة نصف قطرها a وعلى بعد قدره r عن مركز القشرة . بين أنه بالإمكان حل هذه المسألة بأسلوب الصور ، وجد كثافة الشحنة σ المحتثة على السطح الداخلي للقشرة . (إن جهد القشرة الكروية لا يمكن تحديده بالكامل بدلالة الشحنة q وصورتها ، والسبب في ذلك هو مساهمة الشحنات المثبتة في المنطقة الخارجية للقشرة في نشوء الجهد . ومع ذلك فإن كل ماستفعله هذه الشحنات الخارجية هو إضافة حد ثابت الى معادلة الجهد) . جد الشحنة الكلية المحتثة على السطح الداخلي للقشرة (أ) بمناقشة فيزيائية و (ب) بتكامل σ على السطح .

3-15 اسطوانة موصلة طويلة تحمل شحنة قيمتها λ لوحدة الطول موضوعة بصورة موازية للوح موصل لا نهائي متصل بالارض . ومحور الاسطوانة يبعد x_0 عن

المستوي ، ونصف قطر الاسطوانة a . جد موقع الصورة الخط وجد الثابت M (الذي يحدد جهد الاسطوانة) بدلالة x_0 و a .

3-16 توزيع كروي من الشحنة مميز بكثافته الحجمية ρ الثابتة لانصاف الأقطار $r \leq R$. وعند انصاف الاقطار التي تبلغ قيمها أكبر من R فإن الكثافة الحجمية تساوي صفراً . جد دالة الجهد $U(r)$ بتكامل معادلة بويزون . تحقق من صحة هذه النتيجة بحساب تكامل المعادلة (3-1) . [ملاحظة : لإنجاز التكامل قسم الشحنة الكروية الى قشرات كروية متحدة المركز سمك كل منها dr] .

3-17 ثنائي قطب موضوع بصورة عمودية على مستوي موصل لا نهائي على مسافة قيمتها d عنه . المستوي متصل بالارض (وهذا يعني أن جهده يساوي صفراً) . أحسب القوة التي يؤثر بها ثنائي القطب على المستوي .

3-18 عاصفة رعدية تحتوي على شحنة قيمتها $+Q$ على ارتفاع h_1 عن سطح الارض وعلى شحنة أخرى تحت تلك الشحنة قيمتها $-Q$ وارتفاعها h_2 . جد تعبيراً رياضياً للمركبة العمودية للمجال الكهربائي E_v على سطح الارض وعلى بعد d من العاصفة . واذا علم أن $h_1 = 5000\,m$ و $Q = 15\,coul$ ، ارسم مخططاً بيانياً موضحاً كيف تتغير E_v بين المسافتين $d = 0$ و $d = 20\,km$.

الفصل الرابع

المجال الكهروستاتيكي في الأوساط العازلة
THE ELECTROSTATIC FIELD IN DIELECTRIC MEDLA

الى حد الآن أهملنا المسائل التي تتضمن أوساطاً عازلة ، واكتفينا بمعالجة الحالات التي يكون فيها المجال الكهربائي ناتجاً بصورة تامة عن الشحنات الطليقة فقط (إما أن تكون بشكل توزيع شحني معين أو أن تكون على شكل شحنة طليقة على سطح الموصلات) . والآن سنقوم بدراسة تلك الحالات الأكثر شيوعاً .

المادة العازلة المثالية هي تلك المادة التي لا تمتلك شحنات طليقة . وعلى الرغم من ذلك فإن جميع الأوساط المادية تتركب من جزيئات ، وهذه بدورها تتركب من جسيمات مشحونة (نوى الذرات والالكترونات) . كما أن جزيئات المادة العازلة تتأثر بالتأكيد بوجود المجال الكهربائي ، ذلك أن المجال يسلط قوة على كل جسيم مشحون . الجسيمات الموجبة تندفع باتجاه المجال الكهربائي والجسيمات السالبة تندفع بالاتجاه المعاكس ، مما يؤدي الى إزاحة الجزأين الموجب والسالب للجزيئة عن موضع الاتزان باتجاهين متعاكسين . ومع هذا فإن مقدار هذه الإزاحة محدد (باجزاء كسرية صغيرة من قطر الجزيئة) بقوى مرجعة قوية تنشأ عن تغير شكل الشحنة داخل الجزيئة . ويمكن ببساطة رؤية التأثير الاجمالي الناتج ، حسب وجهة النظر العينية ، وكأنه إزاحة كل الشحنة الموجبة للعازل عن شحنته السالبة . وعند ذلك يقال عن العازل بأنه أصبح مستقطباً .

وعلى الرغم من أن العازل المستقطب يعدُّ متعادلاً كهربائياً بالمتوسط ، إلا انه يولد مجالاً كهربائياً عند النقاط الخارجية وفي داخل العازل على حد سواء . ونتيجة

لذلك أصبحنا نواجه وضعاً حرجاً كما يبدو : استقطاب العازل يعتمد على المجال الكهربائي الكلي داخل الوسط ، ولكن جزءاً من المجال الكهربائي ينشأ عن العازل نفسه . وفضلاً عن ذلك فإنَّ المجال الكهربائي البعيد للعازل قد يغير من توزيع الشحنات الطليقة على الأجسام الموصلة ، وهذه بدورها ستغير بالتاكيد المجال الكهربائي داخل العازل . والهدف الرئيس من هذا الفصل هو تطوير طرق عامة لمعالجة هذا الوضع المثير .

4-1 الاستقطاب **Polarization.**

خذ عنصراً حجمياً صغيراً Δv من وسط عازل متعادل كهربائياً . فاذا كان الوسط مستقطباً ، لنتج عن ذلك فاصل بين الشحنات الموجبة والسالبة ، ولأمكن وصف العنصر الحجمي بعزم ثنائي قطب كهربائي قيمته :

$$\Delta \mathbf{p} = \int_{\Delta v} \mathbf{r}\, dq. \tag{4-1}$$

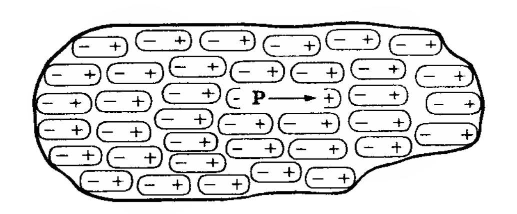
وحسبما جاء في البند (9-2) فإنَّ هذه الكمية تحدد المجال الكهربائي النأشيء عن العنصر Δv عند النقاط البعيدة (أي عند المسافات التي تعد كبيرة بالمقارنة مع أبعاد عنصر الحجم) .

ولما كانت الكمية $\Delta \mathbf{p}$ تعتمد على حجم العنصر ، فانه من الافضل ان يكون التعامل مع $\mathbf{P}$ ، وهو عزم ثنائي القطب لوحدة الحجم :

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta v}. \tag{4-2}$$

وبتعبير أدق يجب تعريف $\mathbf{P}$ على انها غاية هذه الكمية عندما يصبح حجم العنصر صغيراً جداً حسب وجهة النظر العينية . وعلى هذا الاساس تصبح $\mathbf{P}$ دالة نقطية هي $\mathbf{P}(x, y, z)$. وهذه الكمية تدعى الاستقطاب الكهربائي ، أو باختصار الاستقطاب ، للوسط المادي . ووحدتها تنتج من قسمة وحدة الشحنة على وحدة المساحة ، أي كولوم لكل متر مربع (coul/ m^2) وفق النظام المتري .

ومن الواضح ان $\mathbf{P}(x, y, z)$ هي كمية متجهة ذات اتجاه ينطبق على اتجاه $\Delta \mathbf{p}$ للعنصر الحجمي . وهذا بدوره يكون بنفس اتجاه ازاحة الشحنة الموجبة عن الشحنة السالبة (لاحظ الشكل 1-4) .



الشكل 1-4
قطعة من مادة عازلة مستقطبة . كل عنصر حجمي يعدُّ بمثابة ثنائي قطب p

وعلى الرغم من أننا فرضنا ان حجم العنصر Δv صغير جداً من وجهة النظر العينية ، فانه يحتوي على جزيئات عديدة . وقد يكون مرغوباً في بعض الاحيان ان نتكلم عن عزم ثنائي القطب الكهربائي لجزيئة واحدة ، وهذا يعني أن :

$$\mathbf{p}_m = \int_{\text{molecule}} \mathbf{r}\, dq, \tag{4-3}$$

باعتبار ان الجزيئة هي احدى المكونات الصغيرة المتعادلة كهربائياً للمادة العازلة . ومن الواضح عندئذٍ من المعادلة (1-4) أن عزم ثنائي القطب للعنصر الحجمي Δv يمكن التعبير عنه بالعلاقة

$$\Delta \mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_m,$$

اذ يمتد الجمع ليغطي جميع الجزيئات داخل العنصر Δv . لذا :

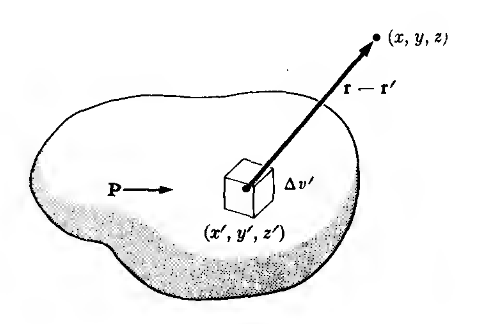
$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta v} \sum_m \mathbf{p}_m. \tag{4-4}$$

وسنذكر المزيد عن هذا الاسلوب في الفصل الخامس .
وعلى الرغم من أن كل عنصر حجمي من العازل المستقطب المبين في الشكل (1-4) يمثل ثنائي قطب صغير ، فانه من المفيد ان نعبر عن العازل بدلالة جزيئاته ، وان نتخيل ان كل ثنائي قطب في الشكل (1-4) يمثل جزيئة منفردة .

2-4 المجال الخارجي لوسط عازل :
External field of a dielectric medium

لناخذ الان قطعة محدودة من مادة عازلة مستقطبة ، ونفرض انها تتسم بصورة مميزة بمتجه الاستقطاب $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$ عند كل نقطة ممثلة بالمتجه $\mathbf{r}'$. ان الاستقطاب يؤدي

الى نشوء مجال كهربائي ، ومشكلتنا هي حساب هذا المجال عند النقطة **r** التي تقع خارج الجسم العازل (أنظر الى الشكل 2-4) . وكما فعلنا في الفصل الثاني ، فانه من الافضل ان نحسب أولاً الجهد U(r) ، ومن ثم نجد المجال الكهربائي بأخذ انحدار الجهد باشارة سالبة .



الشكل 2-4
المجال الكهربائي عند النقطة (x, y, z) يمكن حسابه من جمع مساهمات جميع العناصر الحجمية $\Delta v'$ الكائنة داخل V_0. S_0 يرمز للسطح الذي يحيط بالحجم V_0 .

يميز كل عنصر حجمي $\Delta v'$ من الوسط العازل بقيمة عزم ثنائي القطب $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{P}\,\Delta v'$. ولما كانت المسافة بين النقطة (x, y, z) و Δv كبيرة بالمقارنة مع أبعاد هذا العنصر الحجمي ، فان هذه القيمة لعزم ثنائي القطب ستحدد كلياً مساهمة جميع العناصر في بناء الجهد U(r) :

$$\Delta U(\mathbf{r}) = \frac{\Delta \mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')\,\Delta v'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \tag{4-5}$$

الكمية $r - r'$ تمثل متجهاً ، اتجاهه منبثق من $\Delta v'$ نحو الخارج ، ومقداره يساوي

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}. \tag{4-6}$$

عندئذٍ يمكننا ان نحصل على الجهد الكلي عند النقطة r بجمع مساهمات جميع أجزاء العازل :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')\,dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \tag{4-7}$$

ويمكن حساب الجهد بصورة مباشرة من هذه المعادلة اذا كانت صيغة دالة الاستقطاب معلومة . ومع ذلك فمن المفيد ان نعبر عن المعادلة (4-7) بشكل مختلف نوعاً ما وذلك باجراء بعض التحويلات الرياضية .

واذا كانت الكمية $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ معطاة حسب العلاقة (4-6) لنتج :

$$\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = +\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \qquad (4\text{-}8)$$

كما يمكن الحصول على هذه النتيجة بالتطبيق المباشر للانحدار بالاحداثيات الديكارتية . إن العامل ∇' يتضمن مشتقات بالنسبة للاحداثيات المؤشرة بعلامة الفتحة . وفي ظروف معينة قد نرغب في انجاز عملية الانحدار بالنسبة للاحداثيات غير المؤشرة بعلامة الفتحة ، وعند ذلك نستعمل الرمز الاعتيادي لهذه العملية بدون فتحة ، أي ∇ . ومن الواضح انه اذا أثر العامل ∇' على الدالة $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ فان النتيجة ستكون مساوية لتأثير العامل $-\nabla$ على الدالة نفسها . وسيتطلب الامر فيما بعد استخدام العامل ∇ للحصول على المجال الكهربائي عند نقطة $\mathbf{r}$. وعلى أية حال فان انجاز عملية التكامل للعلاقة (4-7) على حجم العازل V_0 يتطلب تثبيت النقطة $\mathbf{r}$. ولهذا ينبغي تحويل الكمية المراد تكاملها في المعادلة (4-7) باستخدام العلاقة (4-8) فنحصل على :

$$\frac{\mathbf{P}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \mathbf{P}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right). \qquad (4\text{-}9)$$

كما يمكن اجراء تحويل آخر على هذه المعادلة بواسطة المتطابقة (I-6) المدرجة في الجدول (1-1) :

$$\text{div}'(f\mathbf{A}) = f\,\text{div}'\,\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla' f, \qquad (4\text{-}10)$$

إذ يمثل الحرف f دالة نقطية لا إتجاهية ، أما $\mathbf{A}$ فيمثل دالة نقطية إتجاهية كيفية . وهنا أيضاً نجد أن إشارة الفتحة تعني أن عملية التفاضل تؤخذ بالنسبة للاحداثيات المؤشرة بهذه العلامة . لنفرض الآن أن :

$$f = (1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$$

و

$$\mathbf{A} = \mathbf{P},$$

وبهذا تؤول العلاقة (4–9) الى الآتي :

$$\frac{\mathbf{P}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \mathrm{div}'\left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{div}'\,\mathbf{P}. \qquad (4\text{–}11)$$

وأخيراً يصبح بالامكان كتابة الجهد المعطى وفق المعادلة (4–7) كما يأتي :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_{S_0}\frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}\,da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V_0}\frac{(-\mathrm{div}'\,\mathbf{P})\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad (4\text{–}12)$$

حيث استبدل التكامل الحجمي للكمية $\mathrm{div}'(\mathbf{P}/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ بتكامل سطحي باستخدام نظرية التباعد . كما أن **n** ترمز بطبيعة الحال الى العمود المقام على عنصر السطح da بالاتجاه الخارجي (اي خارج العازل) .

إن الكميتين **P. n** و **divP** – اللتين تظهران في المعادلة (4–12) هما دالتان لا إتجاهيتان مستمدتان من متجه الاستقطاب **P** . وقد يكون من الملائم أن نعطي هاتين الكميتين رمزاً خاصاً لكل منها . وبما أن هاتين الكميتين تمتلكان أبعاد الشحنة لوحدة المساحة والشحنة لوحدة الحجم على الترتيب ، فإنه بالإمكان كتابتها كالآتي :

$$\sigma_P \equiv \mathbf{P}\cdot\mathbf{n} = P_n, \qquad (4\text{–}13)$$

و

$$\rho_P \equiv -\mathrm{div}\,\mathbf{P}, \qquad (4\text{–}14)$$

إذ يطلق على الرمزين σ_P و ρ_P اسم كثافة شحنة الاستقطاب (أو الشحنة المقيدة) السطحية والحجمية على الترتيب . ويستخدم اسم الشحنة المقيدة للتعبير عن حقيقة أن هذه الشحنة ليست حرة الحركة ولايمكن إنتزاعها من مادة العازل . والكثافة السطحية للشحنة المقيدة تعطى بدلالة مركبة الاستقطاب العمودية على السطح . أما الكثافة الحجمية للشحنة المقيدة فتعدُّ بمثابة قياس لعدم إنتظام الاستقطاب داخل المادة العازلة .

ويمكننا الآن كتابة الجهد الناتج عن مادة العازل بطريقة توضح أنه ناشيء عن توزيع شحني كالآتي :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\oint_{S_0}\frac{\sigma_P\,da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \int_{V_0}\frac{\rho_P\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right],$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq'_P}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad (4\text{–}15)$$

وهذا يعني ان مادة العازل قد استبدلت بتوزيع شحني مقيد مكافيء .

وعلى الرغم من اننا استخرجنا المعادلة (4-15) بواسطة التحويل الرياضي ، فإنه ينبغي أن يكون فهم σ_P و ρ_P مبنياً على أسس فيزيائية خالصة . فوجود الكثافة السطحية للشحنة واضع من الشكل (4-1) حيث يتبين أن هذه الشحنة ناشئة عن تراصف ثنائيات الاقطاب المتشابهة . ولهذا تظهر الشحنة السطحية المقيدة على جميع سطوح العازل التي لا تكون موازية لمتجه الاستقطاب . لنلتفت الآن الى الكثافة الحجمية للشحنة المقيدة ρ_P ، سنجد انه من المتوقع ان تمثل الكمية $\rho_P \, \Delta v'$ الشحنة الفائضة التي يحتويها العنصر الحجمي $\Delta v'$. فإذا كانت تلك هي حقيقة الوضع أمكن توضيحها بالشكل الآتي : دعنا نفرض أن ρ^+ و ρ^- تمثلان الشحنة الكلية الموجبة لوحدة الحجم والشحنة الكلية السالبة لوحدة الحجم على الترتيب . وهذا يعني ان ρ^+ تمثل جميع النوى الذرية في وحدة الحجم من العازل . وبالمثل فإن ρ^- تمثل جميع الالكترونات . وعندما يكون العازل غير مستقطب فإنَّ كل عنصر حجمي من العازل يعد كهربائياً متعادلاً ، لذا :

$$\rho_0^+(x', y', z') + \rho_0^-(x', y', z') = 0, \tag{4-16}$$

إذ تشير العلامة السفلية 0 الى كثافة الشحنة الحجمية عندما يكون العازل غير مستقطب .دعنا نفترض أن الشحنة الموجبة تزاح بمقدار $\boldsymbol{\delta}^+ (x, y, z)$ وأن الشحنة السالبة تزاح بمقدار $\boldsymbol{\delta}^-(x, y, x)$ بسبب حدوث الاستقطاب في العازل . وعليه فإن الشحنة الموجبة التي تعبر عنصر المساحة da' تساوي $\rho_0^+ \boldsymbol{\delta}^+ \cdot \mathbf{n}\, da'$، وبهذا يكون الربح في الشحنة الموجبة خلال عملية الاستقطاب للعنصر الحجمي $\Delta v'$ مساوياً :

$$-\oint_{\Delta S} \rho_0^+ \boldsymbol{\delta}^+ \cdot \mathbf{n}\, da', \tag{4-17}$$

إذ تعبر ΔS عن السطح المحيط بالعنصر الحجمي $\Delta v'$. وبالمثل فإنَّ ازاحة الشحنة السالبة تؤدي الى زيادة الشحنة (أي نقصان الشحنة السالبة) في العنصر الحجمي بكمية مقدارها .

$$\oint_{\Delta S} (-\rho_0^-) \boldsymbol{\delta}^- \cdot \mathbf{n}\, da. \tag{4-18}$$

إن الربح الكلي في الشحنة التي يحصل عليها العنصر الحجمي $\Delta v'$ يساوي حاصل جمع (4-17) و (4-18) ، ويمكن التعبير عنه كالآتي :

$$-\oint_{\Delta S} \rho_0^+ (\boldsymbol{\delta}^+ - \boldsymbol{\delta}^-) \cdot \mathbf{n}\, da' = -\text{div}\, [\rho_0^+ (\boldsymbol{\delta}^+ - \boldsymbol{\delta}^-)]\, \Delta v'. \tag{4-19}$$

لكن الكمية $\delta^- - \delta^+$ تساوي بالضبط الازاحة النسبية بين كثافتي الشحنة الموجبة والسالبة ، ولهذا فإنَّ $\rho_0^+ (\delta^+ - \delta^-)$ تكافيء ماسبق أن سميناه الاستقطاب $\mathbf{P}$. ولهذا نجد أن الكمية $\rho_P \Delta v'$ تساوي الشحنة الكلية في عنصر حجمي من عازل مستقطب .

قد يبدو غريباً للوهلة الأولى أن نبدأ بعناصر حجمية من مادة عازلة متعادلة كهربائياً لننتهي بعناصر حجمية تحمل محصلة من الشحنات الكهربائية . حسب وجهة نظرنا الأصلية يتركب العازل من ثنائيات اقطاب أولية $\Delta \mathbf{p}$ ، وان كل ثنائي قطب يعدُّ متعادلاً كهربائياً في الأساس لكي تعطي المعادلة (5-4) الجهد بصورة صحيحة . والآن نجد أنه مادامت الكمية $\mathbf{divP}$ غير متلاشية ، فإن العناصر الحجمية تظهر بصورة منفردة على أنها تحمل شحنة . إن أصل هذا التناقص الظاهري ، كما يبدو للوهلة الأولى ، يكمن في التحويل الرياضي المعبر عنه في العلاقة (11-4) ، حيث تحول مساهمة كل عنصر حجمي في تكوين الجهد الى تعبير حجمي مختلف وآخر سطحي. فعلى الرغم من بقاء الشحنة الكلية داخل حجم كل عنصر وعلى سطحه صفراً ، فإننا نجد أنه عندما نأخذ العناصر الحجمية مجتمعة لتشكيل قطعة عينية من مادة عازلة فإن مساهمات "السطوح الداخلية" المختلفة في بناء الجهد تمحو إحداها الأخرى . والشيء الفعال الذي يبقى لدينا هو عناصر حجمية مشحونة وسطح خارجي مشحون .

إن شحنة الاستقطاب الكلية لجسم عازل وقدرها :

$$Q_P = \int_{V_0} (-\mathrm{div}' \, \mathbf{P}) \, dv' + \oint_{S_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, da', \qquad (4\text{-}20)$$

يجب أن تساوي صفراً ، طالما كانت فرضيتنا التي تنص على أن العازل ككل متعادل كهربائياً قائمة . وهذه النتيجة تبدو بديهية اذا لاحظنا هيئة المعادلة (20-4) ، اذ تتلاشى هذه المعادلة في الحال عند تطبيق نظرية التباعد .

والآن توفر لدينا تعبير ان متميزان للجهد الكهروستاتيكي $U(\mathbf{r})$ الناشيء عن عينة مستقطبة من مادة عازلة ، هما (7 ـ 4) و (15 ـ 4) . كلا التعبيرين صحيح ، إلاَّ أننا سنجد أن التعبير الآخير هو التعبير الملائم لمعظم الحالات . أما المجال الكهربائي فيمكن الحصول عليه من أخذ الانحدار السالب للمعادلة (15-4) . ولما كان U دالة للاحداثيات (x, y, z) ، فإن الانحدار الملائم هو $-\nabla$. إن الاحداثيات غير المؤشرة بعلامة الفتحة (′) تظهر في الدآلة $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ فقط . وبملاحظة أن :

$$\nabla(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -\nabla'(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$$

وباستخدام العلاقة (8-4) نحصل على :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_{S_0} \frac{\sigma_P(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \int_{V_0} \frac{\rho_P(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\right]. \quad (4\text{-}21)$$

4-3 المجال الكهربائي داخل عازل The electric field inside a dielectric

قبل إيجاد تعبير رياضي للمجال الكهربائي داخل وسط عازل مستقطب علينا أن نعرف هذا بدقة . ومايهمنا بطبيعة الحال هو المجال الكهربائي العيني ، ونعني به متوسط المجال الكهربائي داخل منطقة صغيرة من العازل والتي تحتوي على عدد كبير من الجزئيات على الرغم من صغرها . والأسلوب المفضل هو أن نعرف المجال الكهربائي مباشرة بدلالة تجربة عينية : المجال الكهربائي (العيني) هو القوة لوحدة الشحنة المؤثرة على شحنة إختبارية مغمورة في العازل بشرط أن تكون الشحنة الاختبارية على درجة كبيرة من الصغر بحيث لاتؤثر على التوزيع الشحني . وحسب جهة النظر العينية يجب أن تكون أبعاد الشحنة الاختبارية صغيرة (ولهذا سندعوها شحنة نقطية) ، على حين تكون كبيرة بالمقارنة مع حجم الجزيئة .

وعلى الرغم من هذا النص المذكور في أعلاه يعد تعريفاً أساسياً للمجال الكهربائي العيني **E** ، فإنه من الصعب استخدام هذا التعريف بصورة مباشرة للحصول على تعبير رياضي للمجال ، وذلك لأنه ينبغي أن نحسب القوة المؤثرة على جسم مشحون ذي حجم محدد ومن ثم نجد الغاية عندما يقترب الحجم من الصفر . ولهذا نرى أنه من الملائم أن نستخدم خاصية أخرى للمجال الكهربائي لكي تساعدنا للحصول تحليلياً على التعبير المنشود . وبهذه الطريقة سنحصل على **E** بدلالة شحنات الاستقطاب المتولدة في الوسط العازل . وسنرى بعدئذٍ في البند (10-4) أن الكمية التي دعوناها **E** هي بالتأكيد متفقة مع التعريف الأساس للمجال بدلالة القوة .

إن المجال الكهروستاتيكي في العازل يجب ان يمتلك الخواص الاساسية نفسها للمجال في حالة الفراغ . وبصورة خاصة فان **E** يعد مجالاً محافظاً conservative ولهذا يمكن اشتقاقه من جهد لامتجه . لذا :

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = 0$$

وهذا يعني أن :

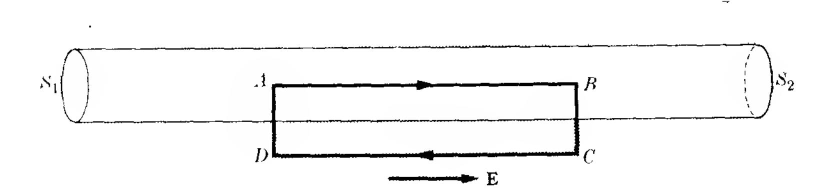
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

ودعنا نطبق هذه المعادلة الأخيرة على المسار ABCD المبين في الشكل 3-4 ، حيث يقع الجزء AB داخل فجوة على شكل إبرة استقطعت من العازل ، أما الجزء CD فيقع داخل مادة العازل . ولما كان بوسعنا ان نختار طول كل من الجزئين BC, AD صغيراً ، فان التكامل الخطي على هذا المسار المغلق سيؤول الى الآتي :

$$\mathbf{E}_v \cdot 1 - \mathbf{E}_d \cdot 1 = 0$$

أي أن :

$$E_{vt} = E_{dt}, \qquad (4\text{–}22)$$



الشكل 3-4 يقع جزء من المسار المغلق ABCD داخل الفجوة التي لها شكل الإبرة وجزء آخر داخل العازل. في المواد العازلة متساوية الاتجاه (انظر الى البند 5-4) يكون إتجاه الاستقطاب P منطبقاً على إتجاه E ، ولهذا تكون $\sigma_P = 0$ على السطح الاسطواني حسب إتجاه الابرة المبين في الشكل . أما أذا كان العازل غير متساوي الاتجاه ، فمن غير الضروري ان تكون σ_P صفراً . ومع ذلك فان قيمتها لاتؤثر على المركبة الطولية للمجال الكهربائي داخل الفجوة .

إذ يشير الرمزان السفليان d, v الى الفراغ والعازل على الترتيب ، والرمز السفلي t يعبر عن الكمية المماسة .

والمعادلة (22-4) تصح لكل الاتجاهات التي يمكن أن تأخذها تلك الفجوة . فاذا كان اتجاه الابرة باتجاه المجال E ، لأصبحت $E_{dt} = E_d$ ، كما يتضح من التناظر أن المجال داخل الفجوة يكون باتجاه الابرة ، وهذا يعني أن $E_{vt} = E_v$. وبهذا نحصل على الاستنتاج* المهم الآتي :

* يعد هذا النص صحيحاً في حالة العوازل متساوية الاتجاه فقط (لاحظ البند 5-4) . أما في حالة العوازل غير متساوية الاتجاه فان التناظر لايكون موجوداً . وعند ذلك يجب تعميم الاستنتاج بحيث يصبح كالآتي : المجال الكهربائي داخل العازل يساوي المركبة الطولية للمجال داخل الفجوة بشرط أن يكون محور الفجوة موازياً لاتجاه المجال الكهربائي داخل العازل .

يكون المجال الكهربائي داخل عازل مساوياً المجال الكهربائي داخل فجوة على شكل إبرة في العازل بشرط ان يكون محور الفجوة موازيا لاتجاه المجال الكهربائي .

من الواضح ان مشكلة حساب المجال الكهربائي داخل عازل قد تحولت الى حساب المجال الكهربائي داخل فجوة في العازل على شكل إبرة . بيد أن المجال الكهربائي داخل الفجوة هو في واقع الحال مجال خارجي ، ولهذا يمكن تعيينه وفق النتائج التي حصلنا عليها في البند 2-4 . وتماماً كما في البند 2-4 ، هنا أيضاً نفرض ان إستقطاب العازل هو دالة معطاة $\mathbf{P}(x, y, z)$ ، ومن ثم نحسب الجهد والمجال الكهربائي الناشيء عن هذا الاستقطاب . وباخذ نقطة المجال $\mathbf{r}$ عند مركز الفجوة ، وباستعمال المعادلة (15-4) ، يمكن إيجاد الدالة الآتية للجهد :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V_0-V_1} \frac{\rho_P(x', y', z')\, dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S_0+S'} \frac{\sigma_P(x', y', z')\, da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \qquad (4\text{-}23)$$

اذ أن V_0-V_1 تمثل الحجم الكلي للعازل عدا حجم الابرة ، و S_0 السطح الخارجي للعازل ، أما $S'=S_1+S_2+S_c$ فتمثل سطوح الابرة . لكننا لاحظنا من الشكل (3-4) أن $\sigma_P = 0$ على السطح الاسطواني S_c للابرة ، كما يمكن كذلك جعل الابرة رقيقة الى درجة بحيث يمكن إهمال مساحة السطحين S_1 و S_2 . وعلى هذا الأساس فان السطح الخارجي للعازل هو الوحيد الذي يساهم في تكوين الجهد . وبهذا يصبح التكامل السطحي في المعادلة (23-4) مماثلاً لصيغة التكامل السطحي المعطى في المعادلة (15-4) . والتكامل الحجمي في المعادلة (23-4) يستثني حجم الفجوة . وعلى أية حال فإنَّ مساهمة الفجوة لهذا التكامل يمكن إهمالها كما هو واضح . إن كثافة الشحنة ρ_P مقيدة . كما أن الكمية $dv'/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ لا تتباعد عند نقطة المجال (أي عند النقطة $\mathbf{r}'=\mathbf{r}$) لأن حجم النقطة يُعدُّ صفراً ذا رتبة أعلى من غاية $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ ، وأخيراً يمكن جعل حجم الإبرة (V_1) صغيراً وذلك بجعل الفجوة رقيقة . ولهذا لم تعد هناك حاجة لاستثناء الحجم V_1 . حيث تصبح المعادلة (23-4) مشابهة لصيغة المعادلة (15-4) . وبعبارة اخرى فإنَّ المعادلة (15-4) تعطي الجهد $U(\mathbf{r})$ سواءً أكانت النقطة $\mathbf{r}$ واقعة داخل العازل أم خارجه .

ويمكن حساب المجال الكهربائي $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ باعتباره مساويا لانحدار المعادلة (23-4) باشارة سالبة . بيد أن هذه النتيجة لا تختلف عن المعادلة (21-4) إلا بقدر ضئيل يمكن إهماله . وبهذا نجد أن المعادلة (21-4) تعبر عن مساهمة الوسط العازل في

تكوين المجال الكهربائي عند نقطة **r** بصورة مستقلة عما اذا كانت **r** داخل العازل أو خارجه .

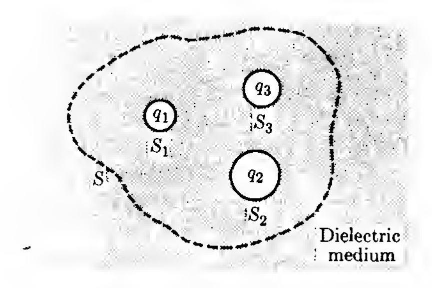
ويمكن انجاز الحسابات المتعلقة بالمعادلتين (15-4) و (21-4) بصورة مباشرة للحالات التي يكون فيها الاستقطاب $\mathbf{P}(x, y, z)$ دالة معلومة للموضع . (وهناك عدد من الأمثلة من هذا النوع موجود ضمن المسائل المعطاة في نهاية الفصل) . لكنه في معظم الحالات ينشأ الاستقطاب نتيجة لتسليط مجال كهربائي على الوسط العازل [وهذا يعني أن $\mathbf{P}(x', y', z')$ هو دالة للمجال الكهربائي الكلي $\mathbf{E}(x', y', z')$] ، عند ذلك تكون الأمور معقدة كثيراً تحت هذه الظروف . فقبل كل شيء ينبغي معرفة صيغة الدالة $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ ، لكنه في اكثر الحالات تكون هذه الدالة معلومة تجريبياً ، ولهذا لاتكون هذه النقطة مصدراً للصعوبة والتعقيد . غير أن التعقيدات الحقيقية تنشأ بسبب إعتماد **P** على المجال الكهربائي الكلي متضمناً المساهمة الناتجة عن العازل نفسه في القيمة الكلية للمجال ، وهذا القدر من المساهمة هو الذي ينبغي حسابه . وبهذا لانستطيع تعيين **P** لأننا لانعرف **E** ، والعكس بالعكس يذكر .

من الواضح إذن أن الحاجة تدعو الى ايجاد أسلوب مختلف للمسألة ، وهذا ماسنعالجه في البنود القادمة .

4-4 قانون كاوس لوسط عازل . الازاحة الكهربائية :
Gauss' law in a dielectric. The electric displacement

في الفصل الثاني قمنا باشتقاق علاقة مهمة بين الفيض الكهربائي والشحنة ، ونعني بها قانون كاوس . وينص هذا القانون على أن الفيض الكهربائي خلال سطح مختار مغلق يتناسب تناسباً طردياً مع الشحنة الكلية التي يحتضنها السطح . وعند تطبيق قانون كاوس على منطقة تحتوي على شحنات طليقة مغروسة في عازل ، يجب علينا أن نكون حذرين لكي نشمل جميع الشحنات الكائنة داخل السطح المغلق (الكاوسي) ، المقيدة منها والطليقة على حد سواء .

إن الخط المتقطع S المبين في الشكل 4-4 يمثل سطح كاوس . وهو سطح مغلق كائن داخل وسط عازل . وهناك كمية معينة من الشحنة الطليقة Q داخل الحجم المحدد بالسطح S . وسنفرض أن هذه الشحنة الطليقة موزعة على ثلاثة أجسام



الشكل 4-4 تشييد سطح كاوس S في وسط عازل

موصلة بكميات قدرها q_1 و q_2 و q_3 . وبتطبيق قانون كاوس على هذه الحالة ينتج :

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{1}{\epsilon_0} (Q + Q_P), \tag{4-24}$$

إذ أن Q تشير الى مجموع الشحنات الطليقة ، أي :

$$Q = q_1 + q_2 + q_3,$$

وأن Q_P تشير الى شحنة الاستقطاب وقيمتها تساوي :

$$Q_P = \int_{S_1+S_2+S_3} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_V (-\operatorname{div} \mathbf{P}) \, dv. \tag{4-25a}$$

وهنا ترمز V الى حجم ذلك الجزء من العازل المحاط بالسطح المغلق S ، وبهذا لا توجد حدود فاصلة للعازل عند هذا السطح . وعليه نجد أن التكامل السطحي في المعادلة (4-25a) لا يشمل السطح S .

وعند تحويل التكامل الحجمي في المعادلة (4-25a) الى تكامل سطحي باستخدام نظرية التباعد ، يجب ان نكون حذرين لنشمل جميع السطوح المحيطة بالحجم V ونعني بها S و S_1 و S_2 و S_3 . عندئذ يصبح واضحاً أن المساهمات الناشئة عن السطوح الثلاثة الاخيرة ستمحو الحد الاول من المعادلة (4-25a) ، لذا :

$$Q_P = -\oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, da. \tag{4-25b}$$

وبدمج هذه النتيجة مع (4–24) نحصل على :

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} \, da = Q. \tag{4–26}$$

تنص المعادلة (4–26) على ان فيض المتجه $(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})$ خلال سطح مغلق يساوي الشحنة الطليقة الكلية التي يحتضنها السطح . ولهذا المتجه أهمية بالغة مما يدعو الى منحه اسماً خاصاً به بل ورمزاً أيضاً . انه متجه مجال عيني جديد رمزه $\mathbf{D}$ واسمه الازاحة الكهربائية ، ويعرف حسب العلاقة :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \tag{4–27}$$

حيث يتضح ان وحدته هي وحدة الاستقطاب نفسها ، أي وحدة الشحنة على وحدة المساحة .

وبدلالة $\mathbf{D}$ تؤول المعادلة (4–26) الى الشكل الآتي :

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da = Q, \tag{4–28}$$

وتسمى هذه العلاقة قانون كاوس للازاحة الكهربائية ، أو ببساطة قانون كاوس ، ويمكن تطبيقها على منطقة من الفضاء محددة بسطح مغلق S . وعند تطبيق هذه المعادلة على منطقة صغيرة تكون فيها الشحنة الطليقة التي يحتضنها السطح موزعة بكثافة حجمية ρ ، يؤول قانون كاوس الى الصيغة الآتية :

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da = \rho \, \Delta V.$$

وبتقسيم هذه المعادلة على ΔV ، ومن ثم أخذ الغاية ينتج لدينا :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \tag{4–29}$$

وهذه النتيجة تدعى أحياناً الصيغة التفاضلية لقانون كاوس .

إن ميزة الاسلوب الذي اتبعناه تواً هي أن المجال الكهروستاتيكي الكلي عند أية نقطة في وسط عازل يمكن التعبير عنه كمجموع ذي جزأين :

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D}(x, y, z) - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}(x, y, z), \tag{4–30}$$

الجزء الاول $\mathbf{D}(1/\epsilon_0)$ يرتبط بكثافة الشحنة الطليقة من خلال تباعد الازاحة ، والجزء الثاني $\mathbf{P}(-1/\epsilon_0)$ يتناسب طردياً مع استقطاب الوسط العازل . وفي الفراغ يعطى المجال الكهربائي كلياً بالحد الاول فقط من المعادلة (4-30) .

4-5 التأثرية الكهربائية وثابت العزل :
Electric susceptibility and dielectric constant

أشرنا في مقدمة هذا الفصل الى ان استقطاب الوسط العازل يحدث نتيجة لاستجابة الوسط للمجال الكهربائي فيه . أما درجة الاستقطاب فتعتمد ليس على المجال الكهربائي فحسب بل على خواص جزيئات مادة الوسط أيضاً . وحسب وجهة النظر العينية يمكن تعيين سلوك المادة كلياً بواسطة علاقة تحدد تجريبياً بين الاستقطاب وشدة المجال الكهربائي العيني أي $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ ، وهي علاقة نقطية . فاذا تغيرت $\mathbf{E}$ من نقطة لاخرى داخل الوسط المادي ، لتغيرت $\mathbf{P}$ تبعاً لذلك .

ولمعظم المواد تتلاشى $\mathbf{P}$ اذا ماتلاشت $\mathbf{E}$. ولما كان هذا هو السلوك الاعتيادي للمواد فاننا سنقصر مناقشتنا هنا على المواد التي تتصف بهذه الصفة فقط . (ان العوازل التي تمتلك استقطاباً دائمياً ستناقش باختصار في البند 4-5) . وعلاوة على ذلك ، إذا كانت المادة متساوية الاتجاه ، لوجب ان يكون الاستقطاب باتجاه المجال الكهربائي نفسه الذي تسبب في تكوين الاستقطاب . ويمكن تلخيص هذه النتائج بالمعادلة :

$$\mathbf{P} = \chi(E)\mathbf{E}, \qquad (4\text{-}31)$$

إذ تدعى الكمية اللامتجهة $\chi(E)$ التأثرية الكهربائية أو قابلية التكهرب للمادة . وهناك الكثير من المواد التي تعد متساوية الاتجاه كهربائياً ، منها الموائع ومتعددة البلورات والمواد الصلبة غير المتبلورة وبعض البلورات . ان معالجة الخواص الكهربائية للمواد غير متساوية الاتجاه هي خارج نطاق هذا الكتاب .

وبدمج المعادلتين (4-31) و (4-27) نحصل على تعبير للازاحة في أوساط متساوية الاتجاه :

$$\mathbf{D} = \epsilon(E)\mathbf{E}, \qquad (4\text{-}32)$$

$$\epsilon(E) = \epsilon_0 + \chi(E), \qquad (4\text{–}33)$$

حيث ترمز الكمية $\epsilon(E)$ الى سماحية المادة . وواضح ان الكميات ϵ و ϵ_0 و χ لها الوحدات نفسها .

وعلى الرغم من أننا حرصنا ان نكتب χ و ϵ بالهيئة $\chi(E)$ و $\epsilon(E)$ على الترتيب ، إلا انه وجد تجريبياً ان هاتين الكميتين غالباً ماتكونان مستقلتين عن المجال الكهربائي ، عدا الحالات التي يكون فيها المجال شديداً . وبعبارة أخرى تعدُّ هاتان الكميتان ثوابتاً مميزة للمادة . ومواد من هذا النوع سيطلق عليها العوازل الخطية linear dielectric ، إنها تخضع للعلاقتين :

$$\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}, \qquad (4\text{–}31a)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}. \qquad (4\text{–}32a)$$

وبهذا نجد الآن أن السلوك الكهربائي للمادة يحدد كلياً إما بالسماحية ϵ أو بقابلية التكهرب χ . وعلى أية حال فانه من الأفضل أن نتعامل مع كمية لا وحدة لها هي معامل العزل أو ببساطة ثابت العزل ورمزها K . ويعرف ثابت العزل وفق العلاقة :

$$\epsilon = K\epsilon_0. \qquad (4\text{–}34)$$

ومن العلاقة (4–33) يتضح أن :

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0}. \qquad (4\text{–}35)$$

وفي الجدول (4–1) ادرجت ثوابت العزل لعدد من المواد الشائعة . وفيما عدا بعض الامثلة التي يكون فيها استقطاب المادة معيناً ، نجد أن المسائل المعطاة في هذا الكتاب تعالج العوازل الخطية .

وإذا كان المجال الكهربائي المسلط على العازل شديداً جداً ، فإنه سيعمل على سحب الالكترونات بصورة تامة خارج الجزئيات ، وعند ذلك تصبح المادة موصلة . وأقصى قيمة للمجال الكهربائي الذي يستطيع عازل انه يتحمله دون أن يحدث فيه إنهيار كهربائي يدعى شدة العزل . وقد ادرجت في الجدول (4–1) شدة العزل E_{max} أيضاً لعدد من المواد .

الجدول 4-1

خواص المواد العازلة*

(ثابت العزل K وشدة العزل E_{max})

Material	K	E_{max}, volts/m
Glass†	5–10	9×10^6
Mica	6.0	$5–20 \times 10^6$
Nylon	3.5	16×10^6
Rubber†	2–3.5	$16–40 \times 10^6$
Sulfur	4.0	
Wood†	2.5–8.0	
Alcohol, ethyl (0°C)	28.4	
Benzene (0°C)	2.3	
Petroleum oil	2.1	12×10^6
Water (distilled, 0°C)	88.0	
Water (distilled, 20°C)	80.0	
Air (1 atm)	1.00059	3×10^6
Air (100 atm)	1.0548	
CO_2 (1 atm)	1.000985	

* أخذت البيانات من :

Handbook of Chemistry and Physics, 33rd edition, Chemical Rubber Publishing Co., Cleveland, Ohio.

† لمواد الزجاج والمطاط والخشب يختلف التركيب الكيميائي ، وتبعاً لذلك يتغير مدى ثوابت العزل . ويجب ان لايستدل من ذلك ان هذه المواد هي غير خطية

4-6 شحنة نقطية في مائع عازل Point charge in a dielectric fluid

تعد مسألة الشحنة النقطية المطمورة في عازل متجانس متساوي الاتجاه إحدى أبسط المسائل التي تتضمن عازلاً . ويفترض أن يكون الوسط العازل خطياً ومميزاً بثابت عزل قدره K وممتداً الى مالانهاية . وهذه مسألة جديرة بالاهتمام على الرغم من سهولة حلها .

إذا كانت الشحنة النقطية q موضوعة في الفراغ لأصبح المجال الكهربائي الناشيء عنها شعاعياً تماماً . وبوجود الوسط العازل لا تتغير الطبيعة الشعاعية

للمجال وذلك لأن الكميات المتجهة الثلاث **P, D, E** توازي إحداها الاخرى في هذا الوسط . كما أن طبيعة التناظر في هذه المسألة توحي الى أن قيم هذه الكميات تعتمد على البعد عن الشحنة النقطية فقط وليس على أي احداثي زاوي . لنستخدم قانون كاوس المتمثل بالمعادلة (28-4) على سطح كروي نصف قطره r ومركزه ينطبق على الشحنة النقطية q التي يفترض ان تكون واقعة عند نقطة الأصل للسهولة . لذا ينتج لدينا :

أي :

$$4\pi r^2 D = q$$

أو :

$$D = \frac{q}{4\pi r^2},$$

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^3}\mathbf{r}. \qquad (4\text{–}36)$$

وعند ذلك يصبح من السهل جداً حساب المجال الكهربائي والاستقطاب فنحصل على :

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi K\epsilon_0 r^3}\mathbf{r}, \qquad (4\text{–}37)$$

$$\mathbf{P} = \frac{(K-1)q}{4\pi K r^3}\mathbf{r}. \qquad (4\text{–}38)$$

وبهذا يتضح أن المجال الكهربائي يكون أصغر مما عليه الحال فيما لو كان الوسط غير موجود بعامل قدره K من المرات .

وعند هذه النقطة نرى أنه من الأفضل أن نعالج المسألة بتفصيل اكثر ، وأن نوضح لماذا يضعف الوسط العازل المجال الكهربائي . المجال الكهربائي ينشأ أصلاً عن الشحنة بأجمعها المقيدة منها والطليقة . والشحنة الطليقة في هذه المسألة هي الشحنة النقطية . وأما الشحنة المقيدة فانها تتكون من مساهمة الكثافة الحجمية $\rho_P = -\,\mathrm{div}\mathbf{P}$ ومن الكثافة السطحية $\sigma_P = \mathbf{P}.\mathbf{n}$ على سطح العازل الملامس للشحنة النقطية . وباستعمال المعادلة (38-4) نجد أن الكمية $\mathrm{div}\mathbf{P}$ تتلاشى ، ولهذا لم يعد هناك وجود للكثافة الحجمية لشحنة مقيدة في هذه الحالة .

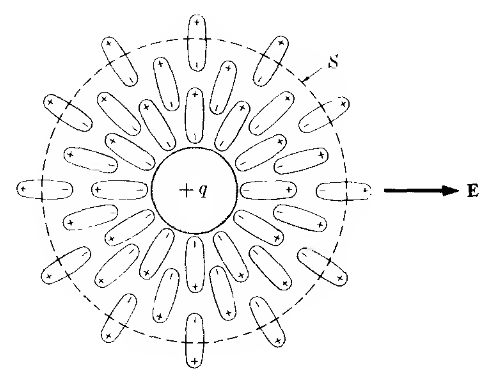
إن الشحنة النقطية q تعد نقطة وفق المفهوم العيني . والحقيقة إنها كبيرة حسب المقياس الجزيئي ، وبوسعنا أن نعين لها نصف قطر قدره b ، وأن نجعله يقترب من الصفر . وبناء على ذلك تصبح الشحنة المقيدة السطحية الكلية معطاة بالعلاقة :

$$Q_P = \lim_{b \to 0} 4\pi b^2 (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n})_{r=b} = -\frac{(K-1)q}{K}. \tag{4-39}$$

والشحنة الكلية

$$Q_P + q = \frac{1}{K} q, \tag{4-40}$$

تبدو بمثابة شحنة نقطية حسب وجهة النظر العينية . وعندئذ يصبح واضحاً الآن لماذا يكون المجال الكهربائي أصغر مما هو عليه الحال في الفراغ بعامل قدره K من المرات . والشكل (5-4) يوضح الرسم التخطيطي للشحنة النقطية q مغموسة في وسط عازل .



الشكل 5-4
رسم تخطيطي يبين اتجاهات الجزيئات المستقطبة في وسط عازل يحيط بالشحنة النقطية q .

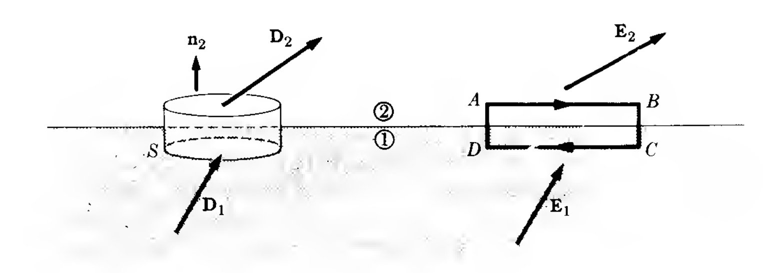
4-7 تطبيق شروط الحدود على متجهات المجال :
Boundary conditions on the field vectors

قبل أن نحاول حل مسائل أكثر تعقيداً من تلك المسألة علينا أن نتعرف على التغير الذي يطرأ على متجهي المجال E و D عندما يجتازان مستوياً فاصلاً بين

وسطين . وقد يكون الوسطان من مادتين عازلتين مختلفتين في خواصها ، أو من مادة عازلة وأخرى موصلة . كما يمكن معاملة الفراغ على أنه عازل ذو سماحية قدرها ϵ_0 .

لنأخذ وسطين مختلفين على تماس احدهما بالآخر ومؤشرين بالرقمين 1 و 2 كما هو مبين في الشكل (6-4) . وسنفرض أن السطح الفاصل بين العازلين يحمل شحنة طليقة ذات كثافة سطحية قدرها σ ، وأن قيمة هذه الكثافة قد تختلف من نقطة لاخرى على السطح . والآن دعنا نأخذ سطحاً اسطوانياً S على شكل علبة اقراص صغيرة بحيث يقطع السطح الفاصل ويحتضن منه مساحة قيمتها ΔS ، ونفرض أن ارتفاع السطح صغير الى حد يمكن إهماله اذا ماقورن مع قطر السطح الاسطواني . أما مقدار الشحنة الطليقة التي يحتضنها هذا السطح S فتساوي

$$\sigma\,\Delta S + \tfrac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) \times \text{volume},$$



الشكل 6-4
شروط الحدود على متجهات المجال عند السطح الفاصل بين وسطين يمكن الحصول عليها باستخدام قانون كاوس على السطح الاسطواني S ، ومن ثم اجراء التكامل $\mathbf{E}.\mathbf{d}\,\mathbf{l}$ حول المسار ABCDA .

بيد أن حجم الاسطوانة صغير جداً بحيث يمكن إهماله وبالتالي يمكن إهمال الحد الثاني من هذه المعادلة . وعند تطبيق قانون كاوس على السطح S نحصل على :

$$\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2\,\Delta S + \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1\,\Delta S = \sigma\,\Delta S,$$

أي أن :

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_2 = \sigma. \tag{4-41a}$$

ولما كان بالإمكان عدّ n_2 عمودياً على السطح الفاصل ينتج :

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \tag{4-41b}$$

وبهذا نجد ان الانقطاع في المركبة العمودية للازاحة **D** يعطى بدلالة الكثافة السطحية للشحنة الطليقة على السطح الفاصل بين الوسطين . وبتعبير آخر ، إن المركبة العمودية للازاحة **D** تكون متصلة فيما اذا لم تكن هناك شحنة طليقة على السطح الفاصل بين الوسطين .

ولما كان بالامكان الحصول على المجال الكهروستاتيكي من أخذ إنحدار الجهد باشارة سالبة ، فإن التكامل الخطي **E.dl** حول أي مسار مغلق يتلاشى . والآن دعنا نطبق هذه النتيجة على المسار المغلق ABCD المبين في الشكل (6-4) . لنفرض أن طول كل من جزأي المسار AB و CD يساوي Δl ، وأن طول الجزأين BC و AD مهمل . لذا ينتج لدينا :

$$\mathbf{E}_2 \cdot \Delta \mathbf{l} + \mathbf{E}_1 \cdot (-\Delta \mathbf{l}) = 0,$$

أو

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \Delta \mathbf{l} = 0. \tag{4-42a}$$

وبذلك نحصل على النتيجة المطلوبة وهي :

$$E_{2t} = E_{1t}, \tag{4-42b}$$

وهذا يعني أن المركبة الماسة للمجال الكهربائي تكون متصلة عبر السطح الفاصل .

لقد حصلنا على النتائج في أعلاه لوسطين بدون تحديد . ومع ذلك فانه لجدير بالذكر ان نستنتج المعادلات المعبرة عن حالة خاصة يكون فيها أحد الوسطين موصلاً .

فاذا كان الوسط 1 موصلاً لأصبح $E_1 = 0$ ، وهذا يعني أن الاستقطاب يجب أن يكون صفراً هو الآخر . كما أن الازاحة $\mathbf{D}_1$ تتلاشى في هذا الوسط طبقاً للمعادلة (27-4) . وبهذا تأخذ المعادلتان (41b-4) و (42b-4) الصيغتين :

$$D_{2n} = \sigma, \tag{4-43}$$

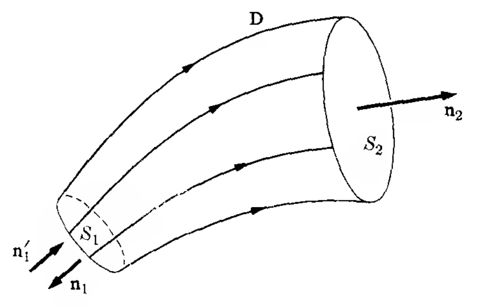
$$E_{2t} = 0, \tag{4-44}$$

اللتين تعبران عن الازاحة والمجال الكهربائي داخل العازل في المنطقة القريبة جداً من السطح الفاصل .

انه لمن الواضح تماماً ، بالاستناد الى أسس فيزيائية خالصة ، أن الجهد يجب أن يكون متصلاً عبر السطح الفاصل . هذا الاستنتاج يستخلص في الحال من الحقيقة القائلة بان فرق الجهد ΔU بين نقطتين متجاورتين يساوي $-\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{l}$ ، إذ ترمز $\Delta \mathbf{l}$ الى الازاحة الفاصلة بين النقطتين ، ومما قيل سابقاً عن أنه لا يوجد سبب للاعتقاد بأن $\mathbf{E}$ تصبح لا نهائية القيمة على السطح الفاصل . والحقيقة أن الاتصال في الجهد يعد شرط حدود ، لكنه لا يكون مستقلاً عن تلك الشروط التي إستخرجناها تواً . إنه يكافيء المعادلة (4-42b) في معظم الحالات .

ويستدل مما جاء في المناقشة المذكورة في اعلاه وفي البنود السابقة أن الإزاحة الكهربائية $\mathbf{D}$ تكون وثيقة الصلة بالشحنة الطليقة . وسنثبت الآن خاصية مهمة للازاحة الكهربائية ، هي أن فيض الازاحة الكهربائية يكون متصلاً في المناطق التي لا تحتوي على شحنة طليقة . ولتحقيق ذلك نستند مرة أخرى الى قانون كاوس . دعنا نركز إنتباهنا على منطقة في الفضاء ، ونرسم خطوط الإزاحة ، وهي خطوط مرسومة بطريقة تجعل إتجاه الخط عند نقطة معينة بنفس اتجاه $\mathbf{D}$ عند تلك النقطة . ثم نتصور انبوبة من الازاحة ، ونعني بذلك حجماً محدداً من جميع جوانبه بخطوط الازاحة دون ان تقطعه هذه الخطوط (انظر الى الشكل 4-7) . تنتهي الأنبوبة عند نهايتيها بالسطحين S_1 و S_2 . وبتطبيق قانون كاوس نحصل على :

$$\int_{S_2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da - \int_{S_1} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}' \, da = Q. \qquad (4\text{–}45)$$



الشكل 4-7 أنبوبة من فيض الإزاحة

فاذا لم يكن هناك وجود للشحنة الطليقة في المنطقة لأصبحت $Q = 0$ ، ولأصبحت كمية الفيض التي تدخل الأنبوبة خلال S_1 مساوية للفيض الذي يخرج من خلال S_2 . واذا كانت هناك شحنة طليقة لتغير الحال بالطبع ، ولعملت هذه الشحنة على تعيين الانقطاع في فيض الإزاحة ، وبذلك تنتهي خطوط الازاحة عند الشحنات الطليقة . بيد أن خطوط القوة ، من الناحية الأخرى ، قد تنتهي عند الشحنات الطليقة أو الشحنات المقيدة .

4-8 مسائل القيم الحدودية المتضمنة عوازلاً
Boundary-value problems involving dielec trics

إن المعادلة الاساسية التي تم اشتقاقها في هذا الفصل هي :

$$\text{div}\, \mathbf{D} = \rho, \tag{4-46}$$

إذ ترمز ρ لكثافة الشحنة الطليقة . لكن العوازل التي تهمنا هي من النوع الذي يمتاز بكونه خطياً ومتجانساً وذا إتجاه متساوٍ ، لذا :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

ϵ هي ثابت مميز للمادة العازلة يدعى سماحية المادة ، ومن ذلك ينتج :

$$\text{div}\, \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon}\rho. \tag{4-47}$$

لكن متجه المجال الكهروستاتيكي $\mathbf{E}$ يرتبط بالجهد اللامتجه حسب العلاقة :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\, U;$$

لذا

$$\nabla^2 U = -\frac{1}{\epsilon}\rho. \tag{4-48}$$

وبهذا نجد أن الجهد في العازل يحقق معادلة بويزون . والفرق الوحيد بين المعادلة (4-48) والمعادلة المماثلة للجهد في حالة الفراغ هو احلال ϵ بدلاً من ϵ_0 .

وفي معظم الحالات التي تهمنا لا يحتوي العازل على شحنة طليقة موزعة خلال الحجم الذي يشغله ، أي أن $\rho = 0$ داخل مادة العازل . والشحنة الطليقة يمكن

أن توجد على سطوح الموصلات أو أن تتركز على هيئة شحنات نقطية قد تغمس في العازل . وتحت هذه الظروف يحقق الجهد معادلة لابلاس خلال جسم العازل :

$$\nabla^2 U = 0 \tag{4-49}$$

وفي عدد من المسائل قد توجد كثافة سطحية لشحنة طليقة على جسم السطح العازل أو على السطح الفاصل بين مادتين عازلتين ، بيد أن ذلك لن يغير شيئاً وتبقى المعادلة (4-49) صالحة للاستعمال مادامت $\rho = 0$.

وبذلك يمكن اختصار المسألة الكهروستاتيكية التي تتضمن عوازلاً خطية ومتجانسة وذات اتجاه واحد الى ايجاد حلول لمعادلة لابلاس في كل وسط ، وبالتالي ربط حلول الاوساط المختلفة بواسطة شروط الحدود التي تحدثنا عنها في البند السابق . وهناك مسائل كثيرة يمكن حلها بهذه الطريقة ، وسنأخذ هنا مثالاً على ذلك ونترك الامثلة الاخرى لتضاف الى المسائل المدرجة في نهاية الفصل .

4-9 كرة عازلة في مجال كهربائي منتظم :
Dielectric sphere in a uniform electric field

لندرس الآن التغيرات التي تطرأ على خطوط القوة عند وضع كرة عازلة نصف قطرها a في منطقة من الفضاء تحتوي أساساً على مجال كهربائي منتظم E_0 . دعنا نفرض ان العازل خطي وذو اتجاه متساوٍ ومتجانس ، وانه مميز بثابت عزل قدره K . أضف الى ذلك ان الكرة لا تحتوي على شحنة طليقة . ويمكننا ان نعدّ نقطة أصل نظام الاحداثيات واقعة في مركز الكرة تماماً ، وان اتجاه E_0 يكون بالاتجاه القطبي (اتجاه الاحداثي z) . وعند ذلك يمكن التعبير عن الجهد بمثابة مجموع لتوافقيات منطقية . وكما هو الحال في البند (3-5) ، فانه بالامكان تحقيق جميع شروط الحدود بواسطة أوطأ رتبتين من التوافقيات ، وان نكتب الجهد كالآتي :

$$U_1(r, \theta) = A_1 r \cos\theta + C_1 r^{-2} \cos\theta \tag{4-50}$$

بالنسبة لمنطقة الفراغ (1) الكائنة خارج الكرة العازلة . أما بالنسبة لمنطقة العازل (2) فنعبر عن الجهد بالمعادلة الآتية :

$$U_2(r, \theta) = A_2 r \cos\theta + C_2 r^{-2} \cos\theta \tag{4-51}$$

إذ أن A_1 و A_2 و C_1 و C_2 هي ثوابت مجهولة يجب تعيينها طبقاً لشروط الحدود . إن التوافقي r^{-1} هو غير ضروري في هذه الحالة ، لأن وجوده يدل ضمناً على أن الكرة العازلة تحمل شحنة وهذا خلاف مافرضناه . ويمكن اضافة حدٍ ثابتٍ الى كل من المعادلتين (4-50) و (4-51) ، إلا أن الحالة تقتضي اضافة الثابت نفسه الى كلتا المعادلتين ، ولهذا يمكننا ان نجعله صفراً دون أن ينقص ذلك من الطبيعة العامة للمعادلتين .

عند المسافات البعيدة عن الشحنة يبقى المجال الكهربائي محافظاً على انتظامه ، وتؤول قيمة الجهد الى الآتي : $U_1 \longrightarrow -E_0 r\cos\theta$. وهذا يعني ان $A_1 = -E_0$. أضف الى ذلك ان الجهد والمجال الكهربائي المصاحب له يصبحان مالانهاية عند مركز الكرة مالم تكون قيمة الثابت C_2 صفراً . ، وهذا يدل ضمناً على وجود ثنائي قطب عيني عند المركز ، أي ثنائي قطب عزمه لا يتناسب مع ΔV . وبالتأكيد فان الحالة هي خلاف ذلك استناداً الى المناقشة التي وردت في البند (4-3) ، حيث لا يصبح الجهد ولا المجال الكهربائي المصاحب له لا نهائياً في العازل الخالي من الشحنة الطليقة . وبذلك تكون قيمة الثابت C_2 صفراً ، كما يمكن الحصول على بقية الثوابت A_2 و C_1 من شروط الحدود كما جاء في البند (4-7) .

إن الاتصال في الجهد عبر السطح الفاصل بين العازل والفراغ يقتضي أن تكون : $U_1 = U_2$ عند البعد $r = a$ ، أو

$$-E_0 a + C_1 a^{-2} = A_2 a. \tag{4-52}$$

مادامت المركبة العمودية للازاحة D عند السطح الفاصل تساوي

$$D_r = -\epsilon(\partial U/\partial r),$$

كما أن طبيعة الاتصال في D_r (لا وجود لشحنة طليقة على سطح العازل) تقتضي أن تكون $D_{1r} = D_{2r}$ عند البعد $r = a$ ، أو

$$E_0 + 2C_1 a^{-3} = -KA_2. \tag{4-53}$$

أما طبيعة الاتصال في E_t عند البعد $r = a$ فانه يكافيء المعادلة (4-52) . وبدمج المعادلتين (4-52) و (4-53) نحصل على :

$$A_2 = -\frac{3E_0}{K+2} \tag{4-54}$$

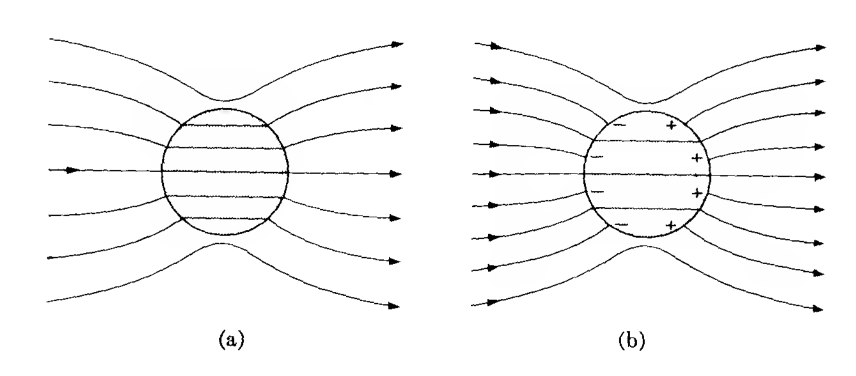
و

$$C_1 = \frac{(K-1)a^3 E_0}{K+2}. \tag{4-55}$$

وبهذا تمكنا من حل المسألة بصورة كاملة . فالجهد الكهربائي يعطى بالمعادلة (4-50) أو بالمعادلة (4-51) ، والثوابت A_1 و C_1 و A_2 و C_2 جميعها أصبحت معلومة . ويمكن الحصول على مركبات **E** و **D** عند أية نقطة (r و θ و ϕ) بإجراء التفاضل . إنه لواضح من المعادلة (4-54) ، نظراً لأن $C_2 = 0$ ، ان المجال الكهربائي داخل الكرة يكون باتجاه E_0 وانه يعطى بالعلاقة الآتية :

$$\mathbf{E}_2 = \frac{3}{K+2}\mathbf{E}_0. \tag{4-56}$$

إن خطوط الازاحة وخطوط القوة الكهربائية مبينة بالشكل 4-8 .



الشكل 4-8

التشوه الحاصل في مجال كهربائي منتظم نتيجة لوضع كرة عازلة فيه : **(a)** خطوط الازاحة الكهربائية ، **(b)** خطوط المجال الكهربائي .

4-10 القوة المؤثرة على شحنة نقطية مطمورة في عازل :
Force on a point charge embedded in a dielectric

إننا الآن في وضع يمكننا من تعيين القوة المؤثرة على موصل مشحون وكروي وصغير مطمور في عازل خطي ومتساوي الاتجاه . وعند الغاية التي يكون فيها الموصل صغيراً الى حد يكاد يهمل حسب وجهة النظر العينية ، فان ناتج الحساب سيعطي القوة المؤثرة على شحنة نقطية .

يمكننا الحصول على المجال الكهربائي وكثافة الشحنة السطحية عند نقطة على سطح الموصل وفقاً لأسلوب القيم الحدودية حسبما جاء في البند السابق ، ومن ثم يمكننا الحصول على القوة **F** من التكامل المنجز على السطح :

$$\mathbf{F} = \oint_S \mathbf{E}'\sigma \, da. \tag{4-57}$$

هنا $\mathbf{E}'$ ترمز للمجال الكهربائي عند عنصر السطح da ناقصاً ذلك الجزء من المجال الناشيء عن العنصر نفسه ، وهذا يعني ان :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \mathbf{E}_s, \tag{4-58}$$

إذ أن $\mathbf{E}_s$ تعبر عن المجال الكهربائي الناتج عن عنصر الشحنة السطحي $\sigma\, da$. ومن المهم أن لا تكون $\mathbf{E}_s$ مشمولة في المجال $\mathbf{E}'$ ، وذلك لأن الكمية $\mathbf{E}_s \sigma\, da$ تمثل التأثير المتبادل بين عنصر الشحنة $\sigma\, da$ والمجال الخاص به. وواضح أن هذا التأثير المتبادل الذاتي لا ينتج قوة على العنصر ، لكنه يسبب إجهاداً سطحياً قدره :

$$\mathfrak{F}_s = \sigma E_s, \tag{4-59}$$

ناشئاً عن التنافر المتبادل بين الالكترونات (أو الأيونات الموجبة الفائضة) في الطبقة السطحية من الموصل . وهذا الاجهاد يتوازن مع قوى التماسك القوية في المادة التي يتكون منها العنصر . وينبغي أن نشير الى حقيقة أنه عند حساب القوى المؤثرة على الاجسام المشحونة ، في الفصلين الثاني والثالث ، قمنا ضمنياً بطرح المجال الذاتي $\mathbf{E}_s$. لذا ، عند حساب القوة المؤثرة على شحنة نقطية ، فإن المجال الناشيء عن الشحنة النقطية لم يكن مشمولاً . وسنذكر المزيد من المناقشات حول القوى المؤثرة على أجسام مشحونة في البند (8-6) .

وقد يبدو أنه بالإمكان إهمال المجال الذاتي للعنصر السطحي المشحون $\sigma\, da$ ، وذلك لأن مساحة العنصر متناهية في الصغر ، بيد أن الحال هو ليس كذلك . صحيح ان العنصر صغير حسب المفهوم العيني ، لكنه يجب أن لا تؤخذ الغاية أبداً . فعند نقطة واقعة على سطح العنصر يبدو العنصر وكأنه مستوٍ لا نهائي ، وهذا يعني أن العنصر يحدث زاوية قدرها 2π ، لذا :

$$\mathbf{E}_s = \frac{\sigma}{2\epsilon}\mathbf{n}, \tag{4-60}$$

إذ أن n تمثل العمود المقام على العنصر ، و ϵ تمثل سماحية العازل الذي يكون على تماس معه . وبهذا نجد أن الاجهاد $\mathfrak{F}_s$ يتناسب طردياً مع σ^2 ويكون دائماً بهيئة شد مهما كانت علاقة الكثافة السطحية .

هدفنا في هذا البند هو حساب القوة المؤثرة على جسم موصل . وباستعمال شروط الحدود حسبما جاء في البند 7-4 ، نجد أن المجال الكهربائي الكلي عند سطح الموصل يعطي العلاقة :

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon}\mathbf{n}. \tag{4-61}$$

وبدمج المعادلات (4-58) و (4-60) و (4-61) نحصل على :

$$\mathbf{E}' = \tfrac{1}{2}\mathbf{E},$$

وبهذا تصبح القوة المؤثرة على الموصل :

$$\mathbf{F} = \tfrac{1}{2}\oint_S \mathbf{E}\sigma\, da. \tag{4-57a}$$

دعنا الآن نركز إهتمامنا على جسم موصل كروي صغير مطمور في عازل ممتد الى مالا نهاية ، ونفرض أن الشحنة الكلية التي يحملها الجسم Q نصف قطره a . وبما أننا سنذهب في نهاية المطاف الى الغاية التي عندها تكون a صغيرة جداً ، ولما كانت التغيرات في المجال الكهربائي (إن وجدت) مأخوذة على المقياس العيني ، فإنه يكفينا أن نعدَّ الحالة التي يكون فيها المجال الكهربائي في البداية منتظماً في المنطقة المجاورة للموصل . دعنا نرمز لهذا المجال المنتظم بالعلامة $\mathbf{E}_0$. والصورة الآن مشابهة لمسألة القيم الحدودية التي ناقشنا حلها في البند (5-3) ، عدا أنَّ الكرة الموصلة تكون هنا مطمورة في عازل سماحيته ϵ وتحمل شحنة قدرها Q .

وبمقارنة هذه الحالة مع ما جاء في البند (5-3) يصبح من السهل أن نعين ما يأتي :

الجهد ،

$$U(r, \theta) = U_0 - E_0 r \cos\theta + \frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon r}\,; \tag{4-62}$$

المجال الكهربائي ،

$$E_r = E_0(1 + 2a^3/r^3)\cos\theta + Q/4\pi\epsilon r^2, \tag{4-63}$$

$$E_\theta = -E_0(1 - a^3/r^3)\sin\theta;$$

كثافة الشحنة السطحية على سطح الكرة ،

$$\sigma(\theta) = \epsilon E_r\Big|_{r=a} = 3\epsilon E_0 \cos\theta + Q/4\pi a^2. \qquad (4\text{-}64)$$

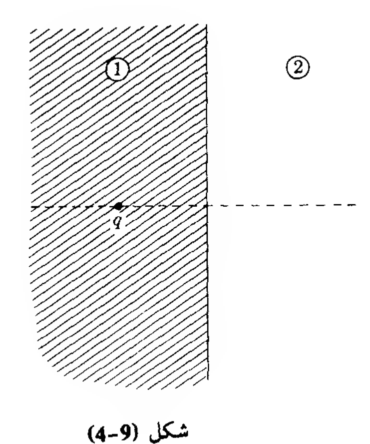
والآن يصبح بوسعنا تعيين القوة من المعادلة (4-57a) . ومن التماثل نجد أن المركبة الوحيدة للقوة التي لا تساوي صفراً هي تلك المركبة التي تكون بالاتجاه $\theta = 0$ ، أي باتجاه الاحداثي z :

$$F_z = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} (E_r)_{r=a} \cos\theta\sigma(\theta) 2\pi a^2 \sin\theta \, d\theta$$

$$= E_0 Q, \qquad (4\text{-}65a)$$

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}_0. \qquad (4\text{-}65b)$$

وهذه النتيجة لا تتغير بذهابنا الى الغاية التي تكون عندها a صغيرة . وبهذا يكون المجال الكهربائي باتجاه $\mathbf{E}_0$ متفقاً مع التعريف الاساسي ، ونعني بذلك القوة المؤثرة على شحنة إختبارية صغيرة مقسومة على مقدار الشحنة Q .



شكل (4-9)

مسـائل

4-1 قضيب رقيق عازل مساحة مقطعة A ، يمتد على الاحداثي x بين النقطتين $x = 0$ و $x = L$ ، واتجاه الاستقطاب في القضيب مع محور x وقيمته معطاة بالمعادلة

$$P_x = ax^2 + b.$$

جد الكثافة الحجمية لشحنة الاستقطاب ، والشحنة السطحية للاستقطاب على نهايتي القضيب ، وبين بالتفصيل أن الشحنة الكلية المقيدة تتلاشى في هذه الحالة .

4-2 مكعب عازل طول ضلعه L ويمتلك استقطاباً شعاعياً معطى بالمعادلة

$$\mathbf{P} = A\mathbf{r},$$

A تمثل مقداراً ثابتاً والمتجه **r** يساوي

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z.$$

ونقطة الأصل للاحداثيات تقع عند مركز المكعب . جد جميع كثافات الشحنة المقيدة ، وأثبت بالتفصيل أن الشحنة المقيدة الكلية تتلاشى .

4-3 قضيب عازل بشكل اسطوانة دائرية قائمة طوله L ونصف قطره R مستقطب باتجاه طوله . فإذا كان الاستقطاب منتظماً ومقداره P ، احسب المجال الكهربائي الناتج عن الاستقطاب عند نقطة واقعة على محور الاسطوانة .

4-4 برهن على صحة العلاقة الآتية بين الاستقطاب **P** وكثافتي الشحنة المقيدة ρ_P و σ_P لعينة عازلة حجمها V وسطحها S .

$$\int_V \mathbf{P}\, dv = \int_V \rho_P \mathbf{r}\, dv + \int_S \sigma_P \mathbf{r}\, da.$$

إذ أن :

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$$

تمثل متجه الموضع مقاساً من أية نقطة أصل مثبتة .
[ملاحظة : فك $\text{div}(x\mathbf{P})$ حسب المعادلة (10-4)] .

4-5 قطعتان كبيرتان جداً من مادة عازلة واحدة موضوعتان بصورة متجاورة بحيث تنشأ بينهما فجوة ضيقة متساوية السمك . فاذا علمت أن الاستقطاب **P** ثابت خلال جميع المادة العازلة ويصنع زاوية قدرها γ مع العمود المقام على المستويين اللذين يحددان الفجوة ، عين المجال الكهربائي في الفجوة .

4-6 موصل اسطواني طويل نصف قطره a ويحمل شحنة قيمتها λ لوحدة الطول ، غمر في وسط عازل ذي سماحية ثابتة ϵ . جد المجال الكهربائي عند البعد $r > a$ عن محور الاسطوانة .

4-7 وسطان عازلان يفصلها سطح مستوٍ لايحتوي على شحنة طليقة . فاذا علم أن ثابت عزل الوسط الأول K_1 والثاني K_2 ، جد علاقة بين الزاويتين θ_1 و θ_2 ، وهما الزاويتان المحصورتان بين العمود المقام على السطح الفاصل وخط كيفي للازاحة في هذين الوسطين على الترتيب .

4-8 سلك محوري ذو مقطع دائري ومكون من عازل مركب . الموصل الداخلي نصف قطره a محاط بقشرة من وسط عازل ذي ثابت عزل قدره K_1 ونصف قطره الخارجي b . يلي ذلك طبقة عازلة اخرى ثابت عزلها K_2 ونصف قطرها الخارجي c . فاذا سلط فرق جهد قدره U_0 بين الموصلين المكونين السلك

المحوري ، احسب الاستقطاب عند كل نقطة من نقاط الوسطين العازلين .

4-9* وسطان عازلان سماحيتها ϵ_1 و ϵ_2 ، يفصلها سطح مستوٍ لا يحتوي على شحنة طليقة . طمرت شحنة طليقة q في الوسط العازل الأول على بعد قدره d من السطح الفاصل . وللسهولة نأخذ المستوي yz المار في نقطة الأصل على أنه السطح الفاصل ، ونضع q على محور x عند النقطة $x = -d$. فإذا كان :

$$r = \sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{and} \quad r' = \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2},$$

لأصبح من السهل أن نوضح أن الكمية :

$$(1/4\pi\epsilon_1)[(q/r) + (q'/r')]$$

تحقق معادلة لابلاس عند جميع النقاط الواقعة في الوسط الأول عدا موقع الشحنة q . علاوة على ذلك فان الكمية :

$$q''/4\pi\epsilon_2 r$$

تحقق معادلة لابلاس للوسط الثاني . بين ان جميع شروط الحدود يمكن تحقيقها بهذه القيم من الجهد ، وبعد ذلك عين قيمة الشحنة q' والشحنة q'' (لاحظ الشكل 4-9) .

4-10 اسطوانة عازلة طويلة نصف قطرها a وثابت عزلها K وضعت في مجال كهربائي منتظم E_0 بحيث كان محور الاسطوانة عمودياً على اتجاه المجال . فاذا علمت أن الاسطوانة لاتحتوي على شحنة طليقة عين المجال الكهربائي عند النقاط الواقعة داخل وخارج الاسطوانة .

4-11 لوحان موصلان متوازيان تفصلها مسافة قدرها d ، وجعل فرق الجهد بينهما ΔU . أدخل لوح عازل ثابتة K سمكه متجانس قدره t (t<d) بين اللوحين الموصلين . عين المتجهات D, E في العازل وفي الفراغ بين العازل وأحد اللوحين الموصلين . أهمل التأثير الناشيء عن أطراف اللوحين بسبب السطح المحدود للوحين .

4-12 لوحان موصلان متوازيان تفصلها مسافة قدرها d ، وجعل فرق الجهد بينهما ΔU . أدخل لوح عازل ثابته K وسمكه d (أي بقدر المسافة الفاصلة بين اللوحين) بين اللوحين الموصلين بحيث لم يمتليء كلياً الحجم المتكون بين اللوحين الموصلين . جد المجال الكهربائي (أ) داخل العازل ، و (ب) داخل المنطقة الفارغة بين اللوحين . وجد كثافة الشحنة σ على ذلك الجزء من اللوح الموصل (جـ) الملامس للعازل و (د) الملامس للفراغ . (هـ) جد كثافة شحنة الاستقطاب σ_P على اللوح العازل .

4-13 كرة موصلة نصف قطرها R تطفو في سائل عازل سماحيته ϵ_1 ، بحيث يغمر نصفها في السائل ، ويعلو السائل غاز سماحيته ϵ_2 . فاذا علم ان الشحنة الطليقة الكلية التي تحملها الكرة تساوي Q ، جد المجال الكهربائي الشعاعي الذي يحقق جميع شروط الحدود ، وعين كثافة الشحنة الطليقة والمقيدة والكلية عند جميع النقاط على سطح الكرة . أثبت ان هذا المجال هو المجال الكهربائي الحقيقي .

4-14 أنشيء مجال كهربائي منتظم E_0 في وسط عازل ثابت عزله K . برهن على أن المجال المتكون داخل فجوة كروية داخل العازل تساوي :

$$\mathbf{E} = \frac{3K\mathbf{E}_0}{2K+1}$$

4-15 *كرة عازلة نصف قطرها R تمتلك استقطاباً دائمياً منتظم المقدار والاتجاه قدره P . جد المجال الكهربائي الناشيء عن الاستقطاب داخل الكرة وخارجها . ان المجال الكهربائي داخل الكرة يكون باتجاه معاكس للاستقطاب ولهذا يدعى المجال مزيل الاستقطاب depolarizing field . [ملاحظة : بما ان الكمية divP تتلاشى عند جميع النقاط ، فان الجهد الكهروستاتيكي يحقق معادلة لابلاس داخل الكرة وخارجها . لاتفرض ان العازل مميز بثابت عزل] .

4-16 بينا في هذا الكتاب ان الاستقطاب يعطى بالعلاقة

$$\mathbf{P} = \rho_0^+ (\boldsymbol{\delta}^+ - \boldsymbol{\delta}^-).$$

طبق هذه العلاقة على الكرة منتظمة الاستقطاب المذكورة في المسألة السابقة وعين مجال ثنائي القطب الخارجي بصورة مباشرة .

الفصل الخامس

النظرية المجهرية للعوازل
MICROSCOPIC THEORY OF DIELECTRICS

عالجنا في الفصل السابق الجوانب العينية لاستقطاب العوازل ، وأوضحنا كيف يمكن أخذ الاستقطاب بالحسبان في كثير من الحالات باستخدام ثابت العزل . وبهذه الطريقة أمكن حساب المجال الكهربائي مباشرة وذلك بأخذ الشحنات الطليقة للتوزيع الشحني بنظر الاعتبار . وعلى الرغم من أننا قد أشرنا الى جزيئات العازل عدة مرات خلال الفصل الرابع ، إلا أنه تجنبنا الشرح المفصل في معالجة المادة حسب المفهوم المجهري ، وكانت وجهة النظر العينية هي السائدة في طرحنا للموضوع . والآن نرغب في تقصي الطبيعة الجزيئية للعازل ، ونطلع على مسؤولية المجال الكهربائي في استقطاب الجزيئة ومدى علاقة الاستقطاب بالمجال الكهربائي العيني . وبالاضافة الى ذلك بالامكان تفهم السلوك الخطي الذي يعد صفة مميزة للعديد من المواد العازلة بالاعتماد على نموذج جزيئي بسيط .

5-1 المجال الجزيئي في عازل Molecular field in a dielectric

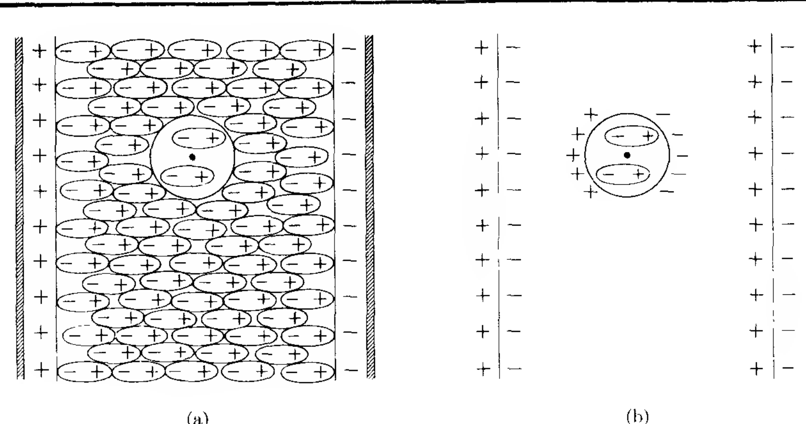
يدعى المجال الكهربائي المسؤول عن استقطاب جزيئة في مادة عازلة المجال الجزيئي ورمزه $\mathbf{E}_m$. وهذا هو المجال الكهربائي عند الموضع الجزيئي في العازل . إنه ينتج عن جميع المصادر وعن جميع الجزيئات المستقطبة في العازل باستثناء الجزيئة الواقعة عند النقطة المعنية . ومن الواضح أنه ليس ضرورياً أن تكون $\mathbf{E}_m$ مساوية للمجال الكهربائي العيني ، وسبب ذلك هو ، كما جاء في البند (3-4) ، أن

المجال الكهربائي العيني يرتبط بالقوة المؤثرة على شحنة إختبارية ، وهي بالطبع كبيرة إذا ماقورنت مع الأبعاد الجزيئية .

ويمكن حساب المجال الجزيئي كما يأتي . دعنا نقطع قطعة صغيرة من عازل ، تاركين تجويفاً كروياً محيطاً بالنقطة التي ينبغي حساب المجال الجزيئي عندها . عندئذٍ سنعامل ماتبقى من العازل على أنه متواصل حسب وجهة النظر العينية . والآن نعيد العازل الى التجويف جزيئة بعد جزيئة باستثناء الجزيئة التي تقع عند مركز التجويف حيث يطلب حساب المجال الجزيئي . وهنا ينبغي معاملة الجزيئات التي أعيدت تواً الى التجويف باعتبارها ثنائيات أقطاب منفردة ، وليس كقطعة متواصلة . ويمكن تبرير هذا الاسلوب فيما اذا كانت نتيجة الحسابات مستقلة عن حجم التجويف لا غير ، وهذا هو واقع الحال بالتأكيد إذا ماتوفرت شروط معينة كما سنرى .

دعنا نفرض أن عينة العازل الرقيقة قد استقطبت نتيجة لوضعها في مجال كهربائي منتظم بين لوحين متوازيين مشحونين بشحنتين متساويتين ومتعاكستين كما هو مبين في الشكل 5-1 (a) . وسنفرض أن الاستقطاب منتظم حسب المقياس العيني (أي أن $\text{div}\mathbf{P} = 0$) ، وأن متجه الاستقطاب يوازي المجال الكهربائي الذي ولّده . وبالامكان استبدال ذلك الجزء من العازل الواقع خارج التجويف بمنظومة من الشحنات المقيدة كما هو موضح في الشكل 5-1 (b) ، حيث يصبح بوسعنا أن نعبر عن المجال الكهربائي عند مركز التجويف كالآتي :

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_d + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}'. \tag{5-1}$$



الشكل **5-1** إستبدال العازل خارج التجويف بمنظومة من الشحنات المقيدة

هنا ، $\mathbf{E_x}$ ، تشير الى المجال الكهربائي الأولي الناشيء عن اللوحين المتوازيين المشحونين ، و $\mathbf{E_d}$ المجال المعاكس للاستقطاب الناشيء عن الشحنة المقيدة على السطحين الخارجيين للعازل ، و $\mathbf{E_s}$ المجال الناشيء عن الشحنة المقيدة على سطح التجويف S و $\mathbf{E'}$ المجال الناشيء عن جميع ثنائيات الأقطاب الكائنة داخل S .
وعلى الرغم من أن الصيغة الصريحة لـ $\mathbf{E_x}$ لا تهمنا كثيراً ، إلا أنه من الواضح ، لو كانت أبعاد اللوحين كبيرة بالمقارنة مع المسافة الفاصلة بينهما ، فإن :

$$E_x = (1/\epsilon_0)\sigma,$$

إذ أن σ تمثل الكثافة السطحية للشحنة . والمجال المعاكس للاستقطاب ينشأ أيضاً عن صفيحتين متوازيتين من الشحنات ولكن بكثافة سطحية قدرها σ_P في هذه المرة . وبما أن :

$$\sigma_P = P_n = \pm P$$

ينتج :

$$\mathbf{E}_d = -\frac{1}{\epsilon_0}\mathbf{P}. \tag{5-2}$$

دعنا نكتب المجال الكهربائي العيني في العازل بدون رمز سفلي ، أي $\mathbf{E}$. ولما كانت المركبة العمودية للازاحة الكهربائية $\mathbf{D}$ متصلة عبر السطح الفاصل بين العازل والفراغ ، وبما أن $\mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E_x}$ في الفراغ خارج اللوح العازل ، فإنه ينتج :

$$\epsilon_0\mathbf{E}_x = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}. \tag{5-3}$$

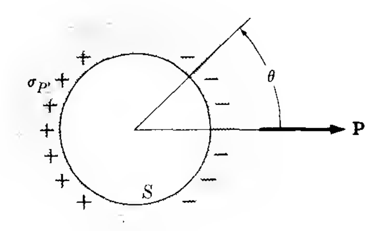
وبدمج المعادلات (1-5) و (2-5) و (3-5) نحصل على :

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}', \tag{5-4}$$

وهذه معادلة تربط المجال الجزيئي بالمجال الكهربائي العيني ، وهي معادلة شاملة لا تقتصر على الوضع الهندسي المبين في الشكل (1-5) ، ومع ذلك فإن الاشتقاق المذكور في أعلاه يُعدُّ مفيداً للموضوع الذي سيناقش في البند (4-5) .

المجال الكهربائي $\mathbf{E_s}$ ينشأ عن كثافة الشحنة المقيدة وقيمتها $\sigma_P = \mathrm{P_n}$ ، المستقرة على السطح الكروي S . وباستخدام الاحداثيات الكروية وأخذ الاتجاه القطبي مع اتجاه متجه الاستقطاب $\mathbf{P}$ كما هو مبين في الشكل (2-5) ، نحصل على

$$d\mathbf{E}_s = \frac{(-P\cos\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}\,\mathbf{r}\,da, \tag{5-5}$$



الشكل 5-2
حساب مساهمة سطح التجويف في تحديد $\mathbf{E}_m$

إذ أن $\mathbf{r}$ تمثل المتجه الممتد من السطح الى مركز الكرة . ومن التناظر يتضح أن مركبة $d\mathbf{E}_s$ الموازية للاستقطاب $\mathbf{P}$ هي الوحيدة التي تساهم في حساب تكامل المعادلة (5-5) المنجز على السطح الكلي . وبما أن :

$$da = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi,$$

لذا :

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\mathbf{P}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3\epsilon_0}\mathbf{P}. \tag{5-6}$$

وأخيراً نأتي الى الحد الأخير في المعادلة (5-4) الناشيء عن ثنائيات الاقطاب الكهربائية داخل S . هناك عدد من الحالات المهمة التي يتلاشى فيها هذا الحد . فاذا كان هناك عدد كبير من ثنائيات الاقطاب داخل التجويف ، واذا كان إتجاهها متوازياً ، ولكن مواضعها موزعة بشكل عشوائي ، واذا لم يكن هناك تنسيق بين مواضع ثنائيات الأقطاب ، عندئذ تصبح $\mathbf{E}' = 0$. هذه هي الحالة التي ربما تظهر في غاز أو في سائل . وبالمثل إذا كانت ثنائيات الاقطاب داخل التجويف واقعة في مواضع ذرية منتظمة في بلورة مكعبة* ، فان $\mathbf{E}' = 0$ ايضاً . وهنا نشير للقاريء أن يرجع للمسألة (2-5) المتعلقة بهذا الموضوع .

وبصورة عامة لا تكون $\mathbf{E}'$ مساوية للصفر ، فاذا كانت المادة تحتوي على بضعة أصناف من الجزيئات ، فان $\mathbf{E}'$ قد تختلف تبعاً لاختلاف المواضع الجزيئية . هذا هو الحد المسؤول عن السلوك الكهربائي غير متساوي الاتجاه anisotropic في الكالسايت على سبيل المثال . بيد أننا لا نهدف الى تطوير نظرية للمواد غير

* البلورات ذات أعلى درجات التماثل تعود الى المنظومة المكعبة .

متساوية الاتجاه . وبهذا سنقصر مناقشتنا على صنف واسع من المواد التي تكون فيها $\mathbf{E}'=0$. عند ذلك تؤول المعادلة (4-5) الى الصيغة الآتية :

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0}\mathbf{P}. \qquad (5\text{-}7)$$

ومن المثير أن نلاحظ أنه بالإمكان الحصول على هذه النتيجة مباشرة باستخدام الطريقة المذكورة في أعلاه فيما اذا نتج التجويف الكروي عن ازالة جزيئة واحدة فقط . ولكنه تحت هذه الظروف يكون التجويف صغيراً الى درجة تجعل استبدال بقية العازل بمنظومة من الشحنات المقيدة لا يمكن تبريره .

يدعى عزم ثنائي القطب الجزيئي لوحدة المجال المستقطب بقابلية الاستقطاب polarizability ورمزها α . وبتعبير آخر

$$\mathbf{p}_m = \alpha\mathbf{E}_m. \qquad (5\text{-}8)$$

واذا كان هناك N من الجزيئات لوحدة الحجم لنتج لدينا :

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p}_m,$$

وبدمج هذه النتيجة مع المعادلتين (7-5) و (8-5) نحصل على :

$$\mathbf{P} = N\alpha\left(\mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0}\mathbf{P}\right). \qquad (5\text{-}9)$$

وبالتعويض عن الاستقطاب وفق العلاقة :

$\mathbf{P} = (K-1)\epsilon_0\mathbf{E}$. In this way, Eq. (5-9) becomes

يمكننا إعادة كتابة العلاقة (9-5) بدلالة ثابت العزل K فينتج :

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{N}\frac{(K-1)}{(K+2)}, \qquad (5\text{-}10)$$

وهذه العلاقة تعرف باسم معادلة كلوزيوس ـ موسوتي Clausius-Mossotti . ومن الواضح أن المعادلة (10-5) تعرِّف خاصية جزيئية هي قابلية الاستقطاب الجزيئية بدلالة كميات يمكن تعينها وفقاً لأسس عينية .

5-2 ثنائيات الأقطاب المحتثة . نموذج بسيط :
Induced dipoles. A simple model

يمكن تصنيف جزيئات العازل الى صنفين ، جزيئات قطبية وأخرى غير قطبية . الجزيئة القطبية هي تلك التي تمتلك عزماً دائمياً حتى في حالة غياب المجال المستقطب E_m . وسندرس في البند القادم إستجابة عازل قطبي لمجال كهربائي خارجي ، إلا أننا سنتعامل هنا مع مسألة بسيطة نوعاً ماتتضمن جزيئات غير قطبية . وفي هذه الجزيئات تنطبق عادة ''مراكز الثقل'' للشحنات الموجبة والسالبة . ومن الجزيئات التي تقع ضمن هذا الصنف الجزيئات التي تتصف بالتناظر ومن أمثلتها H_2 و N_2 و O_2 ، وكذلك الجزيئات متعددة الذرات مثل He و Ne و A .

إن تسليط مجال كهربائي على الجزيئات غير القطبية يحدث ازاحة نسبية بين الشحنات الموجبة والشحنات السالبة فيها ، مما يؤدي الى توليد ثنائيات أقطاب جزيئية تدعى ثنائيات الاقطاب المحتثة . وأبسط جزيئة يمكن تصورها هي تلك الجزيئة التي تتكون من ذرة منفردة محايدة . ومن الممكن تشييد نموذج كلاسيكي بسيط للذرة ، ومن هذا النموذج يمكن إشتقاق تعبير لعزم ثنائي القطب المحتث وبالتالي لقابلية استقطابه . وعلى الرغم من أن هذا النموذج مصمم خصيصاً للجزيئات احادية الذرة ، إلا أنه بالامكان إستعماله عند التعامل مع الجزيئات ثنائية الذرة والتي تتصف بالتناظر ، وذلك بتطبيق النموذج على ذرتي الجزيئة كل على حدة للحصول على قابلية الاستقطاب لكل ذرة . وبعد ذلك تحسب قابلية الاستقطاب الجزيئية من جمع قابلية الاستقطاب للذرتين أو من مضاعفة إحداهما .

تتكون الذرة من نواة صغيرة جداً ذات شحنة موجبة محاطة بالكترونات مدارية مستمرة الحركة . وبما أن الالكترونات تقطع مداراتها في زمن قصير جداً بحدود 10^{-15} ثانية ، فانه يتضح أن كل شحنة ألكترونية في الذرة ''الذرة الستاتيكية'' المكافئة تغطي كل مدارها . بيد ان ميكانيك الكم يعلمنا بأنه على الرغم من أن هذه الصورة صحيحة في جوهرها ، الا أنها تعد صورة ساذجة نوعاً ما . فالحقيقة ان هذه الالكترونات غير محددة المواضع على مداراتها ، لكنها تمتلك احتمالية محددة لوجودها في أي موقع في الذرة . وبهذا يمكن معاملة استجابة الذرة للمجال الكهروستاتيكي أو للمجالات الكهربائية المتغيرة ببطء باعتبار أن الالكترون موزع على مداره في الذرة ، وأن كل مدار يغطي جزءاً أساسياً من حجم الذرة . وبأختصار فان النموذج الكلاسيكي البسيط للذرة المتناغم مع هذه الصورة هو شحنة نقطية موجبة (النواة) محاطة بسحابة متناظرة كروية من شحنة

سالبة ذات كثافة تعد منتظمة في منطقة نصف قطرها مساوٍ لنصف قطر الذرة R_0 ، ومساوية للصفر عند الابعاد التي تزيد على R_0 أي خارج تلك المنطقة .

والآن أصبحنا في وضع يمكننا من حساب قابلية الاستقطاب لهذه ''الذرة'' . لنفرض ان شحنة النواة Ze ، اذ ان e القيمة المطلقة لشحنة الالكترون و Z العدد الذري . وبما ان الذرة متعادلة كهربائياً ، فان الشحنة الكلية للغيمة الالكترونية تساوي Ze- . فاذا وضعت هذه الذرة في مجال مستقطب $\mathbf{E}_m$ ، فان النواة ستزاح بالنسبة لمركز الغيمة الشحنية بمسافة سندعوها x ، واتجاه الازاحة سيكون منطبقاً على اتجاه $\mathbf{E}_m$. وسنفرض ان الغيمة الشحنية تتحرك وهي محافظة على متانتها خلال هذه الازاحة ، أي لايحدث تشويه في الغيمة نتيجة لتعرضها للمجال الكهربائي المتسقطب . ويمكن تعيين الازاحة x من توازن القوى المؤثرة على النواة . فالقوة ZeE_m تعمل باتجاه المجال ، على حين تعمل القوة الكهروستاتيكية بين النواة والغيمة الشحنية على المحافظة على الهيئة الابتدائية للذرة . وحسب قانون كاوس نجد أن الشحنة السالبة التي تجذب النواة هي ذلك الجزء من الغيمة الكائن داخل كرة نصف قطرها x . واذا كانت الكثافة الالكترونية في الغيمة منتظمة لأصبحت هذه الشحنة مساوية لـ Zex^3/R_0^3 . لذا :

$$\frac{(Ze)(Zex^3/R_0^3)}{4\pi\epsilon_0 x^2} = ZeE_m, \qquad (5\text{–}11)$$

أو

$$Zex = 4\pi\epsilon_0 R_0^3 E_m. \qquad (5\text{–}12)$$

وبما ان ثنائي القطب الذري المتولد في هذه العملية هو :

$$\mathbf{p}_m = Ze\mathbf{x},$$

عندئذ يمكن مقارنة المعادلة (12-5) مع المعادلة (8-5) ، وبذلك ينتج :

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 R_0^3. \qquad (5\text{–}13)$$

ويمكن أختبار النموذج الذري الذي وصفناه تواً بمقارنة النتائج المستخلصة منه مع النتائج المشتقة من مصادر أخرى . وعلى سبيل المثال بالامكان دمج المعادلة (13-5) مع معادلة كلوزيوس ــ موستي (المعادلة 10-5) لحذف α . وعندئذٍ نحصل على نصف القطر الذري R_0 من المعادلة الناتجة بدلالة الكميات المعينة تجريبياً . و R_0 التي نحصل عليها بهذه الطريقة تتفق بشكل معقول مع النتائج المستمدة من تجارب أخرى ، وبالاخص في تلك الحالات التي يكون فيها النموذج ملائماً . وقيمة R_0 تبلغ مرتبة قدرها أنكستروم واحد ، أي 10^{-10} m (لاحظ المسألة 1-5) .

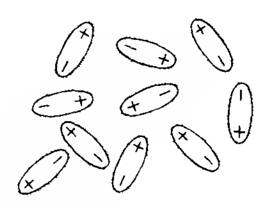
ان قابلية الاستقطاب المشتقة في المعادلة (13-5) ذات قيمة ثابتة ومستقلة عن المجال المستقطب ، وبذلك تقودنا الى الحصول على قيمة ثابتة للمعامل K ، وبهذا يوصف العازل بأنه خطي .

5-3* الجزيئات القطبية . صيغة لانجفن ــ دباي
Polar molecules The Langevin-Debye formula

أشرنا في البند السابق الى ان الجزيئة القطبية تمتلك عزم ثنائي قطب دائمي والجزيئة القطبية تتكون على الاقل من صنفين مختلفين من الذرات . خلال عملية التكوين الجزيئي قد تنتقل جميع الالكترونات أو قسم منها من صنف ذري الى الصنف الاخر ، وبذلك ينتج ترتيب الكتروني جديد يمتاز بأن يكون مركز الشحنات الموجبة للجزيئة غير منطبق على مركز الشحنات السالبة فيها . واذا أخذنا قطعة عينية من عازل قطبي لوجدناها غير مستقطبة في حالة غياب المجال الكهربائي ، وذلك لان ثنائيات الاقطاب فيها تكون باتجاهات عشوائية مختلفة كما هو مبين في الشكل (3-5) . يعرف الاستقطاب وفق الصيغة الآتية :

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta v} \sum \mathbf{p}_m, \qquad (5\text{–}14)$$

اذ يمتد الجمع ليشمل جميع الجزيئات الموجودة في العنصر الحجمي Δv . واذا كانت ثنائيات الاقطاب $\mathbf{p}_m$ باتجاهات عشوائية مختلفة فان ناتج الجمع سيتلاشى بطبيعة الحال



الشكل 3-5 توزيع عشوائي لثنائيات أقطاب دائمية .

واذا سلط مجال كهربائي على عازل قطبي ، لتأثرت ثنائيات الاقطاب المنفردة بعزوم دورانية ، وهذه العزوم تجعلها تميل الى التراصف مع اتجاه المجال . وقد يكون التراصف كاملاً فيما لو كان المجال بدرجة كافية من الشدة ، وعند ذلك يصل الاستقطاب الى قيمة الاشباع وهي :

$$\mathbf{P}_s = N\mathbf{p}_m, \qquad (5\text{–}15)$$

اذ ان N ترمز لعدد الجزيئات لوحدة الحجم من العازل . والى جانب التراصف عادة يحدث تأثير آخر وهو توليد ثنائيات أقطاب محتثة . والان سنهمل التأثير الناجم عن ثنائيات الاقطاب المحتثة ، ولكننا سنضيفه في الآخر .

وعندما تكون شدة المجال الكهربائي المسلط طبيعية . فإن إستقطاب العازل القطبي يكونُ عادة بعيداً عن قيمة الاشباع . كما ينقص الاستقطاب كلما رفعت درجة حرارة العازل . وافتقار العازل الى الحصول على التراصف التام في ثنائيات الأقطاب يعود الى الطاقة الحرارية لجزيئاته ، حيث تعمل الطاقة على ابقائها في إتجاهات عشوائية مختلفة . ويمكن حساب متوسط العزم الفعال لثنائي قطب الجزيئة الواحدة بواسطة قاعدة مستمدة من الميكانيك الاحصائي . وتنص هذه القاعدة على أن إحتمالية إيجاد جزيئة معينة ذات طاقة W في درجة حرارة T تتناسب مع :

$$e^{-W/kT}, \tag{5-16}$$

إذ أن k تمثل ثابت بولتزمان (Boltzmann's constant) و T درجة الحرارة المطلقة . وسنأخذ الآن الشرح الكامل لأساس هذه القاعدة . مما لاشك فيه أن فكرة توزيع السرع لماكسويل في غاز تام التي تتضمن هذه القاعدة مألوفة لدى القارىء . نجد حسب قانون التوزيع لماكسويل أنَّ الاحتمالية لجزيئة ذات سرعة V تتناسب مع العامل

$$e^{-mv^2/2kT}$$

ولكن الجزيئات في الغاز التام لماكسويل تمتلك طاقة حركية قدرها $1/2\ mv^2$. وفي الحالات العامة فإن W المشار اليها في المعادلة (16-5) يجب أن تشمل الطاقة الحركية W_k والطاقة الكامنة W_p معاً . ولهذا يأخذ العامل الصيغة الآتية .

$$e^{-W_k/kT}e^{-W_p/kT} \tag{5-17}$$

إن الطاقة الكامنة لثنائي قطب دائمي p_o موضوع في مجال كهربائي $\mathbf{E_m}$ تساوي

$$W_p = -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}_m = -p_0 E_m \cos\theta, \tag{5-18}$$

اذ أن θ هي الزاوية المحصورة بين $\mathbf{p_o}$ والمجال الكهربائي . وبما أن الطاقة الحركية الجزيئية لا تعتمد على المجال الكهربائي ، فانه بالامكان إهمال توزيع السرع كلياً في الحسابات الآتية . العزم الفعال لثنائي القطب لجزيئة يساوي مركبته الموازية للمجال ، أي $p_o \cos\theta$. وباستخدام القاعدة المذكورة في أعلاه يمكن إيجاد القيمة المتوسطة لهذه الكمية وهي

$$\langle p_0 \cos\theta\rangle = \frac{\int p_0 \cos\theta\, e^{+p_0E_m \cos\theta/kT}\, d\Omega}{\int e^{+p_0E_m \cos\theta/kT}\, d\Omega}, \qquad (5\text{–}19)$$

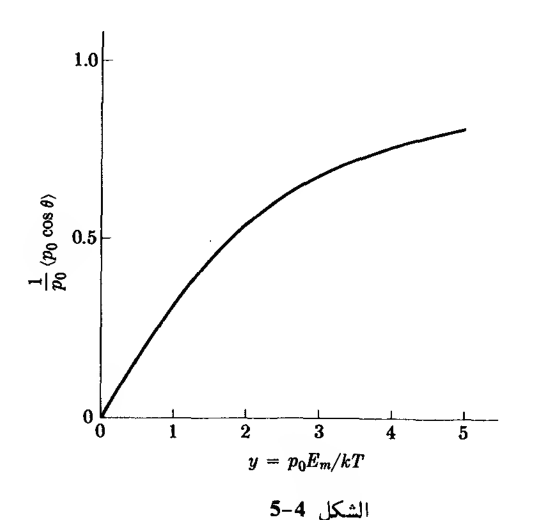
إذ أن $d\,\Omega$ تمثل عنصر الزاوية المجسمة والذي يمكن استبداله بالكمية $2\pi \sin\theta\, d\theta$ ، على أن توضع الغايتان 0 و π للزاوية θ . وبما ان p_0 و E_m و kT هي مقادير ثابتة فإنه يصبح بالإمكان انجاز التكامل في الحال . ومن الملائم أن نستفيد من التعريف الآتي :

$$y = \frac{p_0E_m}{kT}. \qquad (5\text{–}20)$$

وبهذا تؤول المعادلة (19–5) الى الصيغة :

$$\langle p_0 \cos\theta\rangle = p_0\left[\coth y - \frac{1}{y}\right], \qquad (5\text{–}21)$$

وهذه المعادلة تعرف باسم صيغة لانجفن . ورسم هذه الدالة مبين في الشكل 4–5 .



الشكل 4–5

رسم دالة لانجفن . القيمة التقاربية عندما $y \longrightarrow \infty$ تساوي واحد .

ويتبين من هذا الشكل أن المعادلة (21–5) لا تعطي تماماً الاشباع عند المجالات الشديدة . كما يتبين أن المنحني يأخذ خطاً مستقيماً عند القيم المنخفضة لـ y . إن هذه المنطقة الخطية من المنحني هي التي تهمنا عند درجات الحرارة الاعتيادية .

ولمعظم العوازل القطبية نجد أن عزم ثنائي القطب الجزيئي $\mathbf{p}_0$ يكون بحيث أن قيمة y أصغر بكثير من الواحد ($y \ll 1$) لمدى كامل من التغيرات في شدة المجال ، طالما بقيت درجات الحرارة أعلى من $250\,^{\circ}K$ تقريباً . ولهذا السبب تعد المواد العازلة التي تتكون من جزيئات قطبية ، خطية بصورة عامة .

وبما أن المنطقة الخطية من المعادلة (21–5) هي المنطقة المهمة ، فإنه من الملائم أن نفك الدالة coth y ، لنعبر عنها بسلسلة قوة power series ، ونبقي الحدود الرئيسة (أنظر الى المسألة 4–5) . وعند ذلك نجد أن الحد الأول يلغي الحد الأخير في المعادلة (21–5) ، وبهذا تصبح النتيجة كالآتي :

$$\langle p_0 \cos\theta \rangle \approx \frac{1}{3}\, p_0 y = \frac{p_0^2 E_m}{3kT}. \qquad (5\text{–}22a)$$

الحد $\langle p_0 \cos\theta \rangle$ يعني القيمة المتوسطة للعزم الفعال لثنائي القطب . وبذلك يكون الاستقطاب

$$P = N \langle p_0 \cos\theta \rangle$$

باتجاه المجال $\mathbf{E}_m$. وعليه يصبح بالإمكان كتابة المعادلة (5–22a) بالصيغة الآتية :

$$\frac{1}{N}\,\mathbf{P} = \frac{p_0^2}{3kT}\,\mathbf{E}_m. \qquad (5\text{–}22b)$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (8–5) ، يتضح أن قابلية الاستقطاب (ونعني بها عزم ثنائي القطب الجزيئي لوحدة المجال المستقطب) تساوي :

$$\alpha = \frac{p_0^2}{3kT}. \qquad (5\text{–}23)$$

عند اشتقاق هذه النتيجة أهملنا عزوم ثنائيات الأقطاب المحتثة ، وأبقينا مايمكن أن نسميه قابلية الاستقطاب التراصفية "orientational polarizability" . أما التأثيرات الناجمة عن ثنائيات الأقطاب المحتثة ، كتلك التي أخذناها بنظر الاعتبار في البند السابق ، فإنها تؤدي الى مايسمى بقابلية الاستقطاب التشويهية "deformation polaizability" ورمزها α_0 . وعليه تصبح قابلية الاستقطاب الكلية بصورة عامة بالشكل الآتي :

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{p_0^2}{3kT}, \qquad (5\text{–}24)$$

وهذا التعبير يعرف باسم معادلة لانجفن ـ دباي ، التي كان لها أهمية كبيرة في تفسير التراكيب الجزيئية .

5-4 * الاستقطاب الدائمي . الفيروكهربائية :
Permanent polarization. Ferroelectricity

لقد رأينا في البند الأول من هذا الفصل أن المجال الكهربائي الجزيئي $\mathbf{E}_m$ هو المسؤول عن استقطاب الجزيئات المنفردة . كما رأينا العلاقة بين $\mathbf{E}_m$ والمجال الكهربائي العيني $\mathbf{E}$ المعطاة بالمعادلة (7-5) . في معظم الحالات يتناسب الاستقطاب مع $\mathbf{E}$ ، وبهذا تتلاشى $\mathbf{E}_m$ عندما تقترب $\mathbf{E}$ من الصفر . ولكنه تحت ظروف معينة تكون المعادلة (7-5) منسجمة أيضاً مع الاستقطاب الدائمي . وعندما يكون المجال $\mathbf{E}$ صفراً ينتج :

$$\mathbf{E}_m = \frac{1}{3\epsilon_0}\,\mathbf{P}_0, \qquad (5\text{–}25)$$

أو بعبارة أخرى إذا كان الاستقطاب $\mathbf{P}_0$ موجوداً ، فإنه سيؤدي الى نشوء مجال كهربائي عند موضع الجزيئة ، وهذا المجال بدوره يعمل على إستقطاب الجزيئة نفسها . وبالتأكيد المجال المستقطب موجود ، ولكن إذا أدى هذا المجال الى تكوين إستقطاب مختلف عن $\mathbf{P}_0$ ، فعند ذلك لا يكون الحل منسجماً مع نفسه . وعليه ، إذا كان عدد الجزيئات لوحدة الحجم هو N ، لنتج :

$$\mathbf{P}_0 = N\alpha\mathbf{E}_m = \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}\,\mathbf{P}_0, \qquad (5\text{–}26)$$

وهذه المعادلة تتحقق عندما تكون

$$\mathbf{P}_0 = 0$$

أو

$$\frac{N\alpha}{3\epsilon_0} = 1. \qquad (5\text{–}27)$$

وبهذا نجد أن المعادلة (27-5) * تمثل الشرط اللازم توفره للحصول على إستقطاب دائمي .

---

* إن اشتقاق هذه المعادلة كان للمواد التي تتكون من صنف واحد من الجزيئات . في هذه المواد يتلاشى المجال $\mathbf{E}'$ (المشار اليه في البند 1-5) . وعندما يكون الهدف تطوير نظرية كمية يمكن تطبيقها على الحالات العامة ، ينبغي إستبدال المعادلة (27-5) بمجموعة من المعادلات الآنية . ولا نرى هنا أية ضرورة لهذه التعقيدات لاستيعاب اسس أصل الفيروكهربائية . ولهذا السبب سنتجنب مناقشتها هنا .

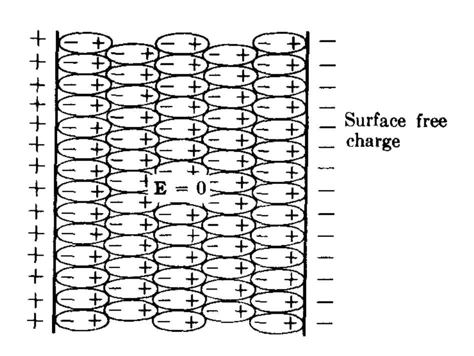
لمعظم المواد تكون قيمة $N\alpha/3\epsilon_0$ أقل من الواحد ، ولهذا السبب تكون هذه العوازل ذات سلوك إعتيادي . لكن الشرط المتمثل في المعادلة (27-5) يتحقق في عدد قليل من المواد الصلبة البلورية . هذه المواد تدعى فيروكهربائية لأن خواصها الكهربائية تكون مناظرة للخواص المغناطيسية للمواد الفيرومغناطيسية . ومن أشهر المواد الفيروكهربائية هي تيتانيت الباريوم $BaTiO_3$. هذه المادة تكتسب عزماً مغناطيسياً دائمياً عند درجات حرارة أقل من $120\,^{\circ}C$. وتدعى هذه الدرجة الحرارية بأسم نقطة كيوري للمادة .

إن حالة الاستقطاب لمادة فيروكهربائية تعد نسبياً مستقرة ، ويمكنها أن تدوم لفترات زمنية طويلة . وقد تكون هذه النتيجة مدهشة الى حد ما ، وذلك لأن العينة المستقطبة واقعة تحت تأثير مجالها المعاكس للاستقطاب . وهذا المجال المعاكس للاستقطاب قد يكون كبيراً نوعاً ما معتمداً في ذلك على الشكل الهندسي للعينة . والمجال المعاكس للاستقطاب يحصل على أقصى قيمة له لعينة بشكل شريحة مسطحة مستقطبة باتجاه عمودي على وجهيها . واذا كانت أبعاد الشريحة كبيرة بالمقارنة مع سمكها ، لحصلنا على الآتي :

$$\mathbf{E}_d = -\frac{1}{\epsilon_0}\mathbf{P}. \qquad (5\text{-}28)$$

طبقاً لما شاهدناه في البند (1-5) . والواقع أن الاستقرارية العالية في المادة الفيروكهربائية المستقطبة تعود الى حقيقة أنه لا وجود لمجال معاكس للاستقطاب مؤثر على العينة حتى لو كانت بشكل شريحة . ويمكن ان تستقطب العينة العازلة عند وضعها بين لوحين متوازيين موصلين مسلط عليهما فرق جهد عالٍ . في هذه العملية تتعادل ، الى حد كبير ، الشحنات الحرة على اللوحين مع الشحنات السطحية المقيدة ، تماماً كما يحدث في حالة استقطاب عازل تقليدي . غير أن الحال سيختلف فيما اذا جُعل اللوحان المتوازيان يمتلكان جهداً متساوياً وذلك بتوصيلهما بدائرة قصيرة . سنجد الآن أن حالة استقطاب العينة الفيروكهربائية تبقى فعالة على الرغم من ذلك ، حيث تبقى الشحنات الطليقة في مواضعها محاولة التعادل مع الشحنات المقيدة . وهذا الوضع مبين في الشكل (5-5) ، حيث تعمل الشحنات المقيدة على إبقاء الشحنات الطليقة في مكانها . المجال العيني داخل العينة الفيروكهربائية يساوي صفراً ، هذا فضلاً عن أن المجال الكهربائي الخارجي هو الآخر صفر . وعند ذلك يصعب تمييز هذه العينة المستقطبة عن أية مادة عازلة تقليدية غير مستقطبة .

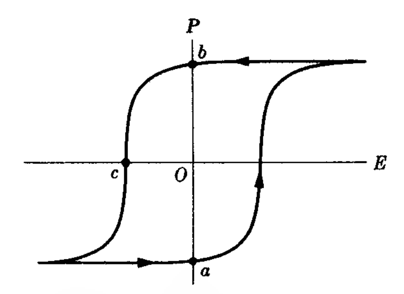
والآن لو سلطنا فرق جهد باتجاه معاكس على اللوحين المتوازيين المحيطين بالعينة الفيروكهربائية المستقطبة ، لأنعكس الاستقطاب في العينة ، ولإنسابت شحنة



الشكل 5-5 عينة مستقطبة من مادة فيروكهربائية

طليقة بعلامة معاكسة الى اللوحين من الدائرة الكهربائية الخارجية ، كافية لا لمعادلة الشحنة الطليقة التي كانت أصلاً موجودة فحسب ، ولكن لمعادلة الشحنة المقيدة الجديدة أيضاً . وبهذا يمكن أن تستخدم الشريحة الفيروكهربائية الموضوعة بين لوحين موصلين كعنصر اساس لأداة ذاكرة ، حيث تكون قادرة على خزن $\pm$ أو $\mp$ ، كما ان استقطابها يدوم حتى في حالة غياب المجال الكهربائي الخارجي . ويمكن قراءة العدد $\pm$ أو $\mp$ باستخدام فرق جهد عبر العينة . فاذا كان المجال الكهربائي المسلط باتجاه الاستقطاب الأصلي ، لن تمر الشحنة خلال الدائرة الكهربائية الخارجية . أما اذا كان فرق الجهد معاكساً للاستقطاب الأصلي ، فستنساب الشحنة خلال الدائرة الخارجية نتيجة لانعكاس إتجاه الاستقطاب في العينة الفيروكهربائية .

يكون الاستقطاب في المادة الفيروكهربائية مستقراً خلال عكس المجال الكهربائي ، ولكن بشرط أن لا يكون هذا المجال كبيراً جداً . والشكل (6-5) يبين المنحني البياني المرسوم بين الاستقطاب على محور y والمجال الكهربائي على محور x بصورة كاملة . ويتضح من شكل هذا المنحني انه في حالات المجالات المنخفضة تكون هناك قيمتان لـ P مقابل كل قيمة لـ E . ويدعى هذا المنحني الكامل باسم دورة التخلف . وكلمة hysteresis باللاتيني تعني "يتخلف" . وواضح من الشكل ان متجه الاستقطاب يتخلف (أو يتأخر) عن متابعة متجه المجال الكهربائي . النقطتان b و a تمثلان وضع الاستقرار عندما تكون شدة المجال صفراً ، كما تمثلان كميات الاستقطاب $\pm$ و $\mp$ على الترتيب . أما النقطة c فتمثل شدة المجال الكهربائي التي يجب تجاوزها لكي ينعكس الاستقطاب .

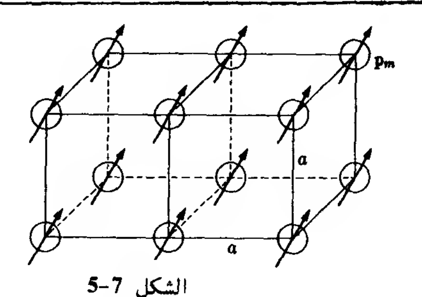


الشكل 5-6 منحني التخلف لعينة فيروكهربائية

مسائل

5-1 استخدم معادلة كلوزيوس لتعيين قابلية الاستقطاب للذرات في جزيئات الهواء : N_2 و O_2 . [لاحظ أنه بالإمكان الحصول على المتوسط الوزني فقط لقابليات الاستقطاب للنيتروجين وللاوكسجين من المعادلة (5-10)] . ادمج هذه النتيجة مع النظرية المعطاة في البند 5-2 لتعيين القيمة المتوسطة للذرة في جزيئة هواء .

5-2 يبين الشكل (5-7) شبيكة مكعبة بسيطة من الجزيئات التي جميعها تمتلك ثنائيات أقطاب متساوية العزوم ($\mathbf{p}_m$) بالمقدار والاتجاه . دعنا نوجه إهتمامنا على جزيئة واحدة معينة ولتكن الجزيئة j . ومن الواضح انه يوجد في جوار هذه الجزيئة ست جزيئات تقع على بعد قدره a عنها ، ويلي ذلك في الجوار الأبعد اثنتا عشرة جزيئة تبعد $\sqrt{2}a$، عن الجزيئة j ، وهلم جرا . جد المجال الكهربائي عند موقع الجزيئة j الناشيء عن ستة عزوم لأقرب الجزيئات المجاورة ، خذ اتجاهات كيفية لـ $\mathbf{p}_m$. (دع الخطوط التي تصل j باقرب ست جزيئات مجاورة تمثل المحاور x و y و z . وللسهولة خذ $\mathbf{p}_m$ بالمستوي xz بحيث يصنع زاوية قدرها θ مع المحور x) .



الشكل 5-7

جزء من التنسيق البسيط المكعب الشكل للجزيئات التي كل منها يتكون من ثنائي قطب عزمه $\mathbf{P}_m$.

5-3 استخدم نتيجة المسألة 5-1 لقابلية الاستقطاب الذرية للنيتروجين ، لحساب الازاحة النسبية بين نواة ذرة النتروجين والغيمة الالكترونية عند مجال شدته $E_m = 3 \times 10^6 V/m$. قارن هذه الازاحة مع نصف قطر الذرة المحسوب من المسألة 5-1 .

5-4 باستخدام المسلسلة المعروفة لفك e^y ، فك $\coth y$ واستخرج المعادلة (5-22a) من المعادلة (5-21) . استمر خطوة أخرى واستخرج حداً آخر في المسلسلة (5-22a) .

5-5 يعد الماء جزيئة قطبية لا يصح تطبيق معادلة كلوزيوس عليها . ومع ذلك افرض صلاحية هذه المعادلة وطبقها لتعيين p_0 لجزيئة الماء .

الفصل السادس

الطاقة الكهروستاتيكية
ELECTROSTATIC ENERGY

من الممكن تبسيط العديد من المسائل في الميكانيك الى درجة كبيرة باستخدام المفاهيم المتعلقة بالطاقة . وبهذا فانه من المفيد ان نستخدم طرق الطاقة عند دراسة السلوك الميكانيكي لمنظومة كهربائية . وبصورة عامة يمكن تقسيم طاقة منظومة من الشحنات الى طاقة كامنة وأخرى حركية ، بطريقة مشابهة تماماً لأية منظومة ميكانيكية . لكن الطاقة الكلية لمنظومة شحنية واقعة تحت ظروف ستاتيكية تعد طاقة كامنة . ولهذا السبب سيهمنا بشكل خاص دراسة الطاقة الكامنة الناشئة عن التأثيرات الكهربائية المتبادلة للشحنات والتي تدعى الطاقة الكهروستاتيكية .

بينا في البند (4-2) أن الطاقة الكهروستاتيكية لشحنة نقطية ترتبط بالطاقة الكامنة U عند موضع الشحنة النقطية . والحقيقة أن الشغل (work) المنجز على شحنة نقطية قدرها q لنقلها من الموضع A الى الموضع B يساوي :

$$= \int_A^B \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{l} = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$= q\int_A^B \mathbf{grad}\ U \cdot d\mathbf{l} = q(U_B - U_A). \qquad (6\text{–}1)$$

وهنا قد تم اختيار القوة الميكانيكية $\mathbf{F_m}$ لكي تعادل بالضبط القوة الكهربائية $q\mathbf{E}$ عند كل نقطة من نقاط المسار . تحت هذه الظروف نجد أن الجسم المشحون لا يتحرك بتعجيل ، وأن المعادلة (6-1) تمثل التغير الحاصل في الطاقة الكهروستاتيكية للشحنة نتيجة لانتقالها من نقطة A الى نقطة B .

وبالإمكان إستخدام أساليب مماثلة على منظومات شحنية أكثر تعقيداً من تلك المنظومة . والحقيقة أن الطاقة الكهروستاتيكية لتوزيع شحني كيفي يمكن حسابها وذلك باعتبارها تساوي الشغل اللازم بذله لتجميع هذا التوزيع دون أن نضفي عليه أشكالاً أخرى من الطاقة .

6-1 الطاقة الكامنة لمجموعة من الشحنات النقطية :
Potential energy of a group of point charges

إن الطاقة الكهروستاتيكية لمجموعة مكونة من m من الشحنات النقطية تعني الطاقة الكامنة للمنظومة نسبة الى الحالة التي تكون فيها جميع الشحنات النقطية على بعد لا نهائي احداها عن الأخرى . ويمكن الحصول على هذه الطاقة بطريقة سهلة نوعاً ما ، وذلك بحساب الشغل اللازم لتجميع هذه الشحنات وجلبها واحدة تلو الأخرى من اللا نهاية . وطبيعي أن جلب الشحنة الأولى ووضعها في مكانها لا يتطلب بذل شغل ، بيد أن جلب الشحنة الثانية يتطلب إنجاز شغل قدره

$$\Delta W_2 = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \tag{6-2}$$

إذ أن

$$r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|.$$

وبالنسبة لنقل الشحنة الثالثة q_3 نلاحظ أن :

$$\Delta W_3 = q_3\left[\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}\right]. \tag{6-3}$$

وعلى نفس الطراز يمكن ايجاد الشغل اللازم إنجازه لجلب الشحنة الرابعة ، والشحنة الخامسة ، وهلم جرا ... وعلى هذا الأساس تصبح الطاقة الكهروستاتيكية الكلية لتجميع المنظومة المكونة من m من الشحنات مساوية لمجموع ΔW لكل الشحنات ، أي

$$W = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}{}' \frac{q_k q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{kj}} \tag{6-4}$$

إذ تشير العلامة (′) المؤشرة على علامة الجمع الثانية الى أن الحد $k = j$ مستثنى من الجمع .

ويمكن كتابة المعادلة (6-4) بطريقة مختلفة نوعاً ما ، وذلك بملاحظة أن القيمة النهائية للجهد U عند الشحنة النقطية j تساوي :

$$U_j = \sum_{k=1}^{m}{}' \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{kj}}. \tag{6-5}$$

وبهذا تصبح الطاقة الكهروستاتيكية للمنظومة هي :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} q_j U_j. \tag{6-6}$$

وعندما يتم تجميع الشحنات النقطية في وسط عازل خطي لا نهائي بدلاً من الفراغ ينبغي عند ذلك استبدال ϵ_0 بسماحية الوسط العازل ϵ في المعادلات (6-2) و (6-3) و (6-4) ، أما المعادلة (6-6) فتبقى على حالها بدون تغيير . وسيتبين في البند الآتي أن لهذه المعادلة الأخيرة صفة عمودية نوعاً ما . إنها تصح حتى لو كانت مجموعة الشحنات النقطية واقعة في أكثر من وسطٍ عازلٍ واحد ، بل وتصح كذلك حتى في حالة استخدامها على الموصلات ذات الحجم المحدود .

6-2 الطاقة الكهروستاتيكية لتوزيع شحني :
Electrostatic energy of a charge distribution

في هذا البند سنحسب الطاقة الكهروستاتيكية لتوزيع كيفي من الشحنات ذي كثافة حجمية ρ وكثافة سطحية σ . وقسم من هذه الشحنة قد يستقر على سطوح الموصلات التي سنفترض وجودها في المنظومة . كما سنفترض كذلك أن العوازل الموجودة في المنظومة هي عوازل خطية . وهذا الافتراض ضروري لكي يكون الشغل المنجز على تجميع المنظومة الشحنية ووضعها في حالتها النهائية مستقلاً عن المسار المتبع للوصول الى تلك الحالة .

لنفرض اننا جمعنا التوزيع الشحني بجلب زيادات (أي اضافات) من الشحنة قيمة كل زيادة δq من نقطة مرجع ذات جهد قدره صفر $(U_A = 0)$. وبعد أن يتم تجميع قسماً من التوزيع الشحني نفرض ان الجهد عند نقطة معينة في المنظومة يصبح $U'(x, y, z)$. عندئذٍ يصبح الشغل اللازم لوضع شحنة اضافية قدرها δq في تلك النقطة ، حسب المعادلة (6-1) ، مساوياً :

$$\delta W = U'(x, y, z)\, \delta q. \tag{6-7}$$

ويمكن إضافة هذه الزيادة في الشحنة (δq) الى عنصر حجمي موضوع عند النقطة (x, y, z) ، حيث تكون $\delta q = \delta \rho \Delta v$ ، أو اضافتها الى عنصر سطحي عند النقطة ذاتها ، حيث تصبح قيمة الزيادة هذه المرة $\delta q = \delta\sigma\, \Delta a$. عندئذ يمكننا الحصول على الطاقة الكهروستاتيكية الكلية التي يحصل عليها التوزيع الشحني بعد تجميعه ، بجمع كل أجزاء الشغل المنجز المعبر عنها بالمعادلة (6-7) .

ولما كان الشغل اللازم بذله لتجميع التوزيع الشحني مستقلاً عن الترتيب الذي تم بموجبه عملية التجميع ، فانه من الافضل ان نختار نمطاً من التجميع يجعل حساب مجموع الزيادات في الشغل (أي δW's) أمراً سهلاً . وفي هذا النمط يتم جلب جميع أجزاء المنظومة الشحنية بشكل متناغم الى أن تحصل المنظومة على وضعها النهائي . وهذا يعني أن جميع الكثافات الشحنية تكون بنفس النسب الكسرية من القيم النهائية عند أية لحظة زمنية من لحظات عملية تجميع الشحنات . دعنا ندعو هذه النسبة الكسرية α . فاذا كانت القيم النهائية للكثافات الشحنية معطاة بالدوال $\rho(x, y, z)$ و $\sigma(x, y, z)$ ، فان الكثافات الشحنية عند أية لحظة زمنية ستصبح $\alpha\, \rho\, (x, y, z)$ و $\alpha\, \sigma\, (x, y, z)$. كما أن الزيادات في هذه الكثافات الشحنية ستصبح $\delta\, \rho = \rho\, (x, y, z)\, \delta\, \alpha$ و $\delta\, \sigma = \sigma\, (x, y, z)\, \delta\, \alpha$. وباجراء عملية الجمع لكل الاجزاء المتمثلة بالمعادلة (6-7) يمكن الحصول على الطاقة الكهروستاتيكية الكلية للمنظومة وقدرها .

$$W = \int_0^1 \delta\alpha \int_V \rho(x, y, z) U'(\alpha; x, y, z)\, dv + \int_0^1 \delta\alpha \int_S \sigma(x, y, z) U'(\alpha; x, y, z)\, da. \qquad (6\text{-}8)$$

ولما كانت جميع الشحنات بنفس النسب الكسرية α من القيم النهائية لها ، فان الجهد :

$$U'(\alpha; x, y, z) = \alpha U(x, y, z),$$

إذ ان U تمثل القيمة النهائية للجهد عند النقطة (x, y, z) . وبالتعويض عن هذه القيمة في الجهد نجد أن اجراء التكامل على α يصبح سهلاً . عندئذ تؤول المعادلة (6-8) الى الصيغة الآتية :

$$W = \tfrac{1}{2}\int_V \rho U\, dv + \tfrac{1}{2}\int_S \sigma U\, da, \qquad (6\text{-}9)$$

وهي الصيغة المطلوبة والمعبرة عن طاقة التوزيع الشحني .

صحيح أن المعادلة (6-9) تشمل المنظومات التي تتضمن أجساماً موصلة ، الا أنه من الملائم أن نفصل الموصلات عن المنظومة الشحنية ونعالجها بشكل مستقل . والحد الاخير من المعادلة (6-9) يعبر عن التكاملات المنجزة على سطوح تلك الموصلات . وبما أن الموصل يعدُّ بمثابة منطقة متساوية الجهد فإنه بالامكان انجاز كل من هذه التكاملات كالآتي :

$$\tfrac{1}{2}\int_{\text{conductor } j} \sigma U\, da = \tfrac{1}{2} Q_j U_j, \qquad (6\text{-}10)$$

حيث تشير Q_j الى الشحنة التي يحملها الموصل j . وبهذا تؤول المعادلة (6-9) الى الصيغة الآتية :

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho U\, dv + \frac{1}{2}\int_{S'} \sigma U\, da + \frac{1}{2}\sum Q_j U_j, \tag{6-11}$$

والحد الاخير من هذه المعادلة يعبر عن مساهمة جميع الموصلات في طاقة المنظومة . وبهذا يقتصر التكامل السطحي في الحد الثاني من المعادلة على السطوح غير الموصلة فقط . وكما رأينا في الفصل الثالث فان العديد من المسائل ذات الاهمية العملية تتضمن شحنات طليقة مستقرة على سطوح الموصلات . وعند الاخذ بهذه الاعتبارات تؤول المعادلة (6-11) الى الآتي :

$$W = \frac{1}{2}\sum_j Q_j U_j. \tag{6-12}$$

وستتاح لنا الفرصة لاستخراج هذه المعادلة في بند قادم من هذا الفصل .

والمهم الآن هو مقارنة المعادلة (6-12) بالمعادلة (6-6) التي سبق اشتقاقها في حالة تجميع منظومة من الشحنات النقطية . ويبدو من الوهلة الأولى أن المعادلتين متماثلتان ، لكن الواقع غير ذلك حيث يوجد بينهما إختلاف جوهري . فعند إشتقاق المعادلة (6-12) بدأنا بموصلات غير مشحونة ، وبعد ذلك شحنت الموصلات بالتدريج باضافة زيادات من الشحنة عليها . وبهذا نجد أن الطاقة المعطاة وفق المعادلة (6-12) تشمل طاقة التأثير المتبادل زائداً الطاقة الذاتية . وعند اشتقاق المعادلة (6-6) جلبت الشحنات النقطية واحدة تلو الأخرى على شكل وحدات مستقلة . وبهذا نجد أن الطاقة المنجزة لتجميع الشحنة النقطية من أجزاء شحنية أصغر منها ، وهي ماتعرف باسم الطاقة الذاتية ، غير موجودة في هذه الحالة . والواقع أن الطريقتين تعطيان النتيجة نفسها لتجميع منظومة من الشحنات النقطية ، كما يتبين من الفحص الدقيق للمعادلة (6-12) . ويمكن كتابة جهد الموصل j كمجموع لحدين بالشكل الآتي :

$$U_j = U_{j1} + U_{j2}, \tag{6-13}$$

إذ أن U_{j1} تمثل الجهد الناشيء عن شحنة الموصل j نفسه . و U_{j2} تمثل الجهد الناشيء عن الشحنة التي تحملها الموصلات الأخرى . وبهذا تؤول المعادلة (6-12) الى الآتي :

$$W = \frac{1}{2}\sum_j Q_j U_{j1} + \frac{1}{2}\sum_j Q_j U_{j2}. \tag{6-14}$$

إن الحد الأول من هذه المعادلة يمثل الطاقات الذاتية المختلفة للموصلات . ولكل طاقة ذاتية ، وقدرها $\frac{1}{2}Q_jU_{j1}$ ، تعتمد على الظروف البيئية المحيطية بالموصل (وذلك لأن توزيع الشحنة على كل موصل ترتب نفسها حسب الظروف المحيطة به) . هذا فضلاً عن أن الجهد الوحيد الذي يرافق الموصل j والذي يحمل معنى فيزيائياً هو الجهد الكلي U_j . ولهذا فان تجزئة الطاقة ، كما هو مبين في المعادلة (14–6) ، لا تعني الشيء الكثير بصورة عامة . ومع ذلك لو كانت الموصلات صغيرة الى حد كبير بحيث يمكن عدُّها بمثابة شحنات نقطية من حيث وجهة النظر العينية ، فان إعادة توزيع الشحنة على ''النقطة'' لا يكون ذا اهمية تذكر . وعند ذلك يمكن إعتبار كل طاقة ذاتية مستقلة عن الظروف البيئية المحيطة بها . وبالأضافة الى ذلك ، مادمنا نعني بالرمز U_{j2} الجهد عند الشحنة النقطية j ، فإن الطاقة اللازمة لوضع مجموعة من الموصلات الصغيرة المشحونة مسبقاً في المكان المحدد لها تتمثل بالحد الثاني من المعادلة (14–6) ، وهذا مايكافيء المعادلة (6–6) .

6–3 كثافة الطاقة لمجال كهروستاتيكي
Energy density of an electrostatic field.

قمنا في البند السابق باشتقاق تعبير للطاقة الكهروستاتيكية لتوزيع كيفي من الشحنات الطليقة . وهذا التعبير المتمثل في المعادلة (9–6) يتضمن تكاملاً صريحاً يغطي التوزيع الشحني بأكمله . كما يمكننا كذلك التعبير عن الطاقة الكهروستاتيكية للمنظومة بطريقة مختلفة ، وهذه الصيغة البديلة للطاقة غالباً ماتكون مفيدة . وبوسعنا إجراء تحويرات رياضية على المعادلة (9–6) وتحويلها الى معادلة تكاملية تحتوي على المتجهين **E** و **D** للمنظومة .

وهنا أيضاً نأخذ توزيعاً كيفياً لشحنة طليقة مميزة بالكثافتين ρ و . وللسهولة سنفرض ان المنظومة الشحنية محددة ، أي بالامكان إنشاء سطح مغلق ذي أبعاد محدودة محيط بجميع الشحنة الطليقة . وبالاضافة الى ذلك نفرض أن جميع الكثافات السطحية للشحنة الطليقة ، σ ، تستقر على سطوح الموصل . والحقيقة لا ضرورة لوضع هذا القيد مطلقاً ، وذلك لأنه بالإمكان بسط الكثافة السطحية للشحنة الواقعة على الحدود الفاصلة بين عازلين قليلاً ومعاملتها ككثافة حجمية ، ρ . هاتان الكثافتان ترتبطتان بالازاحة الكهربائية وفق العلاقتين :

$$\rho = \operatorname{div} \mathbf{D}$$

و

$$\sigma = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$$

العلاقة الأولى يصلح استخدامها في المناطق العازلة ، والعلاقة الثانية يصلح إستعمالها على سطوح الموصلات . وبهذا تؤول المعادلة (9-6) الى الآتي :

$$W = \tfrac{1}{2}\int_V U \operatorname{div} \mathbf{D}\, dv + \tfrac{1}{2}\int_S U\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\, da. \tag{6-15}$$

وهنا يشير التكامل الحجمي الى المنطقة التي تكون فيها قيمة **divD** مختلفة عن الصفر ، وهذه المنطقة تقع خارج الموصلات . أما التكامل السطحي فيغطي جميع الموصلات .

ويمكن تحويل التكامل الأول في المعادلة (15-6) باستخدام المتطابقة الاتجاهية (I-6) من الجدول (1-1) ، والتي هنا تأخذ الصيغة الآتية :

$$U \operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} U\mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{grad}\, U.$$

وعند إجراء هذا التحويل ينتج تكاملان حجميان ، التكامل الأول يمكن تغييره الى تكامل سطحي حسب نظرية التباعد . وبعد ذلك نستعمل العلاقة .

$$\mathbf{E} = -\,\mathbf{grad}\, U$$

وبهذا تؤول المعادلة (15-6) الى الصيغة الآتية :

$$W = \tfrac{1}{2}\int_{S+S'} U\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}'\, da + \tfrac{1}{2}\int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}\, dv + \tfrac{1}{2}\int_S U\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\, da. \tag{6-16}$$

والآن دعنا نبسط هذه المعادلة . السطح $S + S'$ الذي ينبغي إجراء التكامل عليه يمثل السطح الكلي الذي يحيط بالحجم V . وهذا السطح يتكون من جزأين ، الجزء الأول S يمثل سطوح جميع الموصلات في المنظومة ، والجزء الآخر S' يمثل السطح الذي يحيط بالمنظومة من الخارج والذي يمكن إختيار موضعه في اللانهاية ، وفي كلتا الحالتين يكون العمود $\mathbf{n}'$ مشيراً خارج الحجم V . وفي التكامل الاخير نجد أن العمود **n** يشير خارج الموصل ، وهذا يعني أنه يشير نحو الحجم V . ولهذا السبب فان التكامل السطحي الأول على السطح S يمحو التكامل الأخير (لاحظ المعادلة 16-6) . بقي أن نثبت أن التكامل السطحي على السطح S' يساوي صفراً .

واذا كان التوزيع الشحني الذي نحن بصدده محدداً ، فان الجهد الناشيء عنه ، عند المسافات البعيدة ، يتناسب عكسياً مع البعد ، أي طردياً مع r^{-1} . على حين

نجد أن الازاحة **D** تتناسب طردياً مع r^{-2} . أما مساحة السطح المغلق الذي يمر بالنقطة التي تقع على بعد r فإنها تتناسب طردياً مع r^2 . ولهذا نجد أن قيمة التكامل السطحي على السطح S' الذي يحيط بمنظومتنا الشحنية عند البعد r يتناسب طردياً مع r^{-1} . فاذا ماأبعد السطح S' الى مالانهاية ، أصبحت قيمة هذا التكامل صفراً .

واذا فرضنا أن صافي الشحنة التي يحملها التوزيع الشحني صفراً ، لأمكن إعتبار التوزيع بمثابة متعدد أقطاب ، وعندئذ يتضاءل الجهد عند النقاط البعيدة بشكل أسرع من r^{-1} . وهنا أيضاً يتلاشى دور S' في المساهمة في بناء الطاقة . وبهذا نحصل على التعبير الآتي للطاقة الكهروستاتيكية :

$$W = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}\, dv \tag{6-17}$$

حيث يغطي التكامل حجم المنظومة الكائن خارج الموصلات ، وهذا يعني أن التكامل يشمل جميع العوازل في المنظومة . وعندئذ يمكن تحديد التكامل لكي يشمل الفضاء بأجمعه ، طالما كان المجال الكهربائي **E** يساوي صفراً داخل الموصلات .

أين تقع الطاقة الكهروستاتيكية للمنظومة الكهربائية ؟ الواقع إن هذا السؤال لا يحمل معنى دقيقاً ، ومع ذلك فمن الملائم أن نتصور أن الطاقة مخزونة في المجال الكهربائي . والمعادلة (6–17) تبين أن هذا التصور على أقل تقدير هو ليس غير معقول ، كما تبين ، بالإضافة الى ذلك ، إن الطاقة موزعة بكثافة قدرها $1/2(\mathbf{D} . \mathbf{E})$ لوحدة الحجم . وهذا يقودنا الى التعريف الآتي لمفهوم كثافة الطاقة في المجال الكهروستاتيكي :

$$w = \frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}. \tag{6-18a}$$

وبما أن اشتقاق المعادلة (6–17) كان قد بني على أساس العوازل الخطية ، فإن كل عازل يميز بثابت السماحية ϵ ، هذا فضلاً عن أن المناقشة التي وردت في الفصول السابقة قد اقتصرت على العوازل ذات الاتجاه الواحد . وعليه نجد ان المعادلة (6–18a) تكافيء الصيغة الآتية :

$$w = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \tag{6-18b}$$

6-4 طاقة منظومة من الموصلات المشحونة . معاملات الجهد

Energy of system of charged conductors. Coefficients of potential.

أوضحنا في البند (12-3) ان هناك علاقة خطية بين الجهد والشحنة التي تحملها مجموعة من الموصلات . والحقيقة أن جهد أحد الموصلات في منظومة مكونة من N من الموصلات يعطى بالعلاقة :

$$U_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}Q_j \qquad (3\text{-}51)$$

إن اشتقاق هذه المعادلة قد أنجز في حالة وجود N من الموصلات في الفراغ . ومع ذلك فمن الواضح أن هذا الاشتقاق يصح ايضاً في حالة وجود عوازل في المنظومة ، طالما كانت العوازل خطية وخالية من الشحنات الطليقة . المعامل p_{ij} يمثل جهد الموصل i الناشيء عن وحدة الشحنة الموضوعة على الموصل j . وهذه المعاملات تدعى عادة معاملات الجهد coefficients of potential .

في البند (2-6) تم اشتقاق تعبير عن الطاقة الكهروستاتيكية لمجموعة مكونة من N من الموصلات ، وبالتحديد المعادلة (12-6) . وعند دمج هذه المعادلة بالمعادلة (51-3) نحصل على :

$$W = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} p_{ij}Q_iQ_j \qquad (6\text{-}19)$$

وبهذا تكون الطاقة دالة من الدرجة الثانية (أي تربيعية) quadratic للشحنات التي تحملها الموصلات المختلفة .

وبالامكان درج عدد من النصوص العامة حول المعاملات p_{ij} ، من أهمها :

(1) $p_{ij} = p_{ji},$

(2) جميع p_{ij} موجبة

(3) $p_{ii} - p_{ij} \geq 0$ لجميع قيم j

وأول هذه النصوص يأتي من المعادلة (19-6) التي تعبر عن W كدالة للشحنات ، أي $W(Q_1 \ldots Q_N)$ لذا :

$$dW = \left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right) dQ_1 + \cdots + \left(\frac{\partial W}{\partial Q_N}\right) dQ_N.$$

$$dW = \left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right) dQ_1 = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} (p_{1j} + p_{j1})Q_j\, dQ_1. \qquad (6\text{-}20)$$

وهذه الزيادة في الطاقة الكهروستاتيكية يمكن حسابها أيضاً بصورة مباشرة من المعادلة (6-1) . وبجلب dQ_1 من خزان ذي جهد قدره صفر نحصل على

$$dW = U_1 \, dQ_1 = \sum_{j=1}^{N} p_{1j} Q_j \, dQ_1 \tag{6-21}$$

المعادلتان (6-20) و (6-21) يجب أن تكونا متكافئتين لجميع القيم الممكنة لـ Q_j ، وهذا يدل ضمناً على أن :

$$\tfrac{1}{2}(p_{1j} + p_{j1}) = p_{1j},$$

أو

$$p_{j1} = p_{1j}. \tag{6-22}$$

والنص الثاني المذكور في اعلاه ، والذي يعني ضمناً بأن الجهد الناشيء عن شحنة موجبة يكون موجباً ، فيعدُّ أمراً بديهياً تقريباً ، ورغم ذلك يصعب إثباته بطريقة دقيقة . أما النص الثالث فيمكن تحقيقه وفقاً للمناقشة الاتية : لنفرض ان موصلاً معيناً ، وليكن i ، يحمل شحنة موجبة هي Q_i ، وأن الموصلات الاخرى غير مشحونة . فاذا أخذنا أحد هذه الموصلات وليكن $j \; (j \neq i)$ ، لوجدنا أن صافي عدد خطوط الازاحة التي تغادر هذا الموصل يساوي صفراً وذلك لانه لا يحمل شحنة كما ذكرنا . وهنا ينبغي ان نميز حالتين مختلفتين :

(أ) لا توجد خطوط للازاحة خارجة من الموصل j ولا خطوط داخلة عليه ، مما يدل على أن هذا الموصل هو منطقة متساوية الجهد . وهذا يعني أنه محجوب بواسطة موصل آخر ، إذ قد يكون الموصل j واقعاً داخل الموصل i على سبيل المثال ، وعند ذلك يكون جهده مساوياً لـ U_i . وفي هذه الحالة تكون $p_{ij} = p_{ii}$. واذا كان الموصل j داخل الموصل k فان $p_{ik} = p_{ij}$. وهنا نوجه انتباهنا نحو الموصل k في الحال .

(ب) خطوط الازاحة التي تغادر الموصل j تتعادل في العدد مع الخطوط الساقطة عليه . أما مصدر فيض الازاحة فهو الشحنة التي يحملها الموصل i . وبهذا يجب ان يصبح بالامكان تتبع خط الفيض الساقط على j والعائد الى الموصل i (ربما من خلال موصل آخر) . لذا يكون جهد الموصل i أعلى من جهد الموصل j ، أي أن :

$$U_i > U_j, \quad (\text{موجبة } Q_i)$$

أو

$$p_{ii} > p_{ij}. \quad (6-23)$$

ويجب ان نضيف علامة المساواة الى هذه المعادلة لكي تتضمن الحالة (أ) أيضاً .

ويمكن توضيح فائدة المعاملات p_{ij} بمثال بسيط . لنأخذ المسألة الآتية : مطلوب ايجاد جهد موصل كروي غير مشحون موضوع بجوار شحنة نقطية q وعلى بعد قدره r ، حيث $r > R$ و R تمثل نصف قطر الموصل الكروي . ان الجسم الكروي والشحنة النقطية يعدّان بمثابة منظومة مكونة من موصلين ، وعند ذلك يمكن استعمال العلاقة $p_{12} = p_{21}$. فاذا كانت الكرة تحمل شحنة قدرها Q و "النقطة" غير مشحونة ، لأصبح جهد "النقطة" مساوياً $Q/4\pi\epsilon_0 r$. لذا :

$$p_{12} = p_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$$

وواضح عندئذ أنه اذا امتلكت "النقطة" شحنة قدرها q وكانت الكرة غير مشحونة ، فان جهد الكرة سيصبح $q/4\pi\epsilon_0 r$.

6-5 معاملات السعة والحث :
Coefficients of capacitance and induction

المعادلة (3-51) التي سبق اشتقاقها في الفصل الثالث ومناقشتها مرة أخرى في البند السابق تمثل مجموعة مكونة من N من المعادلات الخطية التي تعبر عن جهد الموصلات بدلالة الشحنات التي تحملها هذه الموصلات . ومن الممكن حل هذه المجموعة من المعادلات لايجاد Q'_is ، عندئذ تأخذ هذه المعادلات الصيغة الآتية :

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} c_{ij} U_j, \quad (6-24)$$

إذ ان c_{ii} يدعى معامل السعة و c_{ij} $(i \neq j)$ معامل الحث . ويمكن بسهولة ايجاد المقلوب الحقيقي للمعادلة (3-51) للتعبير عن كل c بدلالة p_{ij} باستعمال المحددات .

إن خواص المعاملات c يمكن استنتاجها في الحال من خواص المعاملات p التي ناقشناها تواً . وبهذا نجد أن :

$$(2)\ c_{ii} > 0, \quad (1)\ c_{ij} = c_{ji}$$

(3) معاملات الحث تكون سالبة أو صفراً .

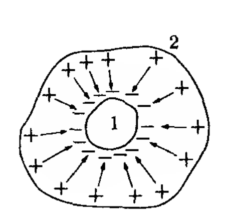
ويمكن دمج المعادلة (24-6) بالمعادلة (12-6) لاعطاء تعبير بديل للطاقة الكهروستاتيكية لمنظومة مكونة من N من الموصلات وهي :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij} U_i U_j. \tag{6-25}$$

6-6 المتسعات :

الموصلان القادران على خزن شحنتين متساويتين ومتعاكستين ($\pm Q$) بصورة مستقلة عما اذا كانت الموصلات الاخرى في المنظومة مشحونة أم غير مشحونة يشكلان ما يدعى بأسم متسعة . وهذه الاستقلالية عن الشحنات الاخرى تدل ضمناً على أن أحد الموصلين محجوباً بواسطة الآخر . وبعبارة أخرى ، فان مساهمة الشحنات الخارجية في جهد كل من الموصلين يجب ان تكون متساوية . ومثل هذه الوضعية مبينة في الشكل (1-6) حيث يشكل الموصلان 1 و 2 أداة من هذا النوع . وبصورة عامة اذا تكونت متسعة من الموصلين 1 و 2 ، لأمكننا كتابة الآتي :

$$\begin{aligned} U_1 &= p_{11}Q + p_{12}(-Q) + U_x, \\ U_2 &= p_{12}Q + p_{22}(-Q) + U' \end{aligned} \tag{6-26}$$



الشكل 1-6

الموصلان 1 و 2 يشكلان متسعة . هنا $p_{31} = p_{32}$ لأنه ، حسب قانون كاوس ، اذا كان هذان الموصلان غير مشحونين لوجب أن يكونا بنفس الجهد ، بغض النظر عن الشحنة التي يحملها الموصل 3 . وبالمثل يكون $p_{41} = p_{42}$.

اذ ان $\pm Q$ هما الشحنتان المختزنتان و U_x تمثل الجهد المشترك الناشيء عن الشحنات (الخارجية) الاخرى .

وعند طرح احدى المعادلتين (26-6) من الاخرى نحصل على :

$$\Delta U = U_1 - U_2 = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})Q \tag{6-27}$$

وبهذا يكون فرق الجهد بين الموصلين في المتسعة متناسباً طردياً مع الشحنة المختزنة Q . (بديهي ان الشحنة الكلية المختزنة تساوي صفراً ، ولهذا فقد أصطلح أن تدعى الشحنة التي يحملها أحد الموصلين بشحنة المتسعة) . ويمكن كتابة المعادلة (27-6) بالشكل الآتي

$$Q = C\,\Delta U, \tag{6-28}$$

اذ أن الكمية :

$$C = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})^{-1}$$

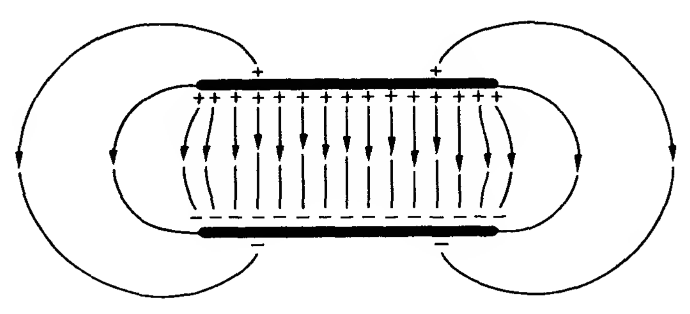
تدعى سعة المتسعة . ومن الواضح أن C تمثل الشحنة المختزنة لوحدة فرق الجهد ، وأن وحدة C حسب النظام mks هي كولوم/ فولت أو فاراد ، أي ان :

1 farad ≡ 1 coulomb/volt).

وباستخدام النتائج التي حصلنا عليها في البنود السابقة من هذا الفصل ، يصبح بالإمكان التعبير عن طاقة المتسعة المشحونة بالصيغة الآتية :

$$W = \frac{1}{2}C(\Delta U)^2 = \frac{1}{2}Q\,\Delta U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{6-29}$$

واذا تكونت المتسعة من موصلين لهما شكل هندسي بسيط ، لأصبح بالإمكان حساب السعة بطريقة تحليلية . وبهذا ، على سبيل المثال ، يكون من السهل جداً حساب سعة المتسعة ذات اللوحين المتوازيين ، والمتسعة الاسطوانية المكونة من إسطوانتين متحدتي المحور ، والمتسعة الكروية المكونة من كرتين متحدتي المركز ، وكذلك المتسعة المكونة من إسطوانة ومستوي . وسنقوم الآن باشتقاق سعة المتسعة ذات اللوحين المتوازيين (لاحظ الشكل 2-6) ، ونترك الحالات البسيطة الأخرى كتمرينات في نهاية الفصل .



الشكل 6-2
المجال الكهربائي المتكون بين لوحين متوازيين مشحونين بصورة متعاكسة

باستثناء المجال الكهربائي المتكون عند حافات لوحي المتسعة يكون المجال بين اللوحين منتظماً . والمتسعة المثالية هي تلك المتسعة التي تكون فيها المسافة الفاصلة بين اللوحين (d) صغيرة جداً بالمقارنة مع أبعاد المتسعة ، وعند ذلك يمكن إهمال تأثير المجال المشوه عند حافات المتسعة في الحالة المثالية . وعند ملء المنطقة المحصورة بين اللوحين بعازل ذي سماحية ϵ يصبح المجال الكهربائي المتكون بين اللوحين مساوياً :

$$E = \frac{1}{\epsilon}\sigma = \frac{Q}{\epsilon A}, \qquad (6\text{–}29')$$

حيث ترمز A لمساحة أحد لوحي المتسعة . وبهذا يكون فرق الجهد بين اللوحين مساوياً

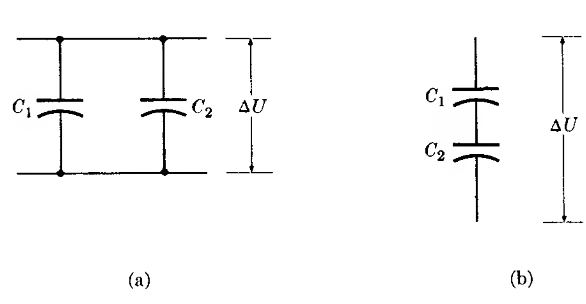
$$\Delta U = Ed$$

عند ذلك نحصل على التعبير الآتي لسعة المتسعة ذات اللوحين المتوازيين :

$$C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{\epsilon A}{d} \qquad (6\text{–}30)$$

ويرمز للمتسعة في الدوائر الكهربائية بالرمز ⊣⊢ عادة . وبالامكان ربط متسعتين أو أكثر بتوصيل أحد الموصلين للمتسعة الأولى بموصل من المتسعة الثانية ، وهلم جرا . ومن الطرق الممكنة لربط المتسعات هي طريقة التوصيل القائم على التوازي (الشكل 6-3 a) ، وطريقة التوصيل القائم على التوالي (الشكل 6-3 b) . وبعد أن يتم توصيل المتسعات بشكل أو بآخر، يبقى علينا أن نجد السعة المكافئة لمجموعة المتسعات . في حالة التوصيل القائم على التوازي تكون

الفولتية ΔU التي تظهر عبر أي من المتسعات مساوية للفولتية عبر المجموعة ، ولهذا تعطي السعة المكافئة وفقاً للعلاقة



الشكل 3-6

(أ) توصيل المتسعات على التوازي ، (ب) توصيل المتسعات على التوالي .

$$C = \frac{Q_{\text{total}}}{\Delta U} = C_1 + C_2. \qquad \text{(6–31a)}$$

وإذا ربطت متسعتان غير مشحونتين على التوالي ومن ثم شحنتا ، لتطلب قانون حفظ الشحنة أن تحصل كل متسعة على الشحنة نفسها . ولهذا تكون السعة المكافئة للمجموعة مرتبطة بسعة كل من السعتين C_1 و C_2 حسب العلاقة :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad \text{(6–31b)}$$

6-7 القوى والعزوم الدورانية Forces and torques

سبق أن طورنا في هذا الفصل عدداً من الطرق لحساب الطاقة الكهروستاتيكية لمنظومة شحنية . والآن سنبين كيف أن القوة المؤثرة على أحد الاجسام لمنظومة شحنية يمكن حسابها من معرفة الطاقة الكهروستاتيكية لهذه المنظومة . دعنا نفرض أننا نتعامل مع منظومة معزولة ذات مكونات مختلفة (موصلات وشحنات نقطية وعوازل)لنسمح الآن لا حد هذه المكونات الواقع تحت تأثير قوى كهروستاتيكية أن يعمل إزاحة صغير قدرها $d\mathbf{r}$. إن الشغل الميكانيكي الذي تنجزه المنظومة في مثل هذه الظروف يساوي :

$$\begin{aligned} dW_m &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz. \end{aligned} \qquad \text{(6–32)}$$

ولما كانت المنظومة معزولة فإن هذا الشغل المنجز ينبغي أن يكون على حساب الطاقة الكهروستاتيكية W ، وبعبارة أخرى :

$$dW + dW_m = 0 \qquad (6\text{-}33)$$

وبدمج المعادلتين (32-6) و (33-6) ينتج :

$$-dW = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

و

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} \qquad (6\text{-}34)$$

وبالمثل يمكننا ان نحصل على تعبيرين آخرين للمركبتين F_y و F_z .

واذا سمحنا للجسم المعني أن يدور حول محور معين ، لأمكن استبدال العلاقة (32-6) بالمعادلة :

$$dW_m = \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} \qquad (6\text{-}35)$$

اذ أن $\boldsymbol{\tau}$ تمثل العزم الدوراني الكهربائي و $d\theta$ الازاحة الزاوية . وبكتابة كل من $\boldsymbol{\tau}$ و $d\theta$ بدلالة مركباته (τ_1, τ_2, τ_3) و $(d\theta_1, d\theta_2, d\theta_3)$ ، ومن ثم دمج المعادلتين (33-6) و (35-6) نحصل على :

$$\tau_1 = -\frac{\partial W}{\partial \theta_1}, \qquad (6\text{-}36)$$

وهلم جرا . . .

وبهذا فقد تحقق هدفنا في الحصول على الآتي :

$$F_x = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_Q, \qquad (6\text{-}34a)$$

$$\tau_1 = -\left(\frac{\partial W}{\partial \theta_1}\right)_Q \qquad (6\text{-}36a)$$

لقد أضفنا الرمز السفلي Q للدلالة على ان المنظومة معزولة ، وبالتالي تبقى الشحنة الكلية ثابتة خلال الازاحة **dr** أو الازاحة الزاوية $d\theta$. ولاستعمال هذه

الطريقة من الضروري أن نعبر عن W بشكل تحليلي ، كما يجب ان نعطي W بدلالة الاحداثي x أو الاحداثي θ_1 . وسنعطي بعد قليل مثالاً على ذلك لتوضيح هذه الطريقة .

ان المعادلتين (6-34a) و (6-36a) لاتغطيان جميع الحالات التي تهمنا . وسبب ذلك حسبما أشرنا عند اشتقاقها ، هو أنها تقتصران على الانظمة المعزولة التي ينبغي أن تبقى فيها الشحنة ثابتة . وفي صنف آخر من المسائل تكون الشحنة الطليقة بأجمعها موجودة على سطوح الموصلات ، وتبقى هذه الموصلات محافظة على جهد ثابت بفضل مصادر خارجية للطاقة (كالبطاريات مثلاً) . وهنا أيضاً قد يسمح لاحد مكونات المنظومة أن يتحرك بفعل قوى كهربائية مؤثرة عليه ، وعند ذلك يبقى الشغل الميكانيكي المنجز (بواسطة المنظومة والبطارية في هذه المرة) معطى بالمعادلة (6-32) أيضاً . لكن معادلة حفظ الطاقة تأخذ صيغة جديدة في هذه اللحظة هي

$$dW + dW_m = dW_b, \tag{6-37}$$

اذ ان dW_b تمثل الطاقة المجهزة بواسطة البطاريات . وقبل ان يصبح بوسعنا أن نخطو للامام لنحصل على تعبير يربط W بالقوة المؤثرة على أحد مكونات المنظومة ينبغي ان نتخلص من dW_b من المعادلة (6-37)

ان الطاقة الكهروستاتيكية W لمنظومة مكونة من موصلات مشحونة سبق أن اعطيت بموجب المعادلة (6-12). والآن لو أزيح جزء من المنظومة ، وفي الوقت نفسه ، بقي جهد الموصلات الاخرى ثابتاً ، فان :

$$dW = \tfrac{1}{2} \sum_j U_j \, dQ_j. \tag{6-38}$$

هذا بالاضافة الى أن الطاقة المجهزة بواسطة البطاريات ، dW_b ، تساوي الشغل اللازم لتحريك كل من الزيادات الشحنية dQ_j من جهد قدره صفر الى جهد موصل مناسب . وحسب المعادلة (6-1) نجد ان هذا الشغل يساوي :

$$dW_b = \sum_j U_j \, dQ_j. \tag{6-39}$$

وبهذا ينتج :

$$dW_b = 2\, dW \tag{6-40}$$

وباستعمال هذه المعادلة لحذف dW_b من العلاقة (6-37) ، ومن ثم دمج الناتج مع المعادلة (6-32) نحصل على :

$$dW = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

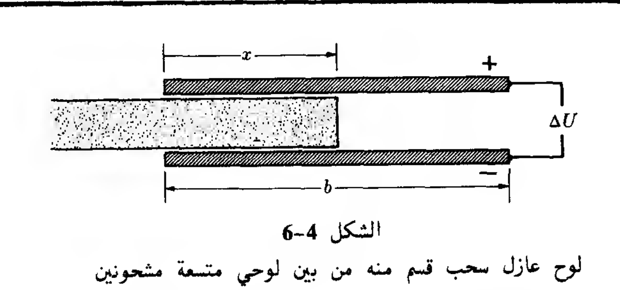
أو

$$F_x = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_U \qquad (6\text{–}41)$$

وهنا نستعمل الرمز السفلي U للتعبير عن حقيقة ان جميع الجهود تبقى ثابتة خلال الازاحة الافتراضية dr . وبأسلوب مشابه يمكننا ان نحصل على :

$$\tau_1 = \left(\frac{\partial W}{\partial \theta_1}\right)_U \qquad (6\text{–}42)$$

وكمثال على طريقة الطاقة هذه دعنا نأخذ المسألة الآتية : متسعة ذات لوحين متوازيين طول كل منهما b وعرضه w ، والمسافة الفاصلة بين اللوحين d . ملئت المنطقة المحصورة بين اللوحين بعازل صلب ذي سماحية قدرها ، وثبت فرق الجهد بينهما على قيمة ثابتة ، ΔU . فاذا سحب اللوح العازل باتجاه البعد b خارج المتسعة بحيث بقي جزء منه قدره x بين لوحي المتسعة (لاحظ الشكل 6-4) ، أحسب القوة التي تعمل على إعادة اللوح العازل الى مكانه في المتسعة .



الشكل 6-4
لوح عازل سحب قسم منه من بين لوحي متسعة مشحونين

الحل :
هناك عدد من الطرق التي يمكن استخدامها لحساب طاقة هذه المنظومة ، منها مثلاً :

$$W = \tfrac{1}{2}\int_V \epsilon E^2\,dv$$

حيث يغطي التكامل جميع المناطق في الفضاء التي لايكون فيها المجال صفراً . وبأهمال تأثير تحدب المجال الكهربائي الناشيء عن أطراف المتسعة نحصل على :

$$W = \frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{\Delta U}{d}\right)^2 dwx + \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{\Delta U}{d}\right)^2 dw(b - x)$$

وعند ذلك يمكن حساب القوة من المعادلة (6-41) فينتج :

$$F_x = \frac{1}{2}(\epsilon - \epsilon_0)w\,\frac{(\Delta U)^2}{d}$$

باتجاه تزايد x .

6-8 القوة المؤثرة على توزيع شحني :
Force on a charge distribution

لا يمكن ان يكون هذا الفصل متكاملاً مالم يشمل مناقشة موجزة على حساب القوة الكهربائية بطريقة التكامل المباشر ، ولو أنه قد تمت مناقشة هذا الموضوع بشيء من التفصيل في فصل سابق (انظر الى البند 10-4) . والشيء المهم الذي ينبغي أن نتذكره أنه عند حساب القوة المؤثرة على عنصر شحني dq ، يجب أن نطرح المجال الناشيء عن هذا العنصر ، $\mathbf{E}_s$ ، من المجال الكلي :

$$d\mathbf{F} = (\mathbf{E} - \mathbf{E}_s)\,dq. \tag{6-43}$$

فعند حساب القوة المؤثرة على شحنة نقطية ، على سبيل المثال ، يجب استثناء المجال الكهربائي اللامحدود الناشيء عن الشحنة النقطية نفسها من المجال الكهربائي الكلي المؤثر عند موضع النقطة . إن التأثير المتبادل للشحنة مع المجال الناشيء عنها يؤدي الى تكوين إجهادات داخلية في الشحنة ، ولكن هذه الاجهادات لا يمكن أن تدمج بطريقة تؤدي الى إحداث إزاحة متينة للشحنة

ويمكن إيجاد القوة المؤثرة على جسم يحمل شحنة سطحية ذات كثافة قدرها σ (x, y, z) بدمج المعادلتين (57-4) و (58-4) ، وبهذا ينتج :

$$\mathbf{F} = \oint_S (\mathbf{E} - \mathbf{E}_s)\sigma\,da, \tag{6-44}$$

حيث يغطي التكامل سطح الجسم بكامله . والمجال $\mathbf{E}_s$ يعطى بموجب المعادلة (4-60):

$$E_s = \frac{\sigma}{2\epsilon}\,\mathbf{n}. \qquad (6\text{-}45)$$

واذا كان الجسم موصلاً لنتجت علاقة بسيطة بين المجال الكهربائي الكلي عند السطح ، $\mathbf{E}$ ، و $\mathbf{E}_s$. وبهذا تصبح القوة المؤثرة على جسم موصل ، كما رأينا في البند (4-10) ، مساوية :

$$\mathbf{F} = \tfrac{1}{2}\oint_S \sigma \mathbf{E}\, da, \qquad (6\text{-}46a)$$

أو

$$\mathbf{F} = \oint_S \frac{\sigma^2}{2\epsilon}\,\mathbf{n}\, da. \qquad (6\text{-}46b)$$

وأخيراً دعنا نعين القوة المؤثرة على توزيع حجمي من الشحنات . إن القوة المؤثرة على عنصر شحني قدره $\rho\, dv$ تساوي :

$$d\mathbf{F} = (\mathbf{E} - \mathbf{E}_s)\rho\, dv. \qquad (6\text{-}47)$$

ولكن المجال $\mathbf{E}_s$ الناشيء عن العنصر الحجمي dv يتناسب مع الحجم مقسوماً على مربع بعد مناسب من أبعاد العنصر ، وهذه النسبة تقترب من الصفر عند الغاية $dv \longrightarrow 0$. وبهذا تصبح $\mathbf{E}_s$ جزءاً كسرياً صغيراً من $\mathbf{E}$ يمكن إهماله . وبهذا نحصل على التعبير الآتي للقوة المؤثرة على شحنة حجمها V_0

$$\mathbf{F} = \int_{V_0} \rho \mathbf{E}\, dv \qquad (6\text{-}48)$$

6-9* التفسير الديناميكي الحراري (الثرموديناميكي) للطاقة الكهروستاتيكية : Thermodynamic interpretation of electrostatic energy

حصلنا فيما سبق على عدد من الصيغ للتعبير عن الطاقة الكهروستاتيكية لمنظومة من المواصلات المشحونة والعوازل . وبصورة خاصة الصيغة الآتية

$$W = \tfrac{1}{2}\int_V \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\, dv, \qquad (6\text{-}17)$$

البنود المؤشرة بعلامة "نجمة" يمكن حذفها دون أن يؤثر ذلك على استمرارية المادة .

حيث يشمل التكامل جميع العوازل وبضمنها الفراغ . والسؤال الذي يطرح نفسه هو هل بالامكان تفسير W من وجهة نظر الديناميك الحراري (الثرموداينمك)؟ وبمعنى آخر هل تشكل W جزءاً من الطاقة الداخلية للمنظومة؟ للاجابة على هذا السؤال يجب أن نعود الى إشتقاق W ، حيث أوضحنا أن W هي في الواقع الشغل المنجز على المنظومة لجلبها الى حالتها الشحنية النهائية . والحقيقة إذن ان W هي تعبير عن الشغل ، والمشكلة التي ينبغي معالجتها هي تحت أية ظروف يمكن تعيين الزيادة في الشغل بدلالة إحدى الخواص الثرموديناميكية للمنظومة .

وطبقاً للقانون الأول للثرموديناميك (الذي يعبر عن قانون حفظ الطاقة) لعملية قابلة للإنعكاس نجد أن :

$$dW_i = T\,dS + dW_m, \qquad (6\text{–}49)$$

إذ أن dW_i تمثل التغير الحاصل في الطاقة الداخلية للمنظومة ، و dS التغير في القصور الحراري (الانتروبي) ، و dW_m الشغل الميكانيكي المنجز على المنظومة ، و T درجة الحرارة المطلقة . الكمية $T\,dS$ تعني بطبيعة الحال الحرارة المضافة الى المنظومة خلال العملية .

ومن الواضح أن الزيادة في الشغل dW_m يمكن تحديدها على ضوء التغير الحاصل في الطاقة الداخلية dW_i للعمليات الكظيمة (الادياباتيكية) فقط ، وهي العمليات التي تكون فيها $dS = 0$. لكن درجة حرارة المنظومة بصورة عامة تتغير خلال العملية الكظيمة ، كما تتغير كذلك ثوابت العزل التي تعتمد على درجة الحرارة . وإذا تذكرنا أن المعادلة (6–17) مشتقة من المعادلة (6–9) ، وأن هذه المعادلة الاخيرة قد حصلنا عليها بفرض أن ثوابت العزل المختلفة تبقى ثابتة خلال عملية الشحن ، يصبح لزاماً علينا أن نحصر إهتمامنا على العمليات المتساوية الحرارة (الايسوثرمية) isothermal processes . وهنا لا يمكن تحديد dW_m على ضوء dW_i .

وتعرف الكمية الديناميكية الحرارية المعروفة باسم طاقة هيلمولتز الحرة للمنظومة بدلالة :

$$F = W_i - TS.$$

وبأخذ تفاضل هذه المعادلة ودمج الناتج مع العلاقة (6–49) ينتج :

$$\begin{aligned} dF &= dW_i - T\,dS - S\,dT \\ &= -S\,dT + dW_m. \end{aligned} \qquad (6\text{–}50)$$

وهذه هي بالضبط المعادلة التي نحتاجها . وللعملية المتساوية الحرارة تكون dF مساوية لـ dW_m ، وبهذا يمكننا آلقول أن الطاقة الكهروستاتيكية تشكل جزءاً من الطاقة الحرة للمنظومة . وهذه الطاقة تمثل القيمة القصوى للشغل التي يمكن إستخلاصها من المجال الكهروستاتيكي .

إن الطاقة الحرة لمنظومة ذات درجة حرارة ثابتة تلعب دور الطاقة الكامنة نفسها لمنظومة ميكانيكية (أي المنظومة التي لا تعتمد على درجة الحرارة) .

مسائل

6-1 ألكترون سريع (طاقته الحركية 3×10^{-17} جول) يدخل منطقة في الفضاء تحتوي على مجال كهربائي منتظم قدره $E = 1000\ V/m$. فإذا كان المجال موازياً لحركة الالكترون وباتجاه يعمل على تناقص سرعته ، ماالمسافة التي يقطعها الالكترون قبل ان يصل لحظياً الى السكون؟ (شحنة الالكترون تساوي 1.6×10^{-19} كولوماً) .

6-2 لديك قشرة كروية عازلة (نصف قطرها الداخلي $= a$ ونصف قطرها الخارجي $= b$ وثابت العزل $= k$) وشحنة نقطية q تفصلها مسافة لا نهائية . والآن دع الشحنة النقطية توضع في مركز القشرة الكروية . أحسب التغير الحاصل في طاقة المنظومة .

6-3 لديك توزيع شحني كروي نصف قطره R ذو كثافة شحنية منتظمة ρ_0 . عين الطاقة الذاتية للتوزيع بطريقتين : (أ) طريقة التكامل المباشر للمعادلة (6-9) ، و (ب) طريقة التكامل الذي يغطي المجال ، $\frac{1}{2}\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}\, dv$.

6-4 دعنا نفرض أن الالكترون جسم كروي منتظم الشحنة نصف قطره R . وكذلك نفرض أن طاقة السكون وقدرها mc^2 (m تمثل كتلة الالكترون و c سرعة الضوء) هي أصلاً كهروستاتيكية ومعطاة بموجب ناتج المسألة السابقة . وبالتعويض عن القيم العددية لشحنة وكتلة الألكترون عين نصف قطره الكلاسيكي R .

6-5 موصلان كرويان موضوعان في الفراغ . الموصل الأول ونصف قطره R متصل بالأرض (أي أن جهده يساوي صفراً) . والموصل الثاني صغير الى درجة يمكن معاملته كشحنة نقطية ، ويحمل شحنة قدرها q ويقع على بعد d من الموصل المتصل بالأرض . ماقيمة الشحنة المحتثة على الكرة المتصلة بالأرض؟ (استعمل مفهوم معامل الجهد) .

6-6 منظومة مكونة من جسمين موصلين موضوعين في وسط عازل خطي . الموصل الأول غير مشحون والموصل الثاني متصل بالارض . برهن على أن الموصل الأول يكون ذا جهد أرضي أيضاً .

6-7 صنعت متسعة ذات لوحين متوازيين من عازلين . اللوح العازل الأول (سمكه d_1 وسماحيته ϵ_1) وضع فوق العازل الثاني (سمكه d_2 وسماحيته ϵ_2) ، ثم وضع العازلان بين لوحين موصلين متوازيين تفصلهما مسافة قدرها $d_1 + d_2$. ماقيمة السعة لوحدة المساحة لهذه المتسعة؟

6-8 اسطوانة موصلة طويلة نصف قطرها a موضوعة بصورة موازية لمستوي لا نهائي المساحة وعلى بعد قدره h عنه . بين أن سعة المنظومة لوحدة الطول من الاسطوانة تساوي

$$C = 2\pi\epsilon_0/\cosh^{-1}(h/a).$$

(لاحظ البند 11-3)

6-9 متسعتان هوائيتان متماثلتان متصلتان على التوازي . جعل فرق الجهد المسلط على المجموعة ثابتاً وقدره خمسون فولتاً ، فإذا أدخل لوح عازل ثابت عزله عشرة وسمكه يبلغ عشر سمك الفجوة الهوائية في احدى المتسعتين ، احسب فرق الجهد المتكون عبر هذه المتسعة .

6-10 من المعلوم أن سعة الكشاف الكهربائي ذي الورقة الذهبية لا تكون ثابتة تماماً ، وسبب ذلك هو أن الورقة تتحرك مقتربة من جدار علبة الكشاف عند زيادة فرق الجهد ΔU . والصيغة المتوقعة للسعة هي :

$$C = a + b(\Delta U)^2.$$

كيف يمكنك أن تعين الثابتين a و b لكشاف معين ؟ ما طاقة الكشاف الكهربائي عندما يكون مشحوناً ؟ هل ان الطاقة بأجمعها كهربائية ؟

6-11 قشرتان موصلتان متحدتا المركز ، نصفا قطريهما r_1 و r_2 ، ثبت جهداها على القيمتين U_1 و U_2 على الترتيب . ملئت المنطقة بين القشرتين بوسط عازل . أثبت بطريقة الحساب المباشر أن الطاقة المختزنة في العازل تساوي

$$C(U_1 - U_2)^2/2,$$

إذا أن C تمثل سعة المنظومة .

6-12 موصلان اسطوانيان متحدا المحور ، تفصلهما مسافة صغيرة جداً ذات بعد شعاعي قدره d . وضعت الاسطوانتان بصورة قائمة داخل سائل عازل قابلية تكهربه χ وكثافته الكتلية ζ . وجعل فرق الجهد بين الاسطوانتين ΔU . الى أي ارتفاع h يصل السائل العازل بين الاسطوانتين (اهمل الشد السطحي) .

6-13 متسعة ذات لوحين متوازيين ، تحتوي المنطقة المحصورة بين لوحيها على عازل ثابت عزله K . طول كل من لوحي المتسعة يبلغ l وعرضه W ، والمسافة الفاصلة بينهما d . شحنت هذه المتسعة بتسليط فرق جهد قدره $(\Delta U)_0$ عليها ، ثم فصلت عن مصدر الشحن . بعد ذلك سحب اللوح العازل جزئياً باتجاه البعد l الى أن أصبح طول الجزء الواقع داخل المتسعة x . (أ) ما القيمة التي يؤول إليها فرق

الجهد عبر المتسعة ؟ (ب) ماقيمة القوة التي تحاول ان تعيد اللوح العازل الى مكانه الأصلي بين لوحي المتسعة ؟

6-14 تتغير سعة متسعة هوائية متغيرة بصورة خطية من القيمة 50 الى $364\ \mu\mu f$ بتدوير مجموعة أقراصها المتحركة خلال زاوية محصورة بين الصفر و 180 درجة . سلط فرق جهد قدره اربعمائة فولت عبر هذه المتسعة عندما كانت الزاوية 75 درجة. ما إتجاه ومامقدار العزم الدوراني الكهروستاتيكي المؤثر على المتسعة ؟

6-15 * قشرة موصلة كروية غير مشحونة كتلتها m عائمة في سائل ثابت عزله K بحيث يغطس ربعها داخل السائل . باي قيمة من الجهد ينبغي شحنها لكي ينغمر نصفها داخل السائل؟ [ملاحظة : افرض ان المجال الكهربائي للنصف المغمور من القشرة الكروية شعاعي الشكل ، ثم بين أن المجموع $\sigma_p + \sigma$ على السطح الكروي كافٍ لتبرير تلك الفرضية] .

6-16 شريحة عازلة سمكها d وثابت عزلها K تملأ المنطقة الكائنة بين لوحي متسعة ذات لوحين متوازيين . فاذا علمت أن مساحة لوح المتسعة A ، احسب القوة الكهروستاتيكية المؤثرة على لوحي المتسعة ، (أ) بفرض أن العازل على تماسٍ مباشر مع لوحي المتسعة ، (ب) بفرض أنه توجد فجوة هوائية صغيرة بين العازل ولوح المتسعة ، علماً بأن فرق الجهد ΔU بين لوحي المتسعة يبقى ثابتاً في كلتا الحالتين .



التيار الكهربائي
ELECTRIC CURRENT

حتى الآن كنا نتعامل مع الشحنات الساكنة ، ولكننا في هذا الفصل سنأخذ الشحنات المتحركة بعين الاعتبار . وهذا يعني أننا سنتعامل مع المواد الموصلة للكهربائية ، ذلك أن الموصل يعرف على أنه الجسم الذي تكون فيه ناقلات الشحنة طليقة الحركة . (انظر الى البند 5-2) . وهذا التعريف لايتضمن الموصلات التقليدية المألوفة كالمعادن والسبائك فحسب ، بل يتضمن أشباه الموصلات والمحاليل الالكتروليتية والغازات المتأينة والعوازل غير التامة (imperfect) أيضاً ، وحتى الفراغ في المنطقة المجاورة لكاثود الانبعاث الثرميوني يكون مشمولاً في هذا التعريف . وفي العديد من الموصلات تكون الالكترونات ناقلات للشحنة ، ولكنه في حالات أخرى قد تنقل الشحنة بواسطة أيونات موجبة أوسالبة .

الشحنة المتحركة تولد تياراً ، وعملية نقل الشحنة تدعى التوصيل . وبتعبير ادق يعرف التيار I على انه المعدل الزمني لانتقال الشحنة عبر نقطة معينة في منظومة موصلة . لذا :

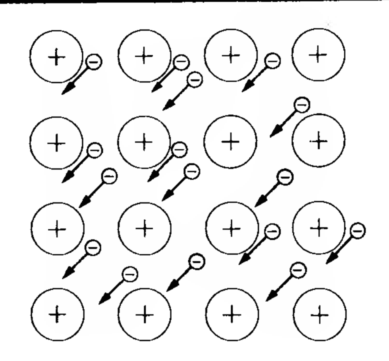
$$I = \frac{dQ}{dt}, \qquad (7\text{–}1)$$

إذ أن $Q = Q(t)$ تمثل صافي الشحنة المنقولة خلال زمن قدره t . ووحدة التيار حسب النظام mks هي الأمبير ، وقد اطلق عليها هذا الاسم على شرف الفيزيائي الفرنسي اندري ماري أمبير . ومن الواضح عندئذ أن :

$$\text{١ أمبير} = ١ \frac{\text{كولوم}}{\text{ثانية}}$$

7-1 طبيعة التيار : Nature of the current.

ينقل التيار في المعادن كلياً بواسطة الالكترونات ، أما الأيونات الموجبة الثقيلة فتبقى مثبتة في مواضع منتظمة في التركيب البلوري لها (لاحظ الشكل 1-7) . والكترونات التكافؤ (الالكترونات الاكثر بعداً) في الذرة هي التي تكون طليقة وقادرة على المساهمة في عملية التوصيل ، وأما بقية الالكترونات فإنها مشدودة باحكام ببقية مكونات الذرة . وتحت ظروف معينة يمكن أن يحدث الاتزان وذلك بان تضخ الالكترونات الى المعدن عند طرف فيه ثم تؤخذ من الطرف الآخر ، وبهذا ينشأ التيار على الرغم من بقاء المعدن ككل متعادلاً كهربائياً . وهناك قوى كهروستاتيكية قوية تعمل على منع الالكترونات الفائضة من التجمع عند أية نقطة في المعدن . وبالمثل تعالج حالة النقص في الالكترونات بقوى كهروستاتيكية ذات علاقة معاكسة . وسنرى فيما بعد كيف تتبدد الشحنات الفائضة بسرعة فائقة للغاية في الموصلات . وبهذا نرى أنه يمكن دراسة موضوع التيار الكهربائي من دون أن تؤخذ التأثيرات الكهروستاتيكية المرافقة لناقلات الشحنة بالحسبان .

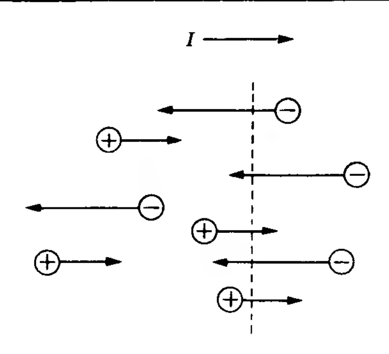


الشكل 1-7

رسم تخطيطي لحركة الكترونات التوصيل في المعدن

ينقل التيار الكهربائي في المحاليل الالكتروليتية بواسطة الأيونات الموجبة والسالبة معاً ، ولكن عملية التوصيل بأحد النوعين من الأيونات هي التي تكون

متغلبة ، وسبب ذلك هو أن قسماً من الأيونات تتحرك بسرعة أكبر من الايونات الأخرى . ومن المهم أن نلاحظ أنه على الرغم من أن الايونات الموجبة والسالبة تنتقل باتجاهين متعاكسين ، إلا أن كلا النوعين من الأيونات يساهم في تكوين تيار باتجاه واحد (لاحظ الشكل 2-7) . وأساس هذه الحقيقية يتبين من الشكل (7-1) وذلك لأن صافي الشحنة التي تنقل عبر أية نقطة تعتمد على علامة الشحنة وعلى الاتجاه الذي تتحرك به هذه الشحنة . ولهذا نجد أن كلا النوعين من ناقلات الشحنة الموجبة والسالبة تولد تيارات باتجاه اليمين ، حيث اصطلح ان يكون اتجاه حركة ناقلات الشحنة الموجبة هو الذي يعبر عن اتجاه التيار (لاحظ الشكل 2-7) ، وهذا بالطبع هو الإتجاه المعاكس لحركة ناقلات الشحنة السالبة . وبصورة عامة ينشأ التيار الكهربائي استجابة لمجال كهربائي . فإذا سلط مجال كهربائي على موصل فانه سيجعل ناقلات الشحنة الموجبة تتحرك بالاتجاه العام للمجال ، وناقلات الشحنة السالبة باتجاه معاكس للمجال ، وبهذا نجد أن جميع التيارات الناتجة تكون باتجاه واحد هو إتجاه المجال المسلط .



الشكل 2-7

ينتج التيار عن حركة ناقلات الشحنة الموجبة والسالبة معاً

وفي انبوبة تفريغ الغاز ينقل التيار بواسطة الألكترونات والأيونات الموجبة معاً ، ومع ذلك تعد الالكترونات هي المسؤولة من الناحية العملية عن تكوين التيار بأجمعه ، وذلك لأن قدرة الالكترونات على التحرك السريع تفوق كثيراً قدرة الأيونات الثقيلة نسبياً . والتوصيل في الغازات يكون معقداً بعض الشيء ، وسبب ذلك يعود الى أن التعداد الالكتروني والأيوني يتغير بشكل كبير مع الظروف التجريبية (وهذه الظروف تحدد أساساً بضغط الغاز وبفرق الجهد عبر الغاز) .

وتحت ظروف معينة تحدث عملية تدعى التتابع cascading ، في هذه العملية نجد أن الأيونات القليلة الموجودة في الأنبوبة من البداية تتسارع وتعمل تصادمات غير مرنة مع الذرات المتعادلة ، وبهذا ينتج المزيد من الايونات والالكترونات ، وهذه الأيونات الاضافية قادرة أيضاً على تكوين تصادمات مؤينة ، فتكون حصيلة هذه التصادمات مضاعفة كثافة ناقلات الشحنة بشكل هائل .

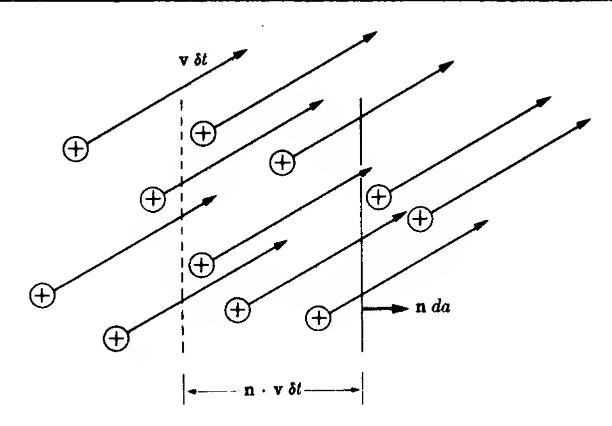
لقد صورنا ناقلات الشحنة في الشكلين (1-7) و (2-7) على انها تقع ضمن مجموعتين ، كل مجموعة لها حركة مشتركة تدعى حركة الانجراف أو الانسياق للمجموعة . والواقع ان هذه الصورة قد بسطت الى حد كبير جداً . والحقيقة ان كل مجموعة من ناقلات الشحنة تمثل جسيمات في حالة إتزان حراري مع البيئة المحيطة بها ، وبهذا فان كل جسيم يمتلك حركة حرارية فضلاً عن الحركة الانجرافية . لكن الحركة الحرارية ، حتى لو كانت كبيرة ، هي حركة عشوائية لا ينتج عنها انتقال منتظم للشحنة . ومن الناحية الأخرى نجد أن الحركة الانجرافية هي ليست عشوائية . وعند أخذ عملية التوصيل بعين الاعتبار يسمح بنسيان الحركة العشوائية التي لا تضيف شيئاً ذا شأن يذكر في نهاية المطاف ، مما يفسح المجال لاستعمال الصورة المبسطة الموضحة في الشكلين (1-7) و (2-7) . ومع ذلك نجد أن عمليات معينة لانتقال الشحنة مثل التوصيل في إنحدار حراري (الذي يسبب نشوء تأثيرات كهروحرارية) ، من الضروري أن تؤخذ الحركة الحرارية بالحسبان وبصورة مفصلة لكي يتم فهم الظاهرة كاملة .

إن التيارات التي سبق وصفها في هذا البند حتى الآن تعرف بتيارات التوصيل . وهذه التيارات تمثل الحركة الانتقالية لناقلات الشحنة خلال الوسط ، أما الوسط نفسه فيكون ساكناً على الاغلب . وقد يحدث في الغازات والسوائل حركة هيدروديناميكية hydrodynamic motion ، وقد ينتج تيارات عن هذه الحركة في حالة إحتواء الوسط على كثافة شحنية . والتيارات من هذا النوع التي تنشأ عن الانتقال الكتلي تدعى تيارات الحمل conduction currents . ولهذه التيارات أهمية كبيرة في كهربائية الجو . والحقيقة ان تيارات الحمل التي تتجه نحو الأعلى خلال الزوابع الرعدية كافية لاحداث الانحدار الطبيعي في الجهد في الطبقة الجوية فوق سطح الارض . كما ان حركة الجسيمات المشحونة في الفراغ (كحركة الالكترونات في الصمام الثنائي المفرغ) تولد تيار حمل أيضاً . ومن الملامح المهمة لتيارات الحمل أنها ليست متعادلة كهروستاتيكياً ، وان شحنتها الكهروستاتيكية يجب أن تؤخذ بالحسبان . وفيما تبقى من هذا الفصل سنتعامل كلياً مع تيارات التوصيل .

7-2 كثافة التيار . معادلة الاستمرارية :
Current density. Equation of continuity

سنأخذ الآن وسطاً موصلاً يمتلك نوعاً واحداً من ناقلات الشحنة التي تحمل شحنة قدرها q ، وسنرمز لعدد الناقلات لوحدة الحجم بالحرف N . وعلى ضوء ما جاء في البند السابق سنهمل الحركة الحرارية العشوائية للناقلات ، ونفرض أن جميع الناقلات ذات سرعة انجراف واحدة هي v . والآن يمكننا أن نحسب التيار خلال عنصر مساحته da كما هو مبين في الشكل (7-3) . وخلال زمن δt نجد ان كل شحنة تتحرك مسافة قدرها $v\delta t$. ومن الشكل يتبين ان الشحنة δQ التي تجتاز المساحة da خلال الفترة الزمنية δt تساوي q مضروبة في مجموع كل الناقلات التي يحتويها الحجم $\mathbf{v}.\mathbf{n}\,\delta t\, da$ ، إذ أن الرمز n يشير الى وحدة المتجه العمودي على المساحة da . ومن المعادلة (7-1) يمكننا ان نحصل على عنصر التيار :

$$dI = \frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{qN\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\delta t\,da}{\delta t}$$
$$= Nq\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,da. \qquad (7-2)$$



الشكل 7-3 الحركة الانجرافية لناقلات الشحنة عبر المستوي da خلال فترة زمنية أمدها δt .

واذ كان الوسط يحتوي على أكثر من نوع من ناقلات الشحنة ، فإن كل نوع منها سيساهم في تكوين التيار وفقاً للمعادلة (7-2) . وبصورة عامة تؤول الصيغة المعبرة عن التيار المار خلال المساحة da الى الآتي :

$$dI = \left[\sum_i N_i q_i \mathbf{v}_i\right] \cdot \mathbf{n}\, da \tag{7-3}$$

حيث تشمل علامة الجمع على كل الأنواع المختلفة من الناقلات . والكمية المحصورة بين القوسين في هذه المعادلة هي كمية متجه لها أبعاد التيار لوحدة المساحة ، هذه الكمية تدعى كثافة التيار ويرمز لها بالحرف **J** . لذا :

$$\mathbf{J} = \sum_i N_i q_i \mathbf{v}_i. \tag{7-4}$$

يمكن تعريف كثافة التيار عند كل نقطة من نقاط الوسط الموصل ، ولهذا تعد كثافة التيار دالة نقطية متجهة . إنها كمية مفيدة وتدخل بصورة مباشرة في المعادلات التفاضلية للنظرية الكهرومغناطيسية ، ووحدتها حسب النظام mks هي الأمبير/ متر مربع .

بالإمكان كتابة المعادلة (3–7) بالصيغة الآتية :

$$dI = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, da,$$

وعندئذٍ تؤول قيمة التيار المار خلال السطح S (وهو سطح ذو شكل كيفي ومساحة عينية) الى الصيغة الآتية :

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, da. \tag{7-5}$$

إن كثافة التيار **J** وكثافة الشحنة ρ هما كميتان غير مستقلتين ، وترتبطتان إحداهما بالأخرى بمعادلة تفاضلية تسمى معادلة الاستمرارية . وأصل هذه المعادلة مستمد اساساً من حقيقة أن الشحنة لا تخلق ولا تفنى . وأسهل طريقة لاشتقاق هذه المعادلة يتم بتطبيق العلاقة (5–7) على سطح كيفي مغلق (S) . التيار الكهربائي الذي يدخل الحجم V المحاط بالسطح المغلق S يعطى بموجب المعادلة :

$$I = -\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, da = -\int_V \operatorname{div} \mathbf{J}\, dv, \tag{7-6}$$

لقد حصلنا على الحد الأخير من هذه المعادلة باستعمال نظرية التباعد . أما إشارة الناقص فتنشأ من حقيقة أن **n** يمثل العمود الخارج من السطح ، على حين أننا نرغب في جعل التيار I موجباً عندما تنساب الشحنة بالاتجاه المعاكس ، أي من

خارج الحجم V ونحو الداخل . وبما أن التيار I ، حسب المعادلة (1-7) ، يساوي المعدل الزمني لنقل الشحنة الى داخل الحجم V ، ينتج :

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho\, dv. \tag{7-7a}$$

ومادمنا نتعامل مع حجم ثابت القيمة (V) ، فإن أخذ المشتقة بالنسبة للزمن سيؤثر على الدالة ρ فقط . لكن ρ هي دالة للموضع فضلاً عن كونها دالة للزمن ، ولهذا فإنّ المشتقة بالنسبة للزمن تصبح مشتقة جزئية عندما تنقل ρ الى داخل التكامل . لذا

$$I = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv. \tag{7-7b}$$

والآن يمكننا أن نساوي المعادلتين (6-7) و (7b-7) ، وبهذا ينتج :

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,\mathbf{J}\right) dv = 0. \tag{7-8}$$

لكن اختيار الحجم V كان بصورة كيفية ، كما أن الطريقة الوحيدة التي تجعل المعادلة (8-7) صحيحة لأي جزء كيفي من الوسط هي أن تتلاشى الكمية المطلوب تكاملها عند كل نقطة من نقاط ذلك الجزء الحجمي . لهذا تأخذ معادلة الاستمرارية الصيغة الآتية :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,\mathbf{J} = 0. \tag{7-9}$$

7-3 قانون أوم . التوصيل النوعي (أو الموصّلية)
Ohm's law. Conductivity.

وجد عملياً ان كثافة التيار **J** في المعدن تتناسب طردياً مع المجال الكهربائي عند ثبوت درجة الحرارة ، أي :

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E}. \tag{7-10}$$

إذ أن الحرف g يمثل ثابتاً للتناسب يعرف باسم التوصيل النوعي (أو الموصِّلية) conductivity . وهذه العلاقة تعرف باسم قانون أوم ، وتنطبق على عدد كبير من المواد الموصلة الشائعة . وفي الحالة العامة ينبغي إستبدال العلاقة (7-10) بالمعادلة الآتية

$$\mathbf{J} = g(\mathbf{E})\,\mathbf{E},$$

إذ أن g(E) تمثل دالة للمجال الكهربائي . والمواد التي تخضع للعلاقة (7-10) تدعى أوساط خطية أو أوساط أومية . وهنا أيضاً سنتعامل مع الاوساط الخطية فقط على غرار ماقمنا به في حالة العوازل .

إن مقلوب التوصيل النوعي يسمى المقاومة النوعية ورمزها η ، لذا*

$$\eta = \frac{1}{g}. \qquad (7\text{-}11)$$

ووحدة المقاومة النوعية حسب النظام mks هي فولت ـ متر/ أمبير أو أوم ـ متر ، حيث يعرف الأوم كالآتي :

١ أوم = ١ فولت/ ١ أمبير

أما وحدة التوصيل النوعي g فهي مقلوب الأوم ـ متر ($\Omega^{-1}m^{-1}$) أو كما تسمى احياناً مو/ متر .

الجدول (7-1) يبين المقاومات النوعية لعدد من المواد الشائعة . ويتضح من الجدول أن جميع المواد توصل الكهربائية الى حد ما ، ولكن المواد التي اطلقنا عليها اسم العوازل تقوم بتوصيلٍ ضعيفٍ جداً للكهربائية مقارنة مع المعادن . وتبلغ النسبة في التوصيل النوعي بين المعادن والعوازل مقداراً هائلاً (من 10^{20} الى 10^{26}) . وستتم مناقشة التمييز بين الموصل والعازل بطريقة كمية في البند (7-7) .

إن المعادن وسبائك المعادن هي المواد الوحيدة التي تعدُّ مواد أومية حقيقية .

لنأخذ عينة موصلة خاضعة لقانون أوم بشكل سلك مستقيم له مقطع منتظم ،

---

* الرمزان الشائعان للمقاومة النوعية وللتوصيل النوعي هما ρ و σ على الترتيب ، لكنه سنستعمل الرمزين η و g بدلاً منهما ، تجنباً للتداخل الذي قد يحصل مع كثافة الشحنة الحجمية ρ وكثافة الشحنة السطحية σ .

الجدول 1-7

المقاومة النوعية η والمعامل الحراري للمقاومة α لعدد من المواد الشائعة في درجة حرارة الغرفة

البيانات مستخلصة من :

American Institute of Physics Handbook, McGraw-Hill, 1957

Handbook of Chemistry and Physics, Chem. Rubber Publishing Co., 1952.

Material	η, ohm·m	$\alpha = \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dT}$, $(°C)^{-1}$
Aluminum	2.83×10^{-8}	0.0039
Copper	1.69×10^{-8}	0.00393
Gold	2.44×10^{-8}	0.0034
Iron (0°C)	8.85×10^{-8}	0.0050
Nickel	7.24×10^{-8}	0.006
Silver (0°C)	1.47×10^{-8}	0.0038
Mercury	95.8×10^{-8}	0.00089
Tungsten	5.51×10^{-8}	0.0045
Constantin (Cu 60, Ni 40)	44.0×10^{-8}	0.0000
Nichrome	100.0×10^{-8}	0.0004
Germanium (pure)	0.45	−0.048
Germanium (5×10^{-6}% As)	0.011	*
Silicon (pure)	640.0	−0.075
Silicon (10^{-4}% As)	0.003	
NaCl Solution (saturated)	0.044	−0.005
Amber	5.0×10^{14}	
Glass	$10^{10} - 10^{14}$	
Hard rubber	$10^{13} - 10^{16}$	
Mica	$10^{11} - 10^{15}$	
Quartz (fused)	7.5×10^{17}	
Sulfur	10^{15}	
Wood	$10^{8} - 10^{11}$	

* α غير معرفة جيداً للجيرمانيوم المطعم بالشوائب وذلك لأن المقاومة النوعية هي دالة معقدة نوعاً ما بالدرجة الحرارة . وعند درجات الحرارة العالية تقترب قيمة α من قيمتها للمادة النقية .

وقد سلط فرق جهد قدره ΔU بين نهايتي السلك . ولنفرض أن السلك متجانس ومميز بتوصيل نوعي ثابت . تحت هذه الظروف ينشأ مجال كهربائي في السلك ، وهذا المجال يرتبط بفرق الجهد المسلط على طرفي السلك حسب العلاقة :

$$\Delta U = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \qquad (7\text{–}12a)$$

ومن الواضح انه لا يمكن أن توجد مركبة للمجال الكهربائي عمودية على محور السلك ، وذلك لأنه لو وجدت مثل هذه المركبة لأدت الى تكوين شحنة على سطح السلك طبقاً للمعادلة (7–10) . وكما أوضحنا في وقت سابق فإن الشحنات الفائضة تتبدد بسرعة فائقة في الموصل ، وبسبب الجهد المنخفض عند أحد طرفي السلك فإن هذا الطرف يعد بمثابة منخفض من الطاقة تصب فيه جميع الشحنات الفائضة . ولهذا يكون المجال الكهربائي بأكمله بالاتجاه الطولي . وبالاضافة الى ذلك تكون قيمة المجال ثابتة عند جميع النقاط الواقعة على طول السلك . ولهذا السبب يمكننا أن نختصر المعادلة (7–12a) الى الآتي :

$$\Delta U = El. \qquad (7\text{–}12b)$$

إذ أن l تمثل طول السلك . لكن المجال الكهربائي يؤدي الى تكوين تيار ذي كثافة قدرها :

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E}.$$

وعليه تصبح قيمة التيار المار خلال أي مقطع في السلك مساوية :

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, da = JA, \qquad (7\text{–}13)$$

حيث تشير A الى مساحة مقطع السلك . وبدمج المعادلة (7–13) بالمعادلتين (7–10) و (7–12b) نحصل على :

$$I = \frac{gA}{l} \Delta U, \qquad (7\text{–}14)$$

حيث تبدو العلاقة الخطية بين التيار المتكون في السلك وفرق الجهد بين طرفيه واضحة من هذه المعادلة .

تدعى الكمية l/gA مقاومة السلك ويرمز لها بالحرف R وتقاس بوحدة الأوم . عند ذلك يمكن كتابة المعادلة (14-7) بالصيغة الآتية :

$$\Delta U = RI, \qquad (7\text{–}15)$$

وهذه هي الصيغة المألوفة لقانون أوم . وسيتبين في البند الآتي كيف أن المعادلة (10-7) تؤدي ضمناً الى المعادلة (15-7) بصرف النظر عن شكل الجسم الموصل .

ويمكن إعتبار المعادلة (15-7) بمثابة تعريف لمقاومة أي جسم أو أداة يمر فيها تيار ثابت . وفي الحالة العامة تعتمد المقاومة على طبيعة هذا التيار . لكننا سنركز إهتمامنا ، كما أشرنا سابقاً ، على المواد الخطية فقط ، حيث تكون المقاومة مستقلة عن قيمة التيار المار فيها .

7-4 شبكات المقاومة Resistance network

المقاومة هي خاصية للجسم المادي تعتمد على طبيعة المادة التي يتكون منها الجسم وعلى شكله الهندسي كذلك ، أما المقاومة النوعية فتعتمد على طبيعة المادة فقط . والجسم الموصل الذي يمتلك شكلاً هندسياً ملائماً ، والذي يميز في المقام الأول بقيمة مقاومته يدعى المقاوِم أو المقاوِمة ويرمز له في الدوائر الكهربائية بالرمز ‎-ʌʌʌ-

ويمكن ربط عدد من المقاومات لتكوين شبكة كهربائية . والطريقتان اللتان يمكن بواسطتها تحقيق هذا الربط موضحتان في الشكل (4-7) القسم (a) من الشكل يبين الربط القائم على التوالي ، حيث يمر التيار نفسه في كلا المقاومتين . وبتطبيق المعادلة (15-7) على كل من المقاومتين ، وبملاحظة أن فرق الجهد عبر مجموعة المقاومتين يساوي :

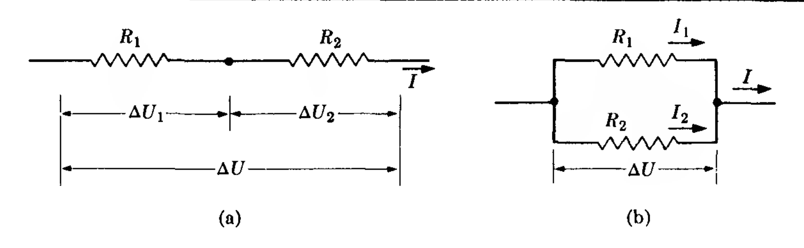
$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2,$$

نجد أن :

$$\Delta U = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I.$$

وبهذا فان المقاومة المكافئة لهذه المجموعة تساوي :

$$R = R_1 + R_2 \qquad (7\text{–}16)$$



الشكل 7-4

أ ـ ربط مقاومتين على التوالي .
ب ـ ربط مقاومتين على التوازي .

أما في حالة الربط القائم على التوازي (الشكل 7-4b) فإنّ فرق الجهد عبر كل مقاومة يكون متساوياً ، وعندئذ يصبح التيار الكلي المار بالمجموعة :

$$I = I_1 + I_2.$$

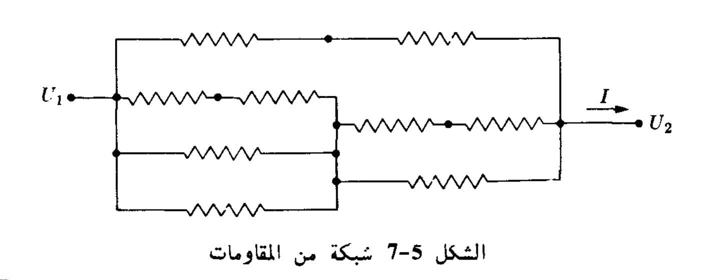
وباستخدام المعادلة (7-15) نحصل على :

$$I = \frac{1}{R_1}\Delta U + \frac{1}{R_2}\Delta U = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\Delta U,$$

وبهذا يمكننا حساب المقاومة المكافئة للمجموعة من العلاقة :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad (7\text{–}17)$$

ويمكن تعيين المقاومة المكافئة للشبكات الاكثر تعقيداً كتلك المبينة في الشكل (7-5) بدمج المقاومات بصورة متسلسلة وفقاً للمعادلتين (7-16) أو (7-17) ، وبتكرار هذه العملية بصورة متعاقبة الى أن نحصل على مقاومة الشبكة .



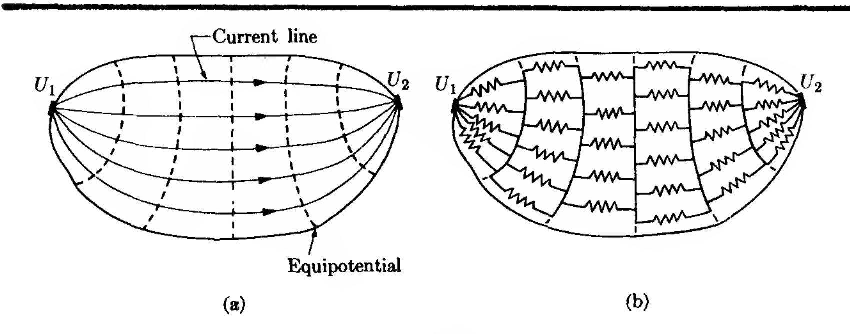
الشكل 7-5 شبكة من المقاومات

دعنا الآن نأخذ جسماً موصلاً مكوناً من مادة أومية ، ولكن ليس ضرورياً أن تكون متجانسة ، بحيث يكون التوصيل النوعي لهذه المادة مستقلاً عن المجال الكهربائي الموضعي ، بيد أنه قد يتغير من نقطة لأخرى في الوسط المادي . وهذا يعني أن $g = g(x, y, z)$. لنفرض أنه قد تم تثبيت الجهد عند نقطتين على طرفي الجسم ، وأن قيمة الجهد عند هاتين النقطتين تساوي U_1 و U_2 على الترتيب ، كما هو مبين في الشكل 7-6(a) . وعندئذ يتبين أن خطوط التيار في الوسط المادي هي خطوط المجال الكهربائي نفسها وذلك لأن :

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E},$$

كما يتبين أن سطوح تساوي الجهد تقطع خطوط التيار بزوايا قائمة كما هو موضح بصورة تخطيطية في ذلك الشكل . إن ما نتعامل معه في واقع الحال هو شبكة واسعة من المقاومات (لاحظ الشكل 7-6b) مكونة من العديد من مقاومات أولية R_i على شكل قطع صغيرة من الأسلاك . وحسبما جاء في البند السابق نجد أن :

$$R_i = \frac{l_i}{g_i A_i}, \tag{7-18}$$



الشكل 7-6

(أ) جسم موصل واقع تحت تأثير فرق في الجهد قدره $U_1 - U_2$
(ب) الشبكة المكافئة المكونة من مقاومات بهيئة اجزاء سلكية

إذ أن $g_i = g(x, y, z)$ تمثل التوصيل النوعي الموضعي ، و A_i مساحة مقطع القطعة السلكية ، و l_i هي طول المسافة الفاصلة بين سطوح تساوي الجهد . وعند أخذ الغاية التي عندها يصبح عدد سطوح تساوي الجهد بين U_1 و U_2 كبيراً

جداً ، وبالتالي يصبح عدد المقاومات الأولية كبيراً أيضاً ، فإنَّ المقاومات R_i تملأ كل الفضاء الذي يشغله الجسم . وبالاعتماد على المناقشة التي وردت في الفقرة السابقة نستنتج أن لهذه الشبكة مقاومة مكافئة قدرها R . ومن الواضح عندئذٍ أن التيار الذي يسري خلال الجسم يساوي :

$$I = \frac{U_1 - U_2}{R}. \quad (7-19)$$

ومادمنا قد فرضنا أن هذا الوسط يخضع لقانون أوم المتمثل بالمعادلة (7-10) ، فإنَّ كل مقاومة أولية R_i هي مقاومة أومية ، وبذلك يجب ان تكون المقاومة المكافئة للشبكة أومية أيضاً ، وبتعبير آخر :

$$R = \frac{U_1 - U_2}{I}$$

وهذا يعني أن قيمة المقاومة المكافئة تكون مستقلة عن فرق الجهد $U_1 - U_2$. وهكذا أثبتنا أن المعادلة (7-10) تؤدي ضمناً الى المعادلة (7-15) بصرف النظر عن شكل الموصل ، وأن المعادلتين هما تعبيران متكافئان لقانون أوم .

7-5 القوة الدافعة الكهربائية Electromotive force

أوضحنا في الفصل الثاني أن تكامل المركبة المماسة لمجال كهروستاتيكي حول أي مسار مغلق يتلاشى ، أي أن :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

وللمادة الأومية نجد أن :

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E}.$$

وفي الحالة العامة تؤول هذه العلاقة الى الآتي :

$$\mathbf{J} = g(\mathbf{E})\,\mathbf{E},$$

إذ أن الكمية g(E) موجبة دائماً . ومن هذا نستنتج ان المجال الكهروستاتيكي الخالص لا يقدر على تكوين تيار يدور بالاتجاه نفسه حول دائرة كهربائية كاملة .

وبكلمات أخرى يمكننا ان نقول إنه لايمكن تكوين تيار ثابت بواسطة قوى كهروستاتيكية خالصة .

قد يقع جسيم مشحون تحت تأثير قوى أخرى (ميكانيكية ، أو كيميائية ، أو ... الخ) إضافة الى القوة الكهروستاتيكية . فاذا دعيت محصلة القوة لوحدة الشحنة المؤثرة على الجسيم المشحون باسم المجال الكهربائي الفعال $(\mathbf{E}_{\text{eff}})$ ، لأصبح من غير الضروري أن يتلاشى التكامل الخطي المشار إليه في أعلاه ، بل يساوي :

$$\oint \mathbf{E}_{\text{eff}} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E}. \qquad (7\text{-}20)$$

والكمية $\mathcal{E}$ (ونعني بها القوة الدافعة الكهربائية ومختصرها ق د ك emf) تمثل مايدعى باسم ''قوة السوق'' driving force للتيار في الدائرة الكهربائية المغلقة . ووحدة الـ ق د ك حسب النظام mks هي جول/ كولوم أو فولت (وهي نفس وحدة الجهد) . في البنود السابقة تجنبنا التساؤل عن كيفية تكوين التيار الكهربائي وذلك بأن فرضنا وجود نقطتين في الجسم الموصل واقعتين تحت تأثير فرق جهد ثابت قدره $U_1 - U_2$ ، وأن هذا الفرق في الجهد ناشيء عن مصادر خارجية للطاقة . والآن حان الوقت لكي نأخذ بعين الاعتبار هذه المصادر للطاقة بشيء من التفصيل .

دعنا نفحص جميع القوى التي قد تؤثر على ناقلة شحنة قيمتها q . أولاً هناك القوة الكهروستاتيكية $q\mathbf{E}_s$ ، إذ تشير $\mathbf{E}_s$ الى المجال الكهروستاتيكي وقيمته :

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{(\rho + \rho_P)(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\, dv' \quad + \quad \text{تكامل سطحي ملائم} \qquad (7\text{-}21)$$

وحتى اذا كان ρ (أو ρ_p) دالة للزمن نجد أنه بالامكان تعريف المجال الكهروستاتيكي $\mathbf{E}_s$ بواسطة المعادلة (7-21) . وبهذا تصبح الدالة $\mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t)$ ، المعرفة بدلالة الكثافات الشحنية الآنية ، ممتلكة لجميع الخواص الأساسية للمجال الكهروستاتيكي . وبالاضافة الى القوة $q\mathbf{E}_s$ قد يتوفر لدينا قوى ناشئة عن مجال مغناطيسي متغير (لاحظ قانون فراداي في الفصل التاسع) ، أو قوى ناشئة عن تكوين إنحدار ناتج عن تجميع ناقلات الشحنة في أمكنة معينة كما في حالة القوى الكيميائية أو قوى الانتشار . كما يمكن أن تنشأ قوة مغناطيسية ، لكن هذه القوة إن وجدت ستؤثر بصورة عمودية على حركة الجسيم المشحون q (لاحظ الفصل الثامن) ، ولا تنجز شغلاً على الجسيم . ولهذا السبب نستثني بشكل خاص القوى المغناطيسية مالم تقترن مع قوى أخرى (لاحظ موضوع القوة الدافعة الكهربائية

الحركية في الفصل التاسع) . وأخيراً قد تكون هناك قوى ميكانيكية ناشئة عن مجمل القوة الميكانيكية المؤثرة على الموصل الذي يحتوي على الجسيم المشحون* . وجميع هذه القوى هي أساساً كهرومغناطيسية في مزاياها ، حتى القوى الميكانيكية والقوى التي تدعى كيميائية تبث بصورة عامة عن التأثير المتبادل مع الذرات والجسيمات الجزيئية الاخرى . وأساس هذا التأثير المتبادل يعد في الأصل كهربائياً أو مغناطيسياً .

واذا جمعنا جميع تلك القوى ، باستثناء القوة $q\mathbf{E}_s$ ، ورمزنا لها $\mathbf{F}_w$ وطبقنا قانون نيوتن الثاني في الحركة ، لحصلنا على المعادلة الآتية :

$$q\mathbf{E}_{\text{eff}} = q\mathbf{E}_s + \mathbf{F}_w = m\mathbf{f}, \tag{7-22}$$

اذ يعبر الرمز $\mathbf{f}$ عن تعجيل الجسيم المشحون ، والرمز m عن كتلة الجسيم .

وعندما يتحرك الجسيم المشحون بفضل تلك القوة في الفراغ ، فانه يستمر في حركة معجلة ، بيد أن هذه الحالة لا تهمنا كثيراً الآن . أما إذا كان الجسيم متحركاً داخل مادة موصلة ، فان أمد الحركة المعجلة سيكون قصيراً لحين أن يرتطم الجسيم باحدى ذرات المادة . ونتيجة لهذا التصادم يرتد الجسيم المشحون باتجاه عشوائي بحيث يكون متوسط التأثير الناشيء عن التصادم هو تقليل سرعة الجسيم الى الصفر . ومرة اخرى يبدأ الجسيم بحركة ذات تعجيل الى أن يحدث تصادم آخر ، وهلم جرا . واذا فرضنا أن متوسط زمن التصادم هو τ ، لوجدنا أن متوسط سرعة الجسيم (أي سرعة الانجراف) باتجاه التعجيل ستصبح .

$$\mathbf{v} = \tfrac{1}{2}\mathbf{f}\tau = \frac{1}{2m}(q\mathbf{E}_s + \mathbf{F}_w)\tau.$$

افرض الآن أننا أدخلنا القيمة الفعالة للمجال حسبما جاء في المعادلة (7-22) :

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{E}_s + (1/q)\mathbf{F}_w,$$

ولاحظ أن سرعة الانجراف $\mathbf{v}$ ترتبط بكثافة التيار $\mathbf{J}$ بموجب العلاقة (7-4) ، لذا

$$\mathbf{J} = \left[\sum_i \frac{N_i q_i^2 \tau_i}{2m_i}\right]\mathbf{E}_{\text{eff}}, \tag{7-23}$$

* تستثنى قوى الجذب الأرضي من هذا الاعتبار ، وذلك لانها قوى محافظة لا تساهم في قيمة التكامل الخطي للمعادلة (7-20) .

وهذه العلاقة هي قانون أوم . عندئذ يبدو واضحاً أن التوصيل النوعي g يعطى بالمعادلة

$$g = \sum_i \frac{N_i q_i^2 \tau_i}{2m_i} \tag{7-24}$$

ولتحقيق مانصبو إليه فمن الملائم ان نكتب المعادلة (7-23) بالصيغة :

$$\mathbf{E}_s + \frac{1}{q}\mathbf{F}_w = \eta \mathbf{J}. \tag{7-23a}$$

واذا وجدنا ناتج الضرب اللامتجه لهذه المعادلة مع العنصر الخطي **dl** وكاملنا الناتج من الموضع a الى الموضع b لحصلنا على :

$$\int_a^b \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} + \frac{1}{q}\int_a^b \mathbf{F}_w \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \eta \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l}.$$

التكامل الأول يمثل فرق الجهد $U_a - U_b$. أما التكامل الثاني فسندعوه القوة الدافعة الكهربائية للجزء ab ونعطيه الرمز المختصر $\mathcal{E}_{ab}$. وحسبما جاء في البند (7-4) فانه بالإمكان الاستعاضة عن التكامل الثالث بالكمية IR_{ab} ، اذ أن I يمثل التيار المار بين النقطتين a و b ، و R_{ab} تمثل المقاومة المكافئة للموصل بين هاتين النقطتين . لذا :

$$U_b - U_a = \mathcal{E}_{ab} - IR_{ab}. \tag{7-25}$$

وعندما تكون $\mathcal{E}_{ab}$ صفراً ، يطلق على الجزء ab عنصر دائرة كهربائية غير فعال (passive) . وعندما لا تكون $\mathcal{E}_{ab}$ صفراً يدعى العنصر عنصراً فعالاً (active) أو يدعى مصدراً للقوة الدافعة الكهربائية . والمعادلة (7-25) تعد معادلة أساسية لتحليل الدوائر الكهربائية .

إن النقل المتواصل للشحنة بين النقطتين a و b يؤدي الى نشوء تيار ثابت في الجزء ab . فاذا نقلت الشحنة :

$$dQ = I\,dt$$

من a الى b خلال الفترة الزمنية dt ، أصبح الربح في الطاقة الكهربائية مساوياً :

$$dQ\,(U_b - U_a) = (\mathcal{E}_{ab} I - I^2 R_{ab})\,dt. \tag{7-26}$$

الحد $I^2R_{ab}\,dt$ يمثل تحويلاً غير قابل للعكس (أو غير عكوس) irreversible للطاقة الكهربائية الى طاقة حرارية . لقد اشرنا الى أن ناقلات الشحنة تصطدم بصورة مستمرة بذرات وجزيئات الموصل . وخلال هذه العملية يتحول جزء من الحركة الانجرافية المنسقة لناقلات الشحنة الى حركة حرارية عشوائية . أما الحد $\varepsilon_{ab}\,I\,dt$ فيمثل (حسب وجهة النظر الثريوديناميكية) تحويلاً قابلاً للعكس (أو تحويلاً عكوساً) reversible من طاقة غير كهربائية لمصدر مثالي للقوة الدافعة الكهربائية الى طاقة كهربائية . تعد ε_{ab} موجبة اذا كانت بإتجاه التيار نفسه ، حيث يقوم في هذه الحالة مصدر القوة الدافعة الكهربائية بتجهيز الطاقة الكهربائية الى الدائرة على حساب الطاقة غير الكهربائية التي يملكها المصدر . وعندما تكون ε_{ab} سالبة فإن المصدر يقوم بامتصاص الطاقة الكهربائية من الدائرة الكهربائية ويحولها الى طاقة من نوع آخر . والخلية الكيميائية خير مثال على التحويل الكيميائي ـ الكهربائي للطاقة . أما المزدوج الحراري فيعدُّ مثالاً على التحويل الحراري ـ الكهربائي للطاقة ، والدينمو (أو المولد الكهربائي) مثال على التحويل الميكانيكي ـ الكهربائي للطاقة . (عندما يمتص الدينمو الطاقة من الدائرة الكهربائية فإنه يعمل كمحرك ، وعندما يجهز الطاقة الكهربائية فانه يعمل كمولد) .

دعنا نصل النقطتين a و b لتكوين دائرة كهربائية كاملة من الجزء ab ، عندئذ ينتج :

$$U_a = U_b,$$

و

$$\varepsilon = IR; \qquad \text{(7–25a)}$$

لذا

$$\varepsilon I = I^2R. \qquad \text{(7–26a)}$$

في هذه الحالة تمثل ε القوة الدافعة الكهربائية الكلية في الدائرة ، و R المقاومة الكلية لهذه الدائرة الكهربائية .

7-6 التيارات الثابتة في الأوساط بدون مصادر للقوة الدافعة الكهربائية :
Steady currents in media without sources of emf

هناك تناظر بين منظومة كهروستاتيكية من الموصلات والعوازل من ناحية ، وبين المنظومة التي تقوم بتوصيل التيار الكهربائي من الناحية الاخرى . وهذا التناظر سيكون موضوع البند الحالي .

دعنا نأخذ بنظر الاعتبار وسطاً موصلاً متجانساً أومياً لا يحتوي على مصادر داخلية للقوة الدافعة الكهربائية وفي حالة توصيل مطرد . ومادمنا نتعامل بشكل خاص مع الحالة التي يكون فيها التيار ثابتاً ، فإنّ كثافة الشحنة الموضعية $\rho(x, y, z)$ تكون قد حصلت على قيمة الاتزان ، وان $\partial \rho / \partial t = 0$ لكل نقطة من نقاط الوسط . عندئذ تؤول معادلة الاستمرارية (العلاقة 9-7) الى الآتي :

$$\text{div}\, \mathbf{J} = 0, \quad \text{(للتيارات الثابتة)} \tag{7-27}$$

وباستخدام قانون أوم مقترناً مع المعادلة (27-7) نحصل على :

$$\text{div}\, g\mathbf{E} = 0,$$

وللوسط المتجانس تختصر هذه المعادلة الى الشكل الآتي :

$$\text{div}\, \mathbf{E} = 0.$$

لكنه في الحالة التي لا توجد فيها مصادر للقوة الدافعة الكهربائية ، فإن العلاقة $\mathbf{E} = \mathbf{E}_s$ يمكن اشتقاقها من جهد لا متجه :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\, U.$$

وبدمج المعادلتين الآخيرتين ينتج :

$$\nabla^2 U = 0, \tag{7-28}$$

وهذه هي معادلة لابلاس .

وبهذا نرى أنه بالامكان حل مسألة التوصيل في حالة الاستقرار (steady-state conduction) بنفس طريقة حل المسائل الكهروستاتيكية . وتحل معادلة لابلاس باستخدام احدى الطرق التي تمت مناقشتها في الفصل الثالث ، حيث يمكن تعيين الحل الملائم ، كما هي الحال دائماً ، بواسطة شروط الحدود . وشروط الحدود التي تعد كافية لحل المسألة هي تلك الشروط التي تحدد قيمة U أو

قيمة **J** عند كل نقطة من نقاط سطح الوسط الموصل . إن تحديد كثافة التيار **J** عند السطح يكافىء تحديد المجال الكهربائي **E** ، وذلك لان أحد هذين المتجهين يرتبط بالآخر طبقاً لقانون أوم . وحال إيجاد الحل الملائم لمعادلة لابلاس يصبح بالامكان تعيين المتجه **E** (وكذلك المتجه **J**) عند كل نقطة من نقاط الوسط وذلك بأخذ الانحدار .

وعندما يكون التوصيل في حالة استقرار يمكن حساب التيار الذي يقطع مساحة معينة من السطح الفاصل بين وسطين موصلين بطريقتين : اما بدلالة كثافة التيار في الوسط الاول ، أو بدلالة كثافة التيار في الوسط الثاني . ولما كان من المؤكد أن تؤول كلتا الطريقتين الى النتيجة ذاتها ، فإن المركبة العمودية لكثافة التيار J يجب ان تكون متصلة عبر السطح الفاصل :

$$J_{1n} = J_{2n}, \tag{7–29a}$$

$$g_1 E_{1n} = g_2 E_{2n}. \tag{7–29b}$$

وهذه المعادلة تحل محل المعادلة المناظرة لها التي تعبر عن استمرارية المركبة العمودية للازاحة D_n عبر السطح الفاصل بين عازلين في المسائل الكهروستاتيكية .

وطالما كان أي من الوسطين لا يحتوي على مصادر للقوة الدافعة الكهربائية ، فان :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

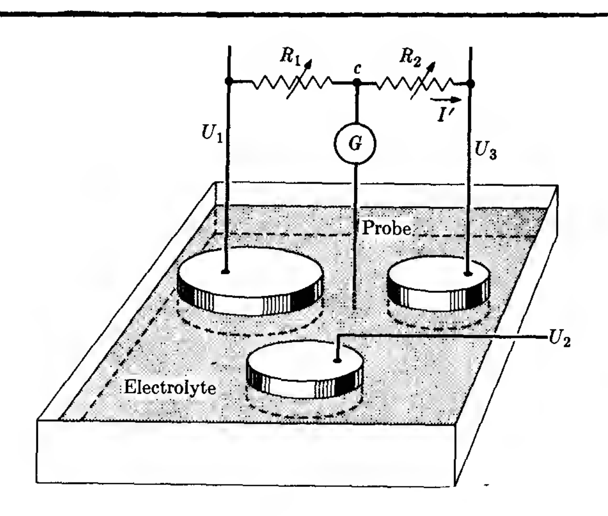
لاي مسائر مغلق يمر في الوسطين . وكذلك ينتج :

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{7–30}$$

طبقاً لما جاء في الاشتقاق الموضح في البند (7–4) . وواضح ان هذه المعادلة تصح لكلا النوعين من المسائل (الكهروستاتيكية والتوصيل المستقر) .

يعد الحوض الالكتروني (المبين في الشكل 7–7) خير مثال على الافكار المذكورة في اعلاه . وهنا يحتوي الحوض على عدد من الموصلات المعدنية المتصلة مع مصادر خارجية للجهد والموضوعة في وسط سائل ذي توصيل كهربائي معتدل (مثل محلول الملح) . ولما كان التوصيل النوعي للمحلول الملحي أصغر بكثير من التوصيل النوعي للمعدن (راجع الجدول 7–1) ، فان المجال الكهربائي في المعدن (لنفس كثافة التيار) أصغر بكثير من المجال الكهربائي في المحلول . وعندئذ تكون النسبة

بين المجالين صغيرة الى حد يمكن اهمال شدة المجال E في المعدن ، وان كل موصل معدني يمكن افتراضه على أنه حجم متساوي الجهد . ويمكن استخدام مجس موصل صغير ، كما هو موضح في الشكل ، لدراسة الجهد في المحلول . وبهذه الطريقة يمكن رسم مخطط لسطوح متساوية الجهد . إن فائدة هذه الطريقة العملية هي انها توفر حلاً لمعادلة لابلاس ، على حين قد يصعب أو يستحيل ايجاد حل تحليلي للمسألة في الحالة ذات الشكل الهندسي المعقد . ولا يقتصر هذا الحل على مسألة التوصيل بل يتعداه على حد سواء ليشمل كذلك المسألة الكهروستاتيكية المكافئة حيث تكون الموصلات المعدنية نفسها محاطة بوسط عازل (الشكل 8-7) .



الشكل 7-7

حوض الكتروليتي ذو بعدين . ثبت جهد الموصلات المعدنية الثلاثة على القيم U_1 و U_2 و U_3 ، حيث أفترض ان $U_1 > U_2 > U_3$. الرمز يمثل مقاومة متغيرة ، و G يمثل كلفانومتر . وقد عدّت مقاومة الاسلاك مهملة . واذا نظمت المقاومات R_1 و R_2 بحيث لا يمر تيار فى الكلفانومتر ، فان : $U_{probe} = U_c$ ، والتيار I' نفسه يمر خلال المقاومتين R_1 و R_2 . عند هذه الظروف ينتج :

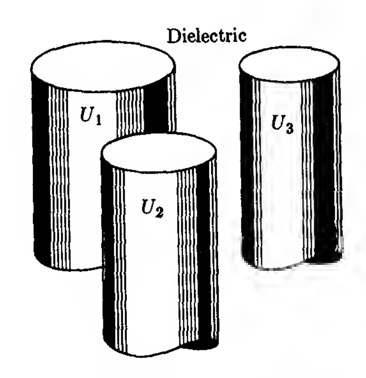
$$U_{\text{probe}} = U_1 - I'R_1 = U_3 + I'R_2,$$

أو

$$U_{\text{probe}} = U_1 - (U_1 - U_3)R_1/(R_1 + R_2).$$

وكمثال آخر على التناظر بين التوصيل والكهروستاتيكية ، نأخذ موصلين معدنيين في وسط متجانس وأومي ذي توصيل نوعي معتدل قدره g . واذا ثبت جهدا الموصلين المعدنيين على القيمتين U_1 و U_2 ، لوجدنا أن التيار I المار بينهما يساوي

$$I = \frac{U_1 - U_2}{R},$$



الشكل 8-7

المسألة الكهروستاتيكية المكافئة لمسألة التوصيل للشكل السابق . طالما أن الشكل (7-7) يصور توصيلاً ذا بعدين ، فإنّ المسألة الكهروستاتيكية هي أيضاً ذات بعدين ، وإن كل موصل يعد إسطوانة لانهائية الطول .

اذ ان R تمثل مقاومة الوسط . ويمكن كتابة هذا التيار بدلالة كثافة التيار J المتكون في الوسط الموصل كالآتي :

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, da,$$

إذ يعبر الرمز S عن أي سطح مغلق يحيط بصورة كاملة بأحد الموصلات . ولكن

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E}.$$

وبدمج المعادلات الثلاث الأخيرة نحصل على :

$$\frac{U_1 - U_2}{R} = g \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, da. \qquad (7\text{-}31)$$

واذا نتج المجال الكهربائي المماثل عن شحنات كهروستاتيكية موضوعة على الموصلين ، لحصلنا على الآتي طبقاً لقانون كاوس :

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, da = \frac{1}{\epsilon} Q, \qquad (7\text{-}32)$$

إذ أن Q تمثل الشحنة الموضوعة على الموصل المعدني المحاط بالسطح S ، و ϵ سماحية الوسط العازل . وعند توفر هذه الظروف يشكل الموصلان متسعة :

$$Q = C(U_1 - U_2). \tag{7-33}$$

وبادخال المعادلتين (32–7) و (33–7) في المعادلة (31–7) نحصل على :

$$RC = \frac{\epsilon}{g}, \tag{7-34}$$

وهي علاقة بين مقاومة الوسط وسعة المسألة الكهروستاتيكية المكافئة .

7–7 الوصول الى حالة الاتزان الكهروستاتيكي

Approach to electrostatic equilibrium.

أوضحنا في الفصل الثاني ان الشحنة الاضافية التي يحملها الموصل تستقر على سطحه ، وهذه بالطبع هي حالة اتزان كهروستاتيكي . بيد ان الوصول الى الاتزان لم يدرس حينئذ ، لكنه ذكرنا ان بلوغ الاتزان يكون سريعاً جداً في حالة الموصلات الجيدة . وكلما كان الموصل أردأ ، كان بلوغ الاتزان الكهروستاتيكي أكثر بطءً . والحقيقة انه اذا كان التوصيل النوعي للمادة قليلاً جداً ، فان الحصول على الاتزان الكهروستاتيكي قد يستغرق سنوات عديدة .

خذ وسطاً متجانساً متساوي الاتجاه ومميز بتوصيل نوعي قدره g وسماحية ϵ يحتوي على شحنة طليقة ذات كثافة حجمية قدرها $\rho_0(x, y, z)$. عند فصل هذه المنظومة الموصلة بصورة فجائية عن مصادر القوة الدافعة الكهربائية وعن المجالات الكهربائية التي تعتمد على الزمن ، فانها ستميل نحو بلوغ الاتزان حيث لا يوجد هناك شحنة فائضة في المنطقة الداخلية من المنظومة . إن معادلة الاستمرارية المتمثلة بالصيغة :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \tag{7-9}$$

تؤول الى الشكل الآتي بمساعدة قانون أوم :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + g \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \tag{7-35}$$

لكن divE تتعلق بمصادر المجال ، والحقيقة ان :

$$\text{div}\,\mathbf{E} = \rho/\epsilon,$$

لذا :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{g}{\epsilon}\rho = 0. \qquad (7\text{–}36)$$

وحل هذه المعادلة التفاضلية الجزئية هو :

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(x, y, z)e^{-gt/\epsilon} \qquad (7\text{–}37)$$

ومن هذه العلاقة يتبين أن الاقتراب الى حالة الاتزان يكون بشكل أسي .
يتضح من المعادلة (37–7) أن الكمية ϵ / g لها أبعاد الزمن ، وتدعى ثابت الزمن أو زمن الارتخاء t_c للوسط :

$$t_c = \frac{\epsilon}{g} = \epsilon\eta. \qquad (7\text{–}38)$$

وثابت الزمن يعد بمثابة مقياس للسرعة التي تمكن الوسط الموصل من بلوغ حالة الاتزان الكهروستاتيكي . ويمكن تعريف ثابت الزمن بدقة على أنه الزمن اللازم لكي تنقص قيمة الشحنة في منطقة محددة الى $1/e$ من قيمتها الأصلية .

يمكن لمادة أن تصل الى حالة الاتزان في توزيعها الشحني في عملية تطبيقية معينة عندما يكون ثابت الزمن لها أقل بكثير من الزمن المميز اللازم لانجاز قياس ذي صلة وثيقة بالموضوع . ولبعض التطبيقات يعد ثابت الزمن الذي يمتلك قيمة أقل من عشر الثانية كافياً لضمان الحصول على سلوكية الموصلات نفسها ، طالما كان معظم قيم سماحية الموصلات ينحصر بين ϵ_0 و $10\epsilon_0$ ، وهذا يتطلب أن تكون المقاومة النوعية أقل من 10^9 أو 10^{10} أوم – متر . وبالنسبة للتطبيقات ذات الترددات العالية فان الأمر يتطلب ثابت زمن أقصر ، وبالتالي مقاومة نوعية أصغر للحصول على سلوك حقيقي للتوصيل . والحقيقة أن :

حيث يمثل الرمز f أعلى تردد تتضمنه التجربة .

7-8 قانونا كيرشوف Kirchhoff's laws.

لقد اقتصرت مناقشتنا للتوصيل حتى هذه النقطة أصلاً على زاوية واحدة هي نقل الشحنة في وسط موصل ، كما حاولنا أن نحل المسألة بدلالة معادلات تفاضلية ينبغي أن يصح استخدامها على كل نقطة من نقاط الوسط . وفي مثل هذه الحالات نجد ان الكمية المهمة التي يجب تعيينها هي كثافة التيار **J** . ولكنه في العديد من المسائل ذات الاهتمام العملي تجبر ناقلات الشحنة الكهربائية على تتبع مسار ذي توصيل عالٍ يدعى الدائرة الكهربائية ، وعندئذ تكون التيارات المتكونة في أجزاء الدائرة هي الكميات التي تهمنا . وفي هذا البند سنقصر دراستنا على الدوائر الكهربائية ذات التيارات الثابتة ، أي دوائر التيار المباشر .

قد تحتوي الدائرة الكهربائية على عدد من الفروع المختلفة ، والحقيقة أن الدائرة الكهربائية يمكن أن تعرف على أنها شبكة من المسارات الموصلة ، وقد يحتوي كل مسار على مصادر للقوة الدافعة الكهربائية . والمشكلة الأساسية في تحليل الدوائر الكهربائية هي أن تعطى المقاومة والقوة الدافعة الكهربائية لكل عنصر في الدائرة ، ويطلب ايجاد التيار في كل من تلك المسارات . ويمكن حل هذه المسألة بأسلوب نظامي يعتمد على قانونين يعرفان بأسم قانوني كيرشوف* .

وقبل أن نذكر نص هذين القانونين علينا أن نعرف مفهومين اساسيين . نقطة التفرع هي النقطة التي يتصل عندها ثلاثة موصلات أو أكثر في الدائرة الكهربائية ، مثل النقاط a و b و c و d في الشكل (7-9) . والدارة Loop هي أي مسار موصل مغلق في الشبكة الكهربائية . والآن نذكر نص قانوني كيرشوف :

اولاً ـ المجموع الجبري للتيارات التي تصب في نقطة تفرع يساوي صفراً ، اي أن

$$\sum I_j = 0. \qquad \text{(I)}$$

ثانيا ـ المجموع الجبري للقوى الدافعة الكهربائية في أي دارة من الشبكة الكهربائية يساوي المجموع الجبري لنواتج الضرب IR في تلك الدارة ، أي

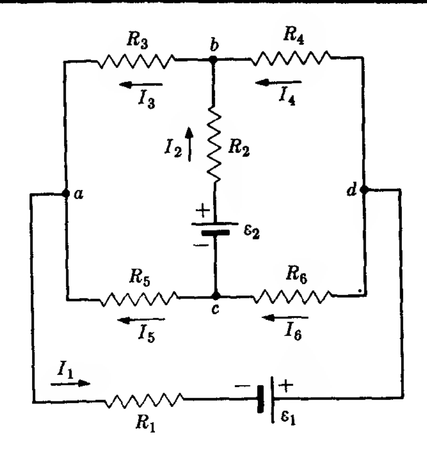
$$\sum \mathcal{E}_j = \sum I_j R_j. \qquad \text{(II)}$$

* نسبة الى العالم Gustav Robert Kirchhoff

القانون الأول يمثل نصاً معبراً لحقيقة أن الشحنة لا تتراكم عند نقطة التفرع في الدائرة الكهربائية نتيجة لمرور تيار ثابت فيها . أما القانون الثاني فينتج مباشرة من المعادلة (7-25) ، كما يبان في الحال . فاذا استخدمت المعادلة (7-25) على كل جزء من الدارة ومن ثم جمعت النتائج ، لأصبح الجانب الأيسر من المعادلة يساوي صفراً ، أما الجانب الأيمن من المعادلة فيؤول الى الآتي :

$$\sum \mathcal{E}_j - \sum I_j R_j.$$

وقبل استخدام قانوني كيرشوف لمسألة معينة ، من الضروري أن نفترض إتجاهات للتيارات المارة في كل فرع من فروع الشبكة الكهربائية . وهذه الاتجاهات ينبغي أن تؤشر على الرسم التخطيطي للدائرة الكهربائية . عند ذلك تتم صياغة المعادلات (1) و (2) على أساس تلك الاتجاهات المفترضة . فاذا آلَ حل تلك المعادلات الى قيمة سالبة لتيار معين ، فإن ذلك يعني أن الاتجاه الصحيح لهذا التيار هو بعكس الاتجاه المفترض . وفي المسألة المبينة في الشكل (7-9) هناك ستة تيارات مجهولة مؤشرة بالرموز I_1 و I_2 و I_3 و I_4 و I_5 و I_6 . وكل من هذه التيارات قد اعطي اتجاه مفترض .



الشكل 7-9

دائرة نموذجية حلها يتطلب استخدام قانوني كيرشوف . الرمز $\dashv|\!\!|\vdash$ يعبر عن مصدر القوة الدافعة الكهربائية . في دائرة نموذجية تحدد قيم المقاومات والقوى الدافعة الكهربائية ويطلب تعيين التيارات . وكنموذج لمعادلات التيار الست التي يمكن صياغتها لهذه الدائرة تعطى المعادلتان الآتيتان .

$$-I_1 + I_3 + I_5 = 0 \qquad \mathcal{E}_1 = I_6R_6 + I_5R_5 + I_1R_1.$$

يمكن تطبيق قانون كيرشوف الأول على كل نقطة تفرع من نقاط الدائرة الكهربائية ، بيد أن المعادلات الناتجة ليست جميعها مستقلة . إن تحديد المعادلات المستقلة يخضع لقانون عام ينص على أنه اذا كان هناك نقاط تفرع عددها n فإنَّ n-1 من هذه النقاط تولد معادلات مستقلة . وفي المسألة المبينة في الشكل (9-7) نجد أن هناك ستة تيارات مجهولة ، ولهذا السبب يتطلب الحل ثلاث معادلات مستخرجة من تطبيق القانون الأول على نقاط التفرع وثلاث معادلات أخرى مستمدة من تطبيق قانون كيرشوف الثاني .

أشرنا الى حقيقة أن الجمع المقصود في قانوني كيرشوف هو جمع جبري . ففي القانون الأول يُعد التيار موجباً إذا كان إتجاهه المفترض يشير نحو نقطة التفرع المعنية ، ويعد سالباً إذا كان التيار المفترض يشير بعيداً عن نقطة التفرع . وعند إستخدام القانون الثاني يجب أن يؤخذ إتجاه محدد (إما مع عقرب الساعة أو بعكس عقرب الساعة) لاجتياز عناصر الدارة . فالقوة الدافعة الكهربائية تعدُّ موجبة اذا هي نفسها ولدت تياراً موجباً باتجاه الاجتياز . كما تعدُّ الكمية IR موجبة اذا كان التيار المار في المقاومة المعنية باتجاه الاجتياز نفسه .

7-9 التوصيل المعدني Metallic conduction:

يتبين من الجدول (1-7) أن مجموعة المواد التي تمتلك توصيلاً كهربائياً عالياً هي المعادن . وإمتلاك هذه المواد لتوصيل نوعي عالٍ يعود الى سببين ، الأول هو أن المعادن تحتوي على كثافة كبيرة من ناقلات الشحنة وبحدود الكترون واحد لكل ذرة . والسبب الآخر هو أن سرعة الانجراف لوحده المجال الكهربائي عالية لتلك المواد .

في المعادن نتعامل مع نوع واحد من ناقلات الشحنة ألا وهو الالكترون . ولهذا تكون معادلات التوصيل بسيطة نوعاً ما في هذه الحالة :

$$\mathbf{J} = -Ne\mathbf{v}, \tag{7-39}$$

$$g = Ne(v/E) = Ne^2\tau/2m, \tag{7-40}$$

حيث يشير الرمز e الى القيمة المطلقة لشحنة الالكترون . إن سرعة إنجراف الالكترون لوحدة المجال الكهربائي ، أي الكمية (v / E) ، تدعى حركية

الالكـــترون . والحركيـــة الكبـــيرة تـــدل ضمنيـــاً عـــلى ان زمن (mobility) التصادم τ طويل ، وهذا يعني أن متوسط المسار الحر هو أيضاً طويل . ولكي نحصل على شيء من الإدراك لمتوسط المسار الحر في المعادن ، علينا ان نرجع الى دينـاميكيـة التصـادم لـلالكـترونـات . فمن المعلوم ان الموصـل يعـدُّ متعـادلاً كهروستاتيكياً في المتوسط فقط ، اذ توجد تغيرات كبيرة في الجهد لمسافات بحدود أنكستروم واحد ، وأنه يتحتم على الجسيم المشحون ، كالألكترون ، أن يصطدم أو يتشتت كلما يحدث تغير في الجهد . كما انه معلوم أيضاً أن الطبيعة الموجية للألكترون تلعب دوراً مهماً في تحديد حركته على النطاق الذري .

إن الحل الكامل لمسألة تصادم الألكترون باستخدام مفاهيم الميكانيك الموجي خارج نطاق هذا الكتاب ، ولهذا سنكتفي بذكر نص النتيجة . في بلورة مثالية ذات جهد دوري بثلاثة أبعاد ، لا تعمل موجة الالكترون أي تصادم ، أي أن زمن التصادم τ لا نهائي . ولهذا فان التوصيل النوعي المحدود القيمة في المعادن ينشأ عن العيوب الموجودة في التركيب الدوري التام . وهذه العيوب تكون على نوعين : أولاً ــ الشوائب والعيوب الهندسية (مثل تحبب السطوح الحدودية للمواد متعددة البلورات poly crystalline) ، وثانياً ــ العيوب المحتثة حرارياً الناشئة عن الحركة الحرارية للذرات في التركيب البلوري . وكلا النوعين يساهم في تحديد المقاومة النوعية للمادة بصورة مستقلة بحيث أن :

$$\eta = \eta_1 + \eta_2(T), \tag{7-41}$$

إذ أن الرمز T يمثل درجة الحرارة المطلقة .

ان العامل المهيمن على تحديد المقاومة النوعية للمعادن النقية جداً في درجات الحرارة الاعتيـاديـة هو تشتـت الموجـات الالكـترونيـة بواسطـة الـذرات المزاحـة حرارياً . وبهذا نجد أن :

$$\eta \approx \eta_2(T).$$

ومساحة مقطع التشتت للذرة المزاحة تتناسب طردياً مع مربع سعة الذبذبة (x^2) ، أي مع الطاقة الكامنة القصوى للذرة . واذا فرضنا أن القوى المرجعة المؤثرة على الذرات المزاحة هي قوى مرنة ، لحصلنا على الآتي :

$$(\text{Potential energy})_{\max} = (\text{Kinetic energy})_{\max} \propto kT,$$

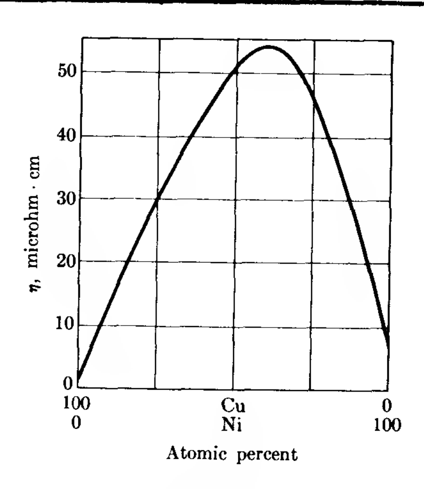
$$\eta \approx \eta_2 \propto (\tau_2)^{-1} \propto x^2 \propto T, \tag{7-42}$$

وهذا يعني ان المقاومة النوعية لمعدن نقي تتناسب طردياً مع درجة الحرارة المطلقة . ولهذا فإن المعامل الحراري للمقاومة, $(1/\eta)\, d\eta/dT$ لمعدن نقي جداً يصبح

$$\alpha = \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dT} \approx \frac{1}{T}, \tag{7-43}$$

وهذه العلاقة تتفق بصورة تقريبية مع القيم المدرجة للمعادن في الجدول (1-7) . وبتعبير أدق فان المناقشة المذكورة آنفاً تعد صحيحة فقط لدرجات الحرارة التي تزيد على درجة حرارة دباي Debye temperature للمعدن (وهي الدرجة التي اذا تجاوزتها درجة حرارة المعدن تصبح جميع أنماط الاهتزازات الذرية مهيجة) . عند الدرجات التي تقل الى حد ماعن درجة حرارة دباي، تهبط η عن الحد الذي يخضع للعلاقة الخطية المعبر عنها بالمعادلة (42-7) . وعند درجات الحرارة المنخفضة جداً لا يمكن إهمال المساهمة الناشئة عن η .

ان اضافة كميات صغيرة من الشوائب الذائبة يزيد دائماً من قيمة المقاومة النوعية . والسبيكة ، ويمكن عدّها معدناً غير نقي ، تمتلك دائماً مقاومة نوعية أعلى مما يملكه أحد المعدنين الذي يمتلك مقاومة نوعية منخفضة (الشكل 10-7) . ومن البديهي أن المعامل الحراري α لسبيكة يكون ذا قيمة أوطأ مما يملكه المعدن النقي تماماً بسبب مقاومته النوعية المرتفعة . ولقد تم تطوير سبائك معينة ذات قيم صغيرة جداً لمعاملات المقاومة النوعية الحرارية .



الشكل 10-7

المقاومة النوعية لسبائك من النحاس والنيكل دالة لنسب التركيب في درجة حرارة $20^{\circ}C$.

مسائل

7-1 (أ) عينة من النحاس تحمل تياراً ذا كثافة قدرها ألف أمبير لكل مترمربع . وبفرض ان كل ذرة نحاس تساهم في الكترون توصيل واحد ، أحسب سرعة الانجراف الالكترونية المصاحبة لهذا التيار . (عدد أفوكادرو N_0 يساوي 6.02×10^{23} ذرة لكل مول ، الوزن الذري للنحاس : 63.5 ، كثافة النحاس : 8.92 غرام لكل سنتمتر مكعب) .

(ب) استخدام التوصيل النوعي لحساب زمن متوسط التصادم للالكترون في النحاس .

7-2 منظومة من الشحنات والتيارات واقعة بأجمعها داخل حجم ثابت قدره V . عزم ثنائي القطب للتوزيع (لاحظ البند 9-2) يعرف وفق العلاقة

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r}\rho \, dv,$$

حيث $\mathbf{r}$ هي متجه موضع يبدأ من نقطة اصل مثبتة . برهن على ان :

$$\int_V \mathbf{J} \, dv = \frac{d}{dt} \mathbf{p}.$$

(ملاحظة : برهن أولاً على صحة المتطابقة :

$$\int_V \mathbf{J} \, dv = \oint_S \mathbf{r}\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da - \int_V \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{J} \, dv,$$

ولاحظ ان كثافة التيار تتلاشى على السطح S) .

7-3 لوحان متوازيان لا نهائيان من المعدن تفصلها مسافة قدرها d . ملئت المنطقة بين اللوحين بوسطين موصلين ، بحيث يكون السطح الفاصل بين الوسطين بشكل مستوي موازٍ للوحين . الوسط الأول (توصيله النوعي g_1 وسماحيته ϵ_1) سمكه a ، أما الوسط الثاني (توصيلة النوعي g_2 وسماحيته ϵ_2) فسمكه يساوي d-a . ثُبت اللوحان المعدنيان على الجهدين U_1 و U_2 على الترتيب . ماقيمة الجهد على السطح الفاصل بين الوسطين ، وماقيمة الكثافة السطحية للشحنة الطليقة على هذا السطح ؟

7-4 ثلاث مقاومات قيمها : أوم واحد وأومان وثلاثة أومات . جد ثمانية تركيبات مختلفة يمكن عملها من هذه المقاومات .

7-5 مصباح ضوئي قدرته 0.4 واط صمم للاشتعال بفولتية قدرها فولتان تربط عبر طرفي المصباح . وصلت مقاومة R على التوازي مع المصباح ، ثم وصلت المجموعة على التوالي مع مقاومة أخرى قيمتها ثلاثة أومات ومع بطارية مقاومتها الداخلية تبلغ ثلث الأوم وذات فولتية قيمتها ثلاثة فولتات . ماقيمة المقاومة R اللازمة لكي يشتغل المصباح وفقاً للفولتية التي صمم بموجبها ؟

7-6 * خط كهربائي مقاومته الكلية تساوي nR ربط بين الجهد U_0 والأرض (الارض مرجع لقياس الجهد) . يرتكز الخط على أعمدة عددها n-1 تقع على أبعاد متساوية بحيث تكون مقاومة الخط بين كل عمودين متجاورين قدرها R . وتبلغ مقاومة تسرب الكهربائية الى الأرض عند كل قطب βR . فاذا كان جهد الخط عند العمود m قدره U_m ، أثبت أن :

$$U_{m+1} - (2 + \beta^{-1})U_m + U_{m-1} = 0.$$

7-7 قشرتان اسطوانيتان طويلتان من المعدن (نصف قطريهما r_1 و r_2 ، و $r_2 > r_1$) متحدتا المحور ، فرق الجهد بينهما قدره ΔU . (أ) فاذا ملئت المنطقة المحصورة بين القشرتين بوسط ذي توصيل نوعي g ، إستخدم قانون أوم ($J = gE$) لحساب التيار الكهربائي لوحدة الطول من القشرتين . (ب) واذا ملئت المنطقة الكائنة بين القشرتين بوسط عازل ذي سماحية قدرها ϵ ، لأصبح بالامكان حساب سعة المنظومة من العلاقة $C = Q/\Delta U$. أثبت أن حاصل ضرب المقاومة لوحدة الطول بالسعة لوحدة الطول تساوي ϵ / g لهذه المنظومة .

7-8 تقاس مقاومة التسرب للعازل المصنوع من المطاط لسلك محوري كالآتي : يغمس طول قدره l من السلك المحوري المعزول في محلول من الملح والماء ، ثم يسلط فرق جهد بين السلك والمحلول ويقاس التيار الناتج . وفي حالة خاصة غمر ثلاثة أمتار من سلك محوري في المحلول ، وعند تسليط فرق الجهد قدره مائتا فولت بين سلك التوصيل والمحلول وجد أن قيمة التيار المتولد تساوي 2×10^{-9} أمبيراً . سمك العازل يساوي نصف قطر السلك المركزي الموصل . ماقيمة المقاومة النوعية للمادة العازلة ؟

7-9 سلك طويل من النحاس نصف قطره a مشدود بصورة موازية للوح نحاسي لانهائي المساحة وعلى بعد قدره h عنه . ملئت المنطقة المحيطة بالسلك والكائنة بينه وبين اللوح بوسط ذي توصيل نوعي قدره g . أثبت أن المقاومة الكهربائية بين القطبين النحاسيين لوحدة الطول من السلك تساوي :

$$R = \frac{1}{2\pi g} \cosh^{-1} \frac{h}{a}.$$

7-10 كرة متجانسة ومتساوية الاتجاه ذات توصيل نوعي g تعرضت لجهد قدره $U_0 \cos\theta$ عند جميع نقاط السطح . هنا θ تمثل الزاوية القطبية الاعتيادية مقاسة بالنسبة لمحور يمر في مركز الكرة . عين كثافة التيار **J** عند جميع النقاط داخل الكرة .

7-11 قطبان اسطوانيان من النحاس نصف قطر كل منهما قدره a وضعا بصورة عمودية على قرص من السليكون سمكه s ، ويفصل محوريهما مسافة قيمتها b . غمس القطبان داخل القرص الى عمق قيمته s ، أي الى أن يصلا الوجه الآخر من القرص . الابعاد العرضية للقرص كبيرة بالمقارنة مع b ويمكن عَدها لانهائية . افرض ان التوصيل النوعي للسيلكون g ، وجد التيار الذي يسري بين القطبين عندما يكون فرق الجهد بينهما ΔU .

7-12* لوح مربع من النحاس طوله 20a وسمكه s وتوصيلة النوعي g ، سلط عليه فرق في الجهد بحيث أصبح جهد الحافتين المتعاكستين للوح U_0 و $-U_0$ على الترتيب . (أ) ماقيمة مقاومة اللوح ؟ (ب) واذا عمل ثقب صغير نصف قطره a خلال اللوح عند مركزه ، احسب نسبة التغير في المقاومة بصورة تقريبية . (ملاحظة : جد توزيع الجهد في اللوح باستخدام التوافقيات الاسطوانية لـ cosine θ . ولسوء الحظ ان هذا التوزيع غير صحيح تماماً وذلك لأن الحافتين المتعاكستين للمربع هما ليس بالضبط سطحين متساويين في الجهد . الحل التقريبي ينتج من أخذ متوسط الجهد للحافتين مساوياً $\pm U_0$) .

7-13 مصدران للقوة الدافعة الكهربائية هما ε_1 و ε_2 مقاومتها الداخلية R_1 و R_2 على الترتيب ، ربطا مع بعضها على التوازي وكذلك مع مقاومة حمل قدرها R . (أ) جد التيار المار خلال الحمل . (ب) اذا تغيرت مقاومة الحمل وبقيت الكميات الأخرى ثابتة القيمة ، ماقيمة R اللازمة لكي تكون القدرة المبددة فيها أقصى مايمكن ؟

7-14 مجموعة من الخلايا المتماثلة عددها n ذات مقاومة داخلية R_i وقوة دافعة كهربائية ε ، استخدمت لتجهيز التيار لحمل مقاومته R . بين أنه إذا ربط هذا العدد من الخلايا على التوالي مع بعضها ومع مقاومة الحمل ، لنتج تيار قيمته :

$$I = n\varepsilon/(R + nR_i)$$

أما اذا ربطت الخلايا مع بعضها على التوازي ومن ثم ربطت المجموعة على التوالي مع مقاومة الحمل ، لأصبحت قيمة التيار :

$$I = \varepsilon/(R + R_i/n).$$

15-7 ربطت ست مقاومات متماثلة (R) لتشكل شكلاً سداسياً . ثم ربطت ست مقاومات أخرى مماثلة (لها نفس القيمة R) بين الرؤوس الستة للشكل السداسي ومركز الشكل . (أ) ماقيمة المقاومة المكافئة لمجموعة المقاومات بين رأسين متقابلين؟ و (ب) بين رأسين متجاورين؟

16-7 ست مقاومات تشكل جوانب هرم ثلاثي . خمس من هذه المقاومات متماثلة (R) ، أما المقاومة السادسة فقيمتها مختلفة (R_1) . سلط فرق جهد عبر إحدى المقاومات المجاورة لـ R_1 . اثبت ان الطاقة الحرارية المبددة في R_1 (حرارة جول) تكون في ذروتها عندما : $R_1 = (3/5)R$.

17-7 يمكن الحصول على الدائرة الكهربائية لقنطرة ويتستون بجعل $\varepsilon_2 = 0$ في الدائرة الكهربائية المبينة في الشكل (7-9) ، وباستبدال R_2 بكلفانومتر R_g . كما سنفرض أن $R_1 = 0$. إن الشرط اللازم توفره لحدوث الاتزان في القنطرة (أي عدم مرور تيار في الكلفانومتر) هو : $R_3R_6 = R_4R_5.$

وبهذا يمكن حساب المقاومة المجهولة ، ولتكن R_6 مثلاً ، بدلالة المقاومات الثلاث الأخرى المعلومة ، أي :

$$R_6 = R_4R_5/R_3$$

على أن يكون التيار المار في الكلفانومتر صفراً . (أ) جد التيار المار في الكلفانومتر عندما لا تكون القنطرة في وضع الاتزان . (ب) أفرض انه بالإمكان الحصول على حالة الاتزان بتغيير المقاومة R_4 . تعرف حساسية القنطرة بموجب العلاقة :

$$S = CR_4(\partial I_2/\partial R_4)_0,$$

اذ ان C تمثل انحراف الكلفانومتر لوحدة التيار المار فيه ، والرمز السفلي (0) يعني أن قيمة المشتقة يجب أن تحسب في حالة الاتزان . أثبت أن :

$$S = \frac{C\varepsilon_1}{R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_g(1 + R_5/R_6)(1 + R_4/R_3)}$$

*18-7 افرض أن قنطرة ويتستون التي اشرنا إليها في المسألة السابقة على وشك ان يحدث فيها اتزان ، ودع :

$$R_5/R_3 = \alpha,\ R_6/R_4 = \alpha(1 - \epsilon),$$

حيث $\epsilon \ll 1$. فاذا كانت مقاومة الكلفانومتر (R_g) جديرة بالإهمال اثبت أن

$$I_2/I_1 = \alpha\epsilon/(\alpha + 1)^2.$$

19-7* مقاومة قيمتها تقرب من عشرة أومات مطلوب قياسها باستخدام الدائرة الكهربائية لقنطرة ويتستون المشار اليها في المسألة (17-7) . وهناك مجموعة كبيرة مختارة من المقاومات القياسية متوفرة لدينا . القدرة القصوى المسموح بها في القنطرة هي خمسة واطات . فاذا كانت قيمة R_g مائة أوم ، وان الكلفانومتر لا يتحسس لتيار اقل من 4×10^{-9} أمبيرات ، ماأعلى دقة يمكن الحصول عليها عند قياس المقاومة المجهولة؟ افرض ان المقاومات القياسية مضبوطة ولا تحد من دقة القياس .

20-7* وسط موصل خطي متصل بعدد من الاقطاب قدره n ذات جهود قيمها : U_n ,.... ,U_2 و U_1 . بين أن حرارة جول المتولدة في هذا الوسط تعطى بموجب العلاقة

$$\sum_{i=1}^{n} U_i I_i$$

إذ أن I_i تعبر عن التيار الذي يدخل الوسط الموصل من خلال القطب i .

الفصل الثامن

المجال المغناطيسي للتيارات الثابتة
THE MAGNETIC FLELD OF STEADY CURRENTS

النوع الثاني من المجالات التي تدخل ضمن دراسة الكهربائية والمغناطيسية هو ، بطبيعة الحال ، المجال المغناطيسي . مثل هذه المجالات ، أو بتعبير أصح التأثيرات التي تنجم عن مثل هذه المجالات ، عرفها الإنسان منذ العصور القديمة ، عندما شاهد التأثيرات التي يحدثها المغناطيس الطبيعي الدائمي المعروف باسم magnetite ، وهو أوكسيد الحديد الأسود ($Fe_3 O_4$) ، لأول مرة . أما اكتشاف خاصية البحث عن الشمال وعن الجنوب لهذه المادة فقد كان له أعمق الأثر في الملاحة البحرية والاستكشافات الجغرافية المبكرة . وباستثناء هذا الاستخدام بقيت المغناطيسية تستخدم على نطاق ضيق وظاهرة يسودها الغموض حتى مطلع القرن التاسع عشر حينما اكتشف اورستد أن التيار الكهربائي يولد مجالاً مغناطيسياً . إن أعمال كاوس الأخيرة وأعمال هنري وفراداي وعلماء آخرين ، فضلاً عما قدمه أورستد من إنجازات علمية في هذا المجال ، قد رفعت من منزلة المجال المغناطيسي وجعلته نداً للمجال الكهربائي . أما الانجازات النظرية لماكسويل ولعلماء آخرين (لاحظ الفصول 15 و 16 و 17) فقد أوضحت أن المشاركة بين المجالين الكهربائي والمغناطيسي هي حقيقية ، وأن هذين المجالين قد يتشابكان بصورة متلازمة . وقد توجت الجهود التي بذلها الرجال العمليون بتطوير المحركات والمحولات وغير ذلك من الاجهزة التي تتضمن الظواهر المغناطيسية وتلعب دوراً أساسياً في حياتنا اليومية . وفي هذا الفصل سنتعرف على التعاريف الأساسية لموضوع المغناطيسية ، وندرس توليد المجالات المغناطيسية بواسطة التيارات الكهربائية ، ونأخذ ما هو مهم مما نحتاجه لتمهيد الطريق للأعمال المستقبلية .

8-1 تعريف الحث المغناطيسي*
The definition of magnetic induction

عرف المجال الكهربائي في الفصل الثاني على أنه النسبة بين القوة المؤثرة على شحنة إختبارية وقيمة الشحنة الاختبارية وفقاً للعلاقة :

$$\mathbf{E} = \lim_{q\to 0}\left(\frac{\mathbf{F}}{q}\right). \tag{2-6}$$

وهذا التعريف يدل ضمناً على غياب أية قوة أخرى غير كهربائية وعلى فرض أن الشحنة الاختبارية هي في حالة سكون. ولغرض تعريف الحث المغناطيسي من الملائم أن نعرف أولاً القوة المغناطيسية $\mathbf{F}_m$ (غالباً ماتسمى قوة لورنتز) ، على أنها ذلك الجزء من القوة المؤثرة على شحنة كهربائية متحركة الذي لا يعدُّ جزءاً كهروستاتيكياً أو ميكانيكياً. عند ذلك يمكن تعريف الحث المغناطيسي على أنه المتجه الذي يحقق المعادلة الآتية :

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{8-1}$$

لجميع السرع. ومما يجب ملاحظته هو أن المعادلة (8-1) ينبغي أن تتضمن فكرة أخذ الغاية بطريقة ما ، لكي نضمن أن لا تؤثر الشحنة الاختبارية على مصادر $\mathbf{B}$. ومن المهم أيضاً أن نأخذ بعين الاعتبار حقيقة أن القياس المنفرد غير كافٍ لتعيين قيمة $\mathbf{B}$. إن المعادلة (1-13) توفر القاعدة الأساسية التي يمكن بموجبها أخذ مقلوب العلاقة (8-1) . فاذا ما تم أخذ قياسين للقوة $\mathbf{F}_m$ لسرعتين متعامدتين هما $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ ، لوجدنا أن المعادلة (1-13) تؤول الى الآتي :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{q}\,\frac{\mathbf{F}_1 \times \mathbf{v}_1}{v_1^2} + k_1\mathbf{v}_1, \tag{8-2}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{q}\,\frac{\mathbf{F}_2 \times \mathbf{v}_2}{v_2^2} + k_2\mathbf{v}_2. \tag{8-3}$$

وبضرب كل من هاتين الكميتين ضرباً لا متجهاً بالمتجه $\mathbf{v}_1$ ، متذكرين أن $\mathbf{v}_1$ عمودية على $\mathbf{v}_2$ ، نحصل على :

---

* ويطلق عليه اسم آخر هو شدة المجال المغناطيسي اسوة بنظيره شدة المجال الكهربائي ـ المترجمان

$$k_1 v_1^2 = \frac{1}{q}\frac{\mathbf{F}_2 \times \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{v_2^2}. \quad (8\text{-}4)$$

وباستعمال هذه النتيجة في المعادلة (8-2) ينتج لدينا :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{q}\frac{\mathbf{F}_1 \times \mathbf{v}_1}{v_1^2} + \frac{1}{q}\left(\frac{\mathbf{F}_2 \times \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{v_1^2 v_2^2}\right)\mathbf{v}_1, \quad (8\text{-}5)$$

ومن هذه النتيجة يبدو واضحاً أن إجراء قياسين متميزين يعد كافياً لهذا الغرض .

كما يمكن تشييد تعاريف تامة للحث المغناطيسي باستخدام القوة المؤثرة على عنصر من التيار أو العزم الدوراني المؤثر على دورة كاملة من التيار . ومع ذلك يبدو أن المعادلة (8-1) تفضل على غيرها ، وذلك لأن هذه المعادلة تنسجم مع المعادلة (6-2) التي يتم بموجبها تعريف المجال الكهربائي . وطبقاً للمعادلة (8-1) نجد أن وحدة الحث المغناطيسي هي نيوتن ــ ثانية/ كولوم ــ متر أو نيوتن/ أمبير ــ متر . وقد جرت العادة على إستعمال الوحدة ويبر/ متر مربع كذلك ، حيث أن الويبر يمثل وحدة الفيض المغناطيسي كما سنرى في البند (8-9) .

8-2 القوى المؤثرة على الموصلات الحاملة للتيار
Forces on current-carrying conductors.

والآن يمكننا أن نجد تعبيراً للقوة المؤثرة على عنصر **dl** من موصل حامل للتيار وذلك بالاعتماد على تعريف **B** . فاذا كان المتجه **dl** عنصراً من الموصل بالاتجاه الذي يسري فيه التيار الذي يحمله الموصل ، لأصبح **dl** موازياً للمتجه **v** الذي يمثل سرعة ناقلات الشحنة في الموصل . واذا كان الموصل يحتوي على N من ناقلات الشحنة لوحدة الحجم ، لوجدنا أن القوة المؤثرة على العنصر **dl** تساوي :

$$d\mathbf{F} = NA|d\mathbf{l}|q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (8\text{-}6)$$

إذ أن A تمثل مساحة مقطع الموصل و q شحنة كل من الناقلات . وعندما يحتوي الموصل على أكثر من نوع واحد من ناقلات الشحنة يصبح لزاماً علينا أن ندخل علامة الجمع على المعادلة (8-6) ، لكن ذلك لن يغير النتيجة النهائية المتمثلة في المعادلة (8-8) . ولما كان المتجهان **v** و **dl** متوازيين فإن الصيغة البديلة للمعادلة (8-6) هي :

$$d\mathbf{F} = Nq|\mathbf{v}|A\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B}; \quad (8\text{-}7)$$

لكن الكمية Nq|v|A تمثل التيار الناشيء عن نوع واحد من ناقلات الشحنة ، لذا فإن التعبير

$$d\mathbf{F} = I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{8-8}$$

يمثل القوة المؤثرة على عنصر متناهٍ في الصغر من الموصل الحامل للتيار .

ويمكن إجراء عملية التكامل على المعادلة (8-8) لكي نحصل على القوة المؤثرة على دائرة كهربائية كاملة . واذا عبرنا عن الدائرة الكهربائية المعينة بمسار مغلق C لوجدنا أن :

$$\mathbf{F} = \oint_C I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \tag{8-9}$$

وما دام المتجه B يعتمد على المكان فإن التبسيط الوحيد الممكن عمله للمعادلة (8-9) هو اخراج العامل I خارج علامة التكامل ، وبهذا نحصل على :

$$\mathbf{F} = I\left\{\oint_C d\mathbf{l}\right\} \times \mathbf{B}.$$

وعندئذ يصبح من السهل جداً حساب ناتج التكامل . وما دام مجموع المتجهات المتناهية الصغر التي تشكل دائرة كهربائية كاملة هو المجموع المقصود ، فإن ناتج الجمع يجب أن يساوي صفراً ، لذا :

$$\mathbf{F} = \oint_C I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = 0 \tag{8-10}$$

بشرط أن يكون المجال المغناطيسي منتظماً .

والكمية المهمة الأخرى هي العزم الدوراني المؤثر على دائرة كهربائية كاملة . وبما أن العزم الدوراني هو عزم القوة ، عندئذ يصبح بالإمكان التعبير عن العنصر التفاضلي للعزم الدوراني كما يأتي :

$$d\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = I\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}). \tag{8-11}$$

وأما العزم الدوراني الكلي المؤثر على الدائرة الكهربائية بأجمعها فيساوي :

$$\boldsymbol{\tau} = I \oint_C \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}). \tag{8-12}$$

ومرة أخرى نجد هنا ما لم يكن المجال منتظماً فإنه يتعذر تبسيط هذه المعادلة اكثر مما هو عليه . فإذا فرضنا أن المجال كان منتظماً لأصبح بالإمكان فك الضرب الاتجاهي كالآتي :

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}(dyB_z - dzB_y) + \mathbf{j}(dzB_x - dxB_z) + \mathbf{k}(dxB_y - dyB_x). \quad (8\text{–}13)$$

وعندئذ يصبح من السهل الحصول على مركبات الكمية $\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$ كما يأتي :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})]_x &= y\,dxB_y - y\,dyB_x - z\,dzB_x + z\,dxB_z,\\
[\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})]_y &= z\,dyB_z - z\,dzB_y - x\,dxB_y + x\,dyB_x, \quad (8\text{–}14)\\
[\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})]_z &= x\,dzB_x - x\,dxB_z - y\,dyB_z + y\,dzB_y.
\end{aligned}$$

ومادام $\mathbf{B}$ منتظماً فإنه لا يعتمد على المتجه $\mathbf{r}$ ، وعندئذٍ يمكن إخراج مركبات المجال خارج التكاملات التي تظهر في مفكوك المعادلة (12–8) . إن التكاملات الفضائية spatial التي يجب إنجازها تكون ذات هيئتين عامتين هما :

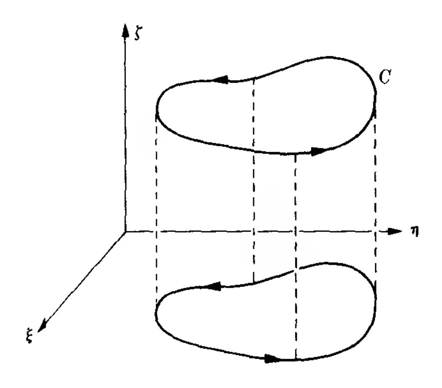
$$\oint \xi\, d\xi \qquad (8\text{–}15a)$$

و

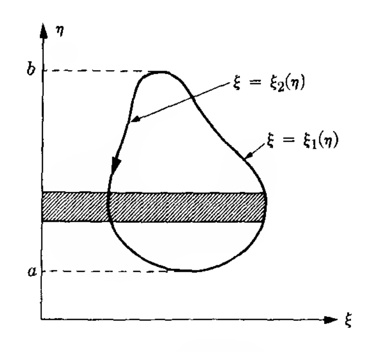
$$\oint \xi\, d\eta, \qquad (8\text{–}15b)$$

إذ أن الرمز ξ يمثل أي إحداثي لاعلى التعيين والرمز η أي احداثي آخر غير الاحداثي ξ . التكامل الأول مألوف لأنه يمثل التكامل من الغاية السفلى ξ_1 الى الغاية العليا ξ_2 للكمية $\xi\, d\xi$ زائداً التكامل من ξ_2 الى ξ_1 للكمية ذاتها . وبما أن استبدال الغاية العليا بالغاية السفلى يؤدي الى ظهور علامة الناقص ، فإن ناتج هذا التكامل سيكون صفراً حتماً . ولهذا السبب يمكن حذف ستة حدود من المعادلات (14–8) . أما التكاملات التي تكون بهيئة المعادلة (15b–8) فإنها تتضمن متغيرين هما ξ و η ، ولهذا لا يوجد إختلاف فيما إذا أُخذ التكامل حول المنحني الحقيقي C ، أو اخذ حول مسقط هذا المنحني على المستوي $\eta - \xi$ كما هو مبين في الشكل (1–8) . وباستخدام المسقط على المستوي $\eta - \xi$ من السهل أن نرى ماذا تمثل المعادلة (15b–8) . وفي الشكل (2–8) يتبين المستوي $\eta - \xi$ مع المساحة $\xi\, d\eta$ المتناهية الصغر . وبوسعنا أن نعبر عن ذلك التكامل بالصيغة :

$$\oint \xi\, d\eta = \int_a^b \xi_1(\eta)\, d\eta + \int_b^a \xi_2(\eta)\, d\eta. \qquad (8\text{–}16)$$



الشكل 1-8
مسقط المنحني **C** على المستوي η - ξ



الشكل 2-8
حساب التكامل $\int \xi \, d\eta$

وهذه النتيجة تعبر بالطبع عن المساحة المحصورة داخل مسقط المنحني وهي كمية موجبة حسب هذا الشكل. واذا كان للاحداثيين ξ و η ترتيب دوري وفق قاعدة اليد اليمنى لمنظومة الاحداثيات، فإنَّ إتجاه الدوران على المنحني المغلق سيحدد اتجاه العمود المقام الذي سيكون بالاتجاه الموجب للاحداثي ζ. وعليه يصبح بالإمكان كتابة المعادلة بالصيغة الآتية :

$$\oint \xi \, d\eta = A_\zeta, \qquad (8\text{–}17)$$

إذ أنَّ الاحداثيات ξ و η و ζ تمثل تبديلات دورية للاحداثيات x و y و z . وباستخدام هذه النتيجة لحساب ناتج التكاملات نحصل على :

$$\tau_x = I\oint_C [\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})]_x = I(A_y B_z - A_z B_y), \qquad (8\text{–}18)$$

وبالمثل يمكننا الحصول على تعابير مماثلة لمركبة العزم الدوراني باتجاه الاحداثي y وأخرى باتجاه الاحداثي z . وهذه الصيغ الثلاث للمركبات يمكن دمجها بتعبير واحد هو :

$$\boldsymbol{\tau} = I\mathbf{A} \times \mathbf{B}, \qquad (8\text{–}19)$$

إذ أن A هو متجه ذو مركبات تمثل المساحات المتكونة من اسقاط المنحني C على السطوح * xy, zx, yz . والكمية IA تدعى العزم المغناطيسي للدائرة الكهربائية ، ويرمز لها بالحرف **m** . لذا

$$\mathbf{m} = I\mathbf{A}, \qquad (8\text{–}20)$$

ومن السهل ان نبين ، باستخدام الأُسلوب المستعمل في أعلاه ، ان تكامل الكمية $\mathbf{r} \times d\mathbf{l}$ حول مسار مغلق يمثل ضعف المساحة التي يكونها المنحني C . لذا :

$$\tfrac{1}{2}\oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} = \mathbf{A}. \qquad (8\text{–}21)$$

وبذلك نحصل على

$$\mathbf{m} = \tfrac{1}{2} I \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} \qquad (8\text{–}22)$$

وهذه العلاقة تمثل تعبيراً آخر للعزم المغناطيسي . والآن نجد أنه من الملائم أن نستفيد من المتطابقة :

$$I\, d\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{J}\, dv \qquad (8\text{–}23)$$

عندما يسري التيار خلال وسط موصل ولا يكون محصوراً في أسلاك كهربائية . وبهذا نحصل على التعبير الرياضي الآتي :

---

* لاحظ انه لم يوضع تحديد لجعل المنحني C في مستوٍ واحدٍ ، وان ذلك التعريف للمتجه **A** لا يتطلب مثل ذلك التقييد .

$$dm = \tfrac{1}{2}r \times J\, dv, \qquad (8\text{–}24)$$

وهو تعبير مفيد لشرح الخواص المغناطيسية للمواد .

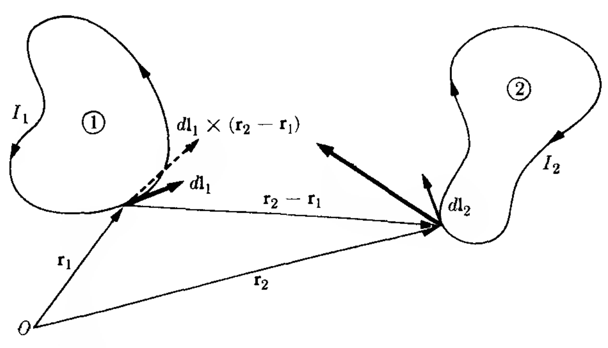
8-3 قانون بايوت وسافارت :The law of Biot and Savart.

في عام 1820 ، وبالضبط بعد أسابيع قليلة من إعلان أورستد اكتشافه بأن التيارات الكهربائية تولد مجالات مغناطيسية ، استطاع أمبير أن يضع نتائج سلسلة من التجارب العملية في معادلات رياضية يمكن صياغتها بدلالة الرياضيات المعاصرة في معادلة عامة واحدة هي :

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \qquad (8\text{–}25)$$

وبالرجوع الى الشكل (3-8) يمكن فهم هذا التعبير الرياضي الذي يبدو معقداً نوعاً ما . القوة $\mathbf{F}_2$ هي القوة التي تؤثر بها الدائرة الكهربائية الأولى على الدائرة الكهربائية الثانية ، والكميات المتجهة التفاضلية (dl's, r's) موضحة في الشكل . أما الكمية الثابتة $\mu_0/4\pi$ التي تظهر في المعادلة (25-8) فإنها تلعب نفس دور الكمية الثابتة $1/4\pi\epsilon_0$ في الكهربائية المستقرة أي أنها الكمية الثابتة التي تجعل القانون العملي منسجماً مع وحدات القياس المستعملة ، وقيمتها حسب النظام المتري هي بالضبط :

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\ \text{n/amp}^2$$



الشكل (3-8): التأثير المغناطيسي المتبادل بين دائرتين كهربائيتين

وتعد المعادلة (8-25) بمثابة تعريف أولي للأمبير . كما يبدو ظاهرياً على أن هذه المعادلة تناقض قانون نيوتن الثالث بسبب فقدان التناظر في هذه الحالة . ولكنه باستخدام بعض النظريات المتعلقة بتحليل المتجهات يمكن ان نبين بأنها متناظرة في واقع الحال ، أي أن :

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1.$$

ويبدو واضحاً من المعادلة (8-9) أن العلاقة (8-25) تدل ضمناً على أن :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_1 \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \tag{8-26}$$

وما هذه العلاقة سوى تعميم لقانون بايوت وسافارت . كما يطلق هذا الاسم كذلك على الصيغة التفاضلية لهذه العلاقة وهي :

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1\, d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \tag{8-27}$$

(ومن المفيد أن نشير اشارة عابرة الى الملابسات التي نشأت حول نسب القوانين المختلفة . ولا نرغب في الخوض في تفاصيل تلك الملابسات ، إنما نشير الى القاريء المهتم بالرجوع الى كتاب تاريخي ممتاز من تأليف ويتاكر*) . والنقطة الأخيرة التى نود أن ننوه عنها هي أنه في حالة التوزيع المتصل للتيار الذي يمكن وصفه بدلالة الكثافة $\mathbf{J}$ (r) يمكن التعبير عن العلاقتين (8-26) و (8-27) بالصيغتين الآتيتين :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}\, dv_1 \tag{8-28}$$

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}\, dv_1 \tag{8-29}$$

وتشير الاستنتاجات التجريبية الى امكانية وصف جميع مجالات الحث المغناطيسية بدلالة توزيع التيار الكهربائي . وهذا يعني أن B دائماً تأخذ هيئة المعادلة (8-28) مع الأخذ بنظر الاعتبار توزيع التيار المتمثل بقيمة$\mathbf{J}$ $(\mathbf{r}_1)$. وهذا يدل ضمناً على أنه لا توجد أقطاب مغناطيسية معزولة ، وأن :

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \tag{8-30}$$

* E. T. Whittaker, *History of the Theories of Aether and Electricity*, Vol. I, Philosophical Library, New York, 1951.

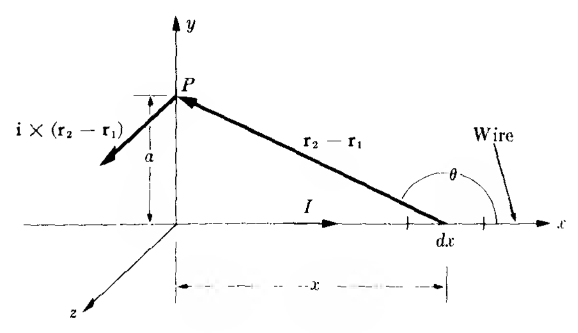
وهذه المعادلة تصح لأي B سواء كانت بهيئة المعادلة (26-8) أم بهيئة المعادلة (28-8) ، إذ أنه بالإمكان تحقيق ذلك رياضياً . وعلى أية حال لتحقيق الهدف المنشود من هذا الكتاب يكفي أن نفكر بأن المعادلة (30-8) هي قانون تجريبي . ومع ذلك فقد أعطي الاشتقاق الرياضي في الملحق III .

8-4 تطبيقات اولية لقانون بايوت وسافارت
Elementary applications of the Biot and Savart law.

إن مدى المسائل التي يمكن معالجتها باستخدام المعادلة (28-8) أو المعادلة (26-8) يحدد مبدئياً بالصعوبات الناجمة عن حساب التكاملات . وسنتعرف في هذا البند على حل بعض المسائل بهذه الطريقة . وفي بنود لاحقة سنستخدم طرقاً أخرى لتعيين الحث المغناطيسي B .

والمثال الأول الذي سنعالجه الآن هو تعيين المجال المغناطيسي الناشيء عن مرور التيار في سلك مستقيم طويل . لنتصور أن السلك يحمل تياراً قدره I وقد امتد على طول الاحداثي x من مالانهاية سالبة الى مالانهاية موجبة . سنحسب المجال عند نقطة واقعة على الاحداثي y ومحددة بالمتجه $\mathbf{r}_2$. والشكل (4-8) يوضح الوضع الهندسي لهذه المسألة بأفضل صورة .
في هذه الحالة نجد ان الحث المغناطيسي يساوي

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx\, \mathbf{i} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \tag{8-31}$$



الشكل 8-4 المجال المغناطيسي الناشيء عن سلك مستقيم طويل عند نقطة P .

طالما يقع المتجه $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ في المستوي xy فإنَّ :

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \sin\theta\, \mathbf{k}. \qquad (8\text{–}32)$$

كما أنَّ :

$$\frac{a}{x} = \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta \qquad (8\text{–}33)$$

و

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = a \csc(\pi - \theta) = a \csc\theta. \qquad (8\text{–}34)$$

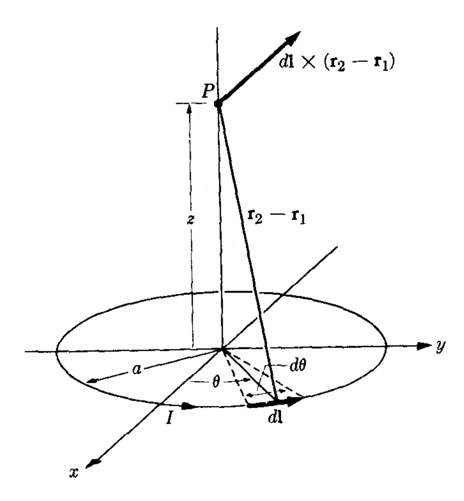
وباستخدام هذه العلاقات يمكننا كتابة المعادلة (31-8) بدلالة المتغير θ فقط وجعل حدود التكامل للزاوية θ من 0 الى π ، وبهذا نحصل على :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I\mathbf{k} \frac{1}{a} \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{k}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \mathbf{k}. \quad (8\text{–}35)$$

ولكي يتسنى لنا استخدام هذه النتيجة على نطاق واسع ، من الضروري أن نلاحظ أن المسألة تتضمن تماثلاً واضحاً حول محور x . وبهذا نستنتج أن خطوط المجال المغناطيسي تكون في كل مكان على شكل دوائر مراكزها تقع على السلك الحامل للتيار . وهذه النتيجة تتفق كلياً مع ماهو معروف في الدراسة الأولية من أن إتجاه المجال المغناطيسي B يخضع لقاعدة اليد اليمنى .

والمثال الثاني البسيط سيتضمن دراسة المجال الناشيء عن مرور التيار في سلك على شكل لفة دائرية . وعلى الرغم من صعوبة حساب المجال المغناطيسي المتكون في هذه الحالة عند أية نقطة كيفية ، إلا أن الأمر سيكون سهلاً نوعاً ما إذا اخترنا نقاط (لغرض تعيين المجال المغناطيسي) واقعة على محور التماثل فقط . وفي هذا المثال سنعتمد كلياً على المتجهات لتوضيح هذا الأسلوب . الشكل (5-8) يوضح الوضع الهندسي لهذه المسألة والاحداثيات المستخدمة . إن اللفة الدائرية تقع في المستوي xy ، والنقطة المطلوب حساب المجال المغناطيسي عندها واقعة على الاحداثي z ومحددة بالمتجه $\mathbf{r}_2$. لحساب المجال المغناطيسي باستخدام العلاقة (26-8) علينا أن نستفيد من الشكل (5-8) لايجاد الكميات التالية :

$$\begin{aligned} d\mathbf{l} &= a\, d\theta(-\mathbf{i} \sin\theta + \mathbf{j} \cos\theta), \\ \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 &= -\mathbf{i}a \cos\theta - \mathbf{j}a \sin\theta + \mathbf{k}z, \qquad (8\text{–}36) \\ |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| &= (a^2 + z^2)^{1/2}. \end{aligned}$$



الشكل 5-8 المجال المغناطيسي المحوري لسلك يصنع لفة دائرية

وعند التعويض عن هذه القيم في المعادلة (26-8) نحصل على :

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\mathbf{i}za\cos\theta + \mathbf{j}za\sin\theta + \mathbf{k}a^2)}{(z^2+a^2)^{3/2}}\, d\theta. \qquad (8\text{-}37)$$

لكنّ تكامل الحدين الأولين يؤول الى الصفر ، لذا ينتج :

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2+a^2)^{3/2}}\,\mathbf{k}, \qquad (8\text{-}38)$$

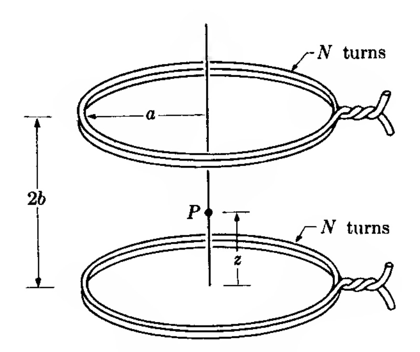
وهذا يعني بطبيعة الحال أن الحث المغناطيسي يقع كلياً على إمتداد الإحداثي z .

في العديد من الأغراض العملية غالباً مايستخدم ملفان موضوعان بهيئة معينة يطلق عليها اسم ملف هيلمولتز Helmholtz coil . هذا الملف يتكون أساساً من ملفين دائريين متماثلين لهما نصف قطر متساوٍ ومحور مشترك وتفصلها مسافة يتم اختيارها بحيث تتلاشى المشتقة لشدة المجال المغناطيسي B عند نقطة واقعة على المحور المشترك في منتصف المسافة بين الملفين . إن قيمة الحث المغناطيسي الناشيء عن مرور تيار قدره I في الملفين عند نقطة P يساوي :

$$B_z(z) = \frac{N\mu_0 I a^2}{2}\left\{\frac{1}{(z^2+a^2)^{3/2}} + \frac{1}{[(2b-z)^2+a^2]^{3/2}}\right\}, \qquad (8\text{-}39)$$

لقد حصلنا على هذه العلاقة بتطبيق المعادلة (38-8) على كل من الملفين . العامل N يرمز لعدد لفات كل ملف . ويأخذ مشتقة B_z بالنسبة لـ z ينتج :

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{\mu_0 N I a^2}{2}\left\{-\frac{3}{2}\frac{2z}{(z^2+a^2)^{5/2}} - \frac{3}{2}\frac{2(z-2b)}{[(2b-z)^2+a^2]^{5/2}}\right\}. \quad (8\text{–}40)$$



الشكل 6-8 المجال المغناطيسي المحوري لملف هيلمولتز

وعندما تكون z = b تتلاشى هذه المشتقة وتصبح صفراً . أما المشتقة الثانية بالنسبة لـ z فتؤول الى الآتي :

$$\frac{d^2B_z}{dz^2} = -\frac{3\mu_0 N I a^2}{2}\left\{\frac{1}{(z^2+a^2)^{5/2}} - \frac{5}{2}\frac{2z^2}{(z^2+a^2)^{7/2}} + \frac{1}{[(2b-z)^2+a^2]^{5/2}} - \frac{5}{2}\frac{2(z-2b)^2}{[(2b-z)^2+a^2]^{7/2}}\right\}.$$

وعند القيمة z= b تؤول المشتقة الثانية الى الآتي :

$$\left.\frac{d^2B_z}{dz^2}\right|_{z=b} = -\frac{3\mu_0 N I a^2}{2}\left\{\frac{b^2+a^2-5b^2+b^2+a^2-5b^2}{(b^2+a^2)^{7/2}}\right\}, \quad (8\text{–}41)$$

وطبيعي أن تتلاشى هذه الكمية عندما تكون :

$$a^2 - 4b^2 = 0.$$

وعليه فإنَّ الاختيار الملائم لقيمة b يتمثل في العلاقة :

$$2b = a, \tag{8-42}$$

وهذا يعني ان المسافة الفاصلة بين الملفين يجب أن تساوي نصف القطر . وعند ذلك يمكننا إيجاد الحث المغناطيسي في منتصف المسافة بين الملفين عندما يكونان على بعد مساوٍ لنصف القطر فنحصل على :

$$B_z = \frac{\mu_0 NI}{a} \frac{8}{5^{3/2}}. \tag{8-43}$$

ملفات هيلمولتز تلعب دوراً مهماً في البحث العلمي حيث تستخدم كوسيلة لتوليد مجال مغناطيسي منتظم في منطقة صغيرة من الفضاء المحيط بمنتصف المسافة الفاصلة بين الملفين . دعنا نأخذ المجال المغناطيسي عند نقطة واقعة على المحور وبالقرب من منتصف المسافة بين الملفين . بالامكان إيجاد $B_z(z)$ باستخدام مسلسلة تايلور حول النقطة $z = \frac{1}{2}a$ فنحصل على :

$$B_z(z) = B_z(\tfrac{1}{2}a) + (z - \tfrac{1}{2}a) \left.\frac{\partial B_z}{\partial z}\right|_{z=\frac{1}{2}a} + \cdots$$

وبما أن المشتقات الثلاث الاولى تتلاشى ينتج لدينا :

$$B_z(z) = B_z(\tfrac{1}{2}a) + \frac{1}{24}(z - \tfrac{1}{2}a)^4 \left.\frac{\partial^4 B_z}{\partial z^4}\right|_{z=\frac{1}{2}a} + \cdots$$

واذا حسبنا المشتقة الرابعة لامكننا كتابة الدالة $B_z(z)$ كالآتي :

$$B_z(z) = B_z(a/2)\left\{1 - \frac{144}{125}\left(\frac{z - a/2}{a}\right)^4\right\}. \tag{8-44}$$

وهكذا نجد أنه في المنطقة التي تكون فيها الكمية $|z - a/2|$ أقل من $a/10$ ، تنحرف قيمة $B_z(z)$ عن $B_z(a/2)$ بأقل من جزء ونصف الجزء من عشرة آلاف من الاجزاء .

ان وحدة "الويبر لكل متر مربع" تعد وحدة كبيرة لقياس المجالات المغناطيسية المختبرية . ولهذا السبب بقيت وحدة "الكاوس" (المستمدة من نظام وحدات* أكثر قدماً) مستعملة لقياس B . الكاوس الواحد يعادل 10^{-4} من

*هناك أنظمة أخرى للوحدات مشروحة في الملحق .

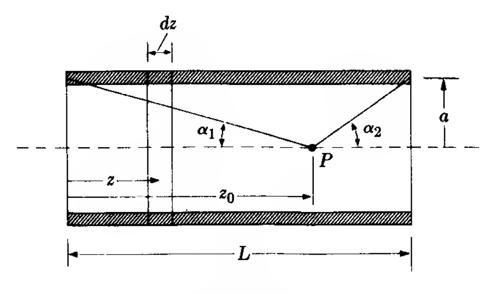
الويبر لكل متر مربع . وكمرجع لحساب الحث المغناطيسي لملف هيلموتز عند نقطة المنتصف نعطي العلاقة الآتية :

$$B_z = \frac{32\pi N}{5^{3/2}a}\frac{I}{10}, \tag{8-43a}$$

على ان يقاس التيار بالامبيرات ونصف القطر بالسنتمترات والحث المغناطيسي بالكاوس . وطبيعي ان تبقى N معبرة عن عدد لفات كل من الملفين في هذه العلاقة .

هناك أداة أخرى يمكن تطبيق المعادلة (38ـ 8) عليها، ألا وهي الملف الحلزوني. ويمكننا أن نصف الملف الحلزوني على أنه مكون من N من اللفات المنتظمة ملفوفة على هيكل اسطواني نصف قطره a وطوله L كما هو موضح في الشكل (7-8) . ويمكن إيجاد الحث المغناطيسي عند النقطة z_0 بتقسيم الطول L الى عناصر متناهية في الصغر طول كل منها dz كما هو موضح في الشكل ، وبتطبيق المعادلة (38-8) على كل عنصر من هذه العناصر ، ومن ثم جمع النتائج بطريقة التكامل . وهنا ينبغي ملاحظة أن العنصر dz يحتوي على عدد من اللفات قدره N dz/ L . ولهذا ينتج لدينا الآتي :

$$B_z(z_0) = \frac{\mu_0 NI}{L}\frac{a^2}{2}\int_0^L \frac{dz}{[(z_0 - z)^2 + a^2]^{3/2}}. \tag{8-45}$$



الشكل 7-8 المجال المغناطيسي المحوري لملف حلزوني .

وبابدال المتغير z حسب العلاقة : $z - z_0 = a\tan\theta,$ نحصل على الآتي :

$$B_z(z_0) = \frac{\mu_0 NI}{2L}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 NI}{L}\left[\frac{\sin\theta_2 - \sin\theta_1}{2}\right], \quad (8\text{–}46)$$

اذ ان :

$$\theta_1 = -\tan^{-1}(z_0/a) \qquad \theta_2 = \tan^{-1}(L - z_0)/a.$$

وحقيقة بقاء جيب الزاويتين في العلاقة (46–8) وعدم الاستعاضة عن كل منهما بواحد صحيح كما هو الحال في العلاقة المقربة المألوفة الآتية للملف الحلزوني :

$$B_z = \mu_0 NI/L,$$

انما يعبر عما يسمى بتصحيح النهايتين للملف (end correction) .

ولكي تتضح فكرة هذا التقريب علينا أن ندخل الزاويتين α_1 و α_2 كما هو مبين في الشكل (7–8) ونعدهما موجبتين . ثم نكتب المعادلة (46–8) بدلالة هاتين الزاويتين فنحصل على الآتي :

$$B_z(z_0) = \frac{\mu_0 NI}{L}\left[\frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{2}\right]. \quad (8\text{–}47)$$

فاذا كان الملف الحلزوني طويلاً مقارنة مع نصف قطره ، وكان البعد z_0 ليس قريباً من الصفر ولا قريباً من الطول L ، لأصبحت كل من الزاويتين α_1 و α_2 صغيرة جداً ، ولأمكن تقريبهما الى الآتي :

$$\alpha_1 \cong \frac{a}{z_0}; \qquad \alpha_2 \cong \frac{a}{L - z_0}. \quad (8\text{–}48)$$

وعند إبقاء الحدود التربيعية فقط في مفكوك كل من $\cos\alpha_1$ و $\cos\alpha_2$ نحصل على :

$$B_z(z_0) \cong \frac{\mu_0 NI}{L}\left\{1 - \frac{a^2}{4z_0^2} - \frac{a^2}{4(L - z_0)^2}\right\}. \quad (8\text{–}49)$$

ومن هذه العلاقة نستنتج أنه اذا كانت $z_0 = L/2$ و $L/a = 10$ لنتج خطأ قدره 2% في حالة إهمال الحدود التربيعية .

8-5 قانون أمبير للدائرة الكهربائية Ampere's circuital law

بالامكان إشتقاق معادلة مهمة جداً لالتفاف B في حالة المجالات المغناطيسية المعطاة بموجب المعادلة (26-8) أو المعادلة (28-8) ، تلك المجالات التي تنشأ عن التيارات الثابتة ، أي التيارات التي تخضع للعلاقة .

$$\text{div}\,\mathbf{J} = 0, \tag{8-50}$$

ويمكن تنفيذ* ذلك بكل بساطة بحساب التفاف المعادلة (28-8) . وعملية الالتفاف هذه تتضمن أخذ التفاضل بالنسبة للمتجه $\mathbf{r}_2$ ، ولهذا ينحصر تأثير هذه العملية على العامل

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/\ |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3$$

وواضح أن اخذ التفاضل بالنسبة الى $\mathbf{r}_2$ ، يمكن استبداله بأخذ التفاضل نسبة للمتجه $\mathbf{r}_1$ على أن توضع إشارة ناقص ، وسبب ذلك هو التماثل الموجود بين المتجهين $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$. وحال إجراء هذا التغيير في أخذ المشتقة يصبح بوسعنا إستخدام طريقة التكامل بالتجزئة لنقل المشتقة الى العامل $\mathbf{J}\ (\mathbf{r}_1)$ في حد واحد حيث تظهر على شكل $\text{div}\,\mathbf{J}\ (\mathbf{r}_1)$ ، وبهذا تتلاشى قيمة تكامل الحد الاول . أما تكامل الحد الثاني فيؤول الى الآتي :

$$\text{curl}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \mu_0\mathbf{J}(\mathbf{r}_2), \tag{8-51}$$

وسنطلق إسم الصيغة التفاضلية لقانون أمبير على هذه المعادلة . وفي الفصل العاشر سنجري تحويراً على هذه المعادلة ، ومع ذلك ستبقى المعادلة (51-8) صالحة طالما بقيت $\text{div}\ \mathbf{J} = 0$ بشرط ان لاتوجد مواد مغناطيسية .

والآن يمكننا استخدام نظرية ستوكس لتحويل المعادلة (51-8) الى صيغة تكاملية تكون ذات فائدة كبيرة في بعض الاحيان . وعند تطبيق قانون ستوكس على هذه الحالة فإنه يأخذ الصيغة الآتية :

$$\int_S \text{curl}\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da = \oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}. \tag{1-45}$$

وبالتعويض عن $\text{curl}\,\mathbf{B}$ من المعادلة (51-8) ينتج :

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\,da, \tag{8-52}$$

وبكل بساطة فإن هذه المعادلة تعني أن التكامل الخطي لشدة المجال المغناطيسي حول مسارٍ مغلق يساوي μ_0 مضروبة في التيار الكلي المار خلال هذا المسار .

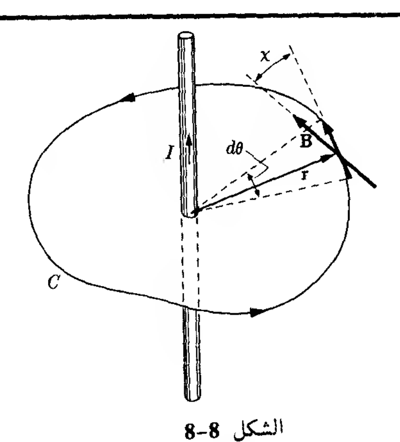
* الخطوط التفضيلية لهذا الاشتقاق معطاة في الملحق III

وقد يكون مفيداً أن نحقق المعادلة (52-8) لإحدى الحالات البسيطة . وأحسن تلك الحالات تتمثل في السلك المستقيم الطويل ، حيث يعطى الحث المغناطيسي الناشيء عن مرور التيار في السلك عند نقطة تبعد r عنه بموجب المعادلة :

$$B(r) = \mu_0 I/2\pi r$$

ويكون اتجاه الحث المغناطيسي مماساً لدائرة نصف قطرها r ذات مركز منطبق على محور السلك . والشكل (8-8) يوضح الترتيب الهندسي لهذا المثال حيث يكون سريان التيار في السلك نحو الاعلى . ويؤخذ إتجاه للمسار معاكس لعقرب الساعة . ومن هذا الشكل يتبين أن :

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = |\mathbf{B}|\, |d\mathbf{l}| \cos \chi = |\mathbf{B}| r\, d\theta. \tag{8-53}$$



الشكل 8-8

تحقيق قانون أمبير في حالة السلك المستقيم الطويل .

وعند أخذ القيمة المعطاة في أعلاه لـ |B| نحصل على :

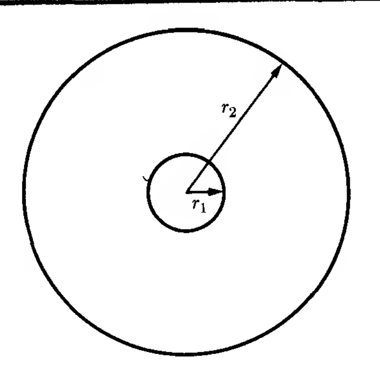
$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r\, d\theta = \mu_0 I, \tag{8-54}$$

وهذه المعادلة تمثل حالة خاصة للعلاقة (52-8) .

إن قانون أمبير المتمثل بالمعادلة (52-8) يعد مشابهاً لقانون كاوس في الكهربائية المستقرة في كثير من الاعتبارات . ونعني بذلك أنه بوسعنا أن نستخدمه

لايجاد المجال المغناطيسي الناشيء عن توزيع تياري معين ذي تماثل عالٍ بدلاً من الخوض في حساب التكاملات المعقدة التي تنتج من جراء تطبيق قانون بايوت. وكمثال على ذلك خذ موصلاً محورياً اسطوانياً متكوناً من سلك نصف قطره r_1 محاط باسطوانة موصلة نصف قطرها r_2 ذات محور مشترك مع السلك كما هو موضح في الشكل (9-8) . افرض ان هذين الموصلين يحملان تيارين متساويين في القيمة (I) وباتجاهين متعاكسين بحيث يكون إتجاه سريان التيار في السلك الداخلي خارجاً من الورقة . ومن طبيعة التماثل الموجود في هذه الحالة يتبين أن الحث المغناطيسي يجب أن يكون مماساً للدائرة التي مركزها ينطبق على السلك والتي تمر بالنقطة التي يراد دراسة المجال المغناطيسي المتكون عندها . وفضلاً على ذلك نجد أن الحث المغناطيسي لا يمكن ان يعتمد على الزاوية السمتية . والمسارات المغلقة الملائمة لتطبيق قانون أمبير على هذه الحالة هي دوائر مراكزها منطبقة على السلك . واذا اخذنا إحدى هذه الدوائر التي يبلغ نصف قطرها r لحصلنا على :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B, \tag{8-55}$$



الشكل 9-8 مقطع عرضي لسلك محوري

وهذه النتيجة يجب أن تساوي μ_0 مضروبة في التيار الكلي ضمن المسار المغلق . لذا :

$$\begin{aligned} 2\pi r B &= \mu_0 I, \qquad r_1 < r < r_2, \\ 2\pi r B &= 0, \qquad r_2 < r. \end{aligned} \tag{8-56}$$

كما يمكننا الحصول على النتيجة ذاتها بحساب التكامل الناتج عن تطبيق قانون بايوت بشيء من الصعوبة .

8-6 الجهد المغناطيسي المتجه The magnetic vector potential.

تمكنا من تبسيط حساب المجالات الكهربائية الى درجة كبيرة عندما أدخلنا مفهوم الجهد الكهروستاتيكي . وقد نتج ذلك التبسيط عن حقيقة تلاشي التفاف المجال الكهربائي. بيد أن التفاف الحث المغناطيسي لا يتلاشى ، إنما تباعد الحث المغناطيسي هو الذي يتلاشى . ولما كان تباعد أي التفاف يساوي صفراً ، فإنه من الملائم جداً أن نعبر عن الحث المغناطيسي بدلالة المتجه **A** كالآتي :

$$\mathbf{B} = \mathbf{curl\,A}. \qquad (8\text{-}57)$$

وهناك شرط آخر يجب أن يتوفر في هذا المتجه الجديد وهو :

$$\mathbf{curl\,B} = \mathbf{curl\,curl\,A} = \mu_0\mathbf{J}. \qquad (8\text{-}58)$$

وباستخدام المتطابقة :

$$\mathbf{curl\,curl\,A} = \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A} \qquad (8\text{-}59)$$

وجعل $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0$ ينتج :

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J}. \qquad (8\text{-}60)$$

وبتكامل كل من المركبات المتعامدة ، وبالاستعانة بحل معادلة بويزون كدليل نحصل على :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\,dv_1. \qquad (8\text{-}61)$$

والواقع إن حساب التكاملات التي تتضمنها هذه المعادلة أسهل بكثير من التكاملات التي يتضمنها قانون بايوت . ومع ذلك فإنها اكثر تعقيداً من تلك المعادلات المستعملة لحساب الجهد الكهروستاتيكي .

هناك طريقة أخرى للحصول على المعادلة (8-61) وذلك بتحويل المعادلة (8-28) الى صيغة مشابهة للمعادلة (8-57) . ولإنجاز ذلك نلاحظ أن :

$$\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = -\,\mathbf{grad}_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}, \tag{8-62}$$

إذ تشير الكمية $\mathbf{grad}_2$ الا ان التفاضل قد أخذ نسبة الى $\mathbf{r}_2$. والمتطابقة الاتجاهية

$$\mathbf{curl}\,(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\,\mathbf{curl}\,\mathbf{A} - \mathbf{A} \times \mathbf{grad}\,\varphi, \tag{8-63}$$

تصدق لكل متجه مثل $\mathbf{A}$ ولكل لا متجه مثل ϕ ، ومنها ينتج :

$$\mathbf{curl}_2 \left\{\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)\right\} = -\,\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times \mathbf{grad}_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}, \tag{8-64}$$

وذلك لأن $J(\mathbf{r}_1)$ لا تعتمد على المتجه $\mathbf{r}_2$. وبادخال هذه النتائج في المعادلة (28–8) نحصل على :

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}\,dv_1 \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times \mathbf{grad}_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\,dv_1 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathbf{curl}_2 \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\,dv_1.\end{aligned} \tag{8-65}$$

وبالإمكان إخراج الإلتفاف خارج علامة التكامل ، عندئذ تصبح المعادلة (65–8) بصيغة مشابهة تماماً للمعادلة (57–8) ، وبهذا نجد أن العلاقة :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_1} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\,dv_1 \tag{8-61}$$

يمكن أن تنتج من هذه الطريقة أيضاً :

ولكي لا نترك إنطباعاً خاطئاً (ونعني بذلك أن قيمة الجهد المغناطيسي له القدر نفسه من الفائدة المتوخات من الجهد الكهروستاتيكي لحساب المجالات البسيطة) ، يجب علينا أن نلاحظ أنه أساساً لا توجد حالات يمكن فيها وضع المتجه A بصيغة مغلقة بسيطة . فالسلك المستقيم الطويل يعطي ناتجاً لا نهائياً لهذا المتجه عند إستخدام المعادلة (61–8) . والملف الدائري يتضمن تكاملاً ناقصياً elliplic integral ، وهلم جرّا . كما ينبغي ملاحظة أن حساب الجهد المتجه عند نقطة منفردة لا يفيد شيئاً ، وذلك لأنه بالإمكان الحصول على الحث المغناطيسي بحسبان التفاضل . إن الأستخدام الرئيس للجهد المتجه يتمثل في التقريبات التي

سنناقشها في البند الآتي ، وفي المسائل التي تتضمن الاشعاع الكهرومغناطيسي (أنظر الى الفصول 15 و 16 و 17) .

8-7 المجال المغناطيسي لدائرة بعيدة :
The magnetic field of a distant circuit

يعد حساب الجهد المغناطيسي المتجه الناشيء عن دائرة كهربائية صغيرة عند نقطة بعيدة أمراً سهلاً نسبياً . ويمكن تطبيق المعادلة (8-61) المعبرة عن الجهد المتجه على الدوائر الكهربائية الحاملة للتيار . وباجراء التعويض الآتي :

$$\mathbf{J}\, dv \rightarrow I\, d\mathbf{r}.$$

ينتج :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}. \tag{8-66}$$

وبالنسبة للدوائر الكهربائية التي تكون أبعادها صغيرة بالمقارنة مع $\mathbf{r}_2$ يمكننا إجراء التقريب الآتي للمقام :

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^{-1} = (r_2^2 + r_1^2 - 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^{-1/2} \tag{8-67}$$

ثم نجد المفكوك لقوى $r_1/\ r_2$ فنحصل على الآتي :

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^{-1} = \frac{1}{r_2}\left[1 + \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_2^2} + \cdots\right] \tag{8-68}$$

وباستخدام هذه النتيجة في المعادلة (8-66) ينتج :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left\{\frac{1}{r_2}\oint d\mathbf{r}_1 + \frac{1}{r_2^3}\oint d\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) + \cdots\right\}. \tag{8-69}$$

وهنا نجد ان التكامل الأول يتلاشى ، في حين الكمية المراد تكاملها في الحد الثاني تمثل حداً من مفكوك :

$$(\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1) + d\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2). \tag{8-70}$$

ولحذف الحد الأول من الطرف الأيمن لهذه المعادلة ، نكتب مشتقة $\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1)$ لتغير صغير في $\mathbf{r}_1$ بالشكل الآتي :

$$d[\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1)] = \mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1) + d\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1), \qquad (8\text{–}71)$$

وبجمع المعادلتين (70–8) و (71–8) ومن ثم تقسيم الناتج على اثنين ينتج :

$$d\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}_2 + \tfrac{1}{2}\, d[\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1)]. \qquad (8\text{–}72)$$

وبما ان الحد الاخير في هذه العلاقة يمثل مشتقة تفاضلية تامة ، فإنه لن يساهم في شيء في ناتج تكامل الحد الثاني في المعادلة (69–8) . لذا ينتج :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{I}{2}\oint \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1\right] \times \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}. \qquad (8\text{–}73)$$

لكن الكمية المحصورة بين قوسين مربعين تمثل ، وفقاً للعلاقة (22–8) ، مايعرف باسم العزم المغناطيسي $\mathbf{m}$ للدائرة الكهربائية ، لذا :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}_2}{r_2^3}. \qquad (8\text{–}74)$$

ومما يجدر بالملاحظة هو أنه قد افترض في هذا الاشتقاق أن $r_1 \ll r_2$ في جميع الاحوال . لهذا السبب لا تصح المعادلة (74–8) لأية نقطة أصل ، إنما تصح فقط في الحالات التي تكون فيها نقطة الأصل قريبة من الدائرة الكهربائية .

والآن يصبح بالامكان تعيين الحث المغناطيسي بأخذ إلتفاف المعادلة (74–8) ، وبالاستفادة من المتطابقات الاتجاهية . لذا :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \mathbf{curl}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\mathbf{curl}\left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-(\mathbf{m} \cdot \mathbf{grad})\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} + \mathbf{m}\,\mathrm{div}\,\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}\right]. \qquad (8\text{–}75)$$

وبملاحظة العلاقة :

$$m_x \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}\right) = \frac{m_x \mathbf{i}}{r_2^3} - 3m_x x_2 \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^5}\,; \qquad (8\text{–}76)$$

يمكننا تحويل الكمية المحصورة بين قوسين في الحد الأول من العلاقة في أعلاه . لذا :

$$(\mathbf{m} \cdot \mathbf{grad}) \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} = \frac{\mathbf{m}}{r_2^3} - \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2)\mathbf{r}_2}{r_2^5}. \tag{8-77}$$

وكل مايشمل الحد الثاني هو حساب الكمية :

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} = \frac{3}{r_2^3} - \mathbf{r}_2 \cdot \frac{3\mathbf{r}_2}{r_2^5} = 0. \tag{8-78}$$

وأخيراً نحصل على

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{\mathbf{m}}{r_2^3} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2)\mathbf{r}_2}{r_2^5}\right] \tag{8-79}$$

وهذه المعادلة تدل على أن المجال المغناطيسي لدائرة كهربائية بعيدة لا يعتمد على الشكل الهندسي للدائرة الكهربائية ، انما يعتمد على عزمها المغناطيسي m فقط . وبمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (2-36) يتبين أن المعادلة (8-79) لها نفس هيئة المجال الكهربائي لثنائي قطب كهربائي ، مما يفسر أصل التسمية مجال ثنائي القطب المغناطيسي . الرمز **m** يدعى عزم ثنائي القطب المغناطيسي للدائرة الكهربائية .

8-8 الجهد المغناطيسي اللامتجه **The magnetic scalar potential.**

تدل المعادلة (8-51) على أن إلتفاف الحث المغناطيسي يساوي صفراً حيثما تكون كثافة التيار صفراً . عند ذلك يمكننا التعبير عن الحث المغناطيسي في مناطق من هذا النوع كانحدار لجهد لا متجه .

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \,\mathbf{grad}\, U^*. \tag{8-80}$$

لكن تباعد B هو ايضاً صفر ، وهذا يعني أن :

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla^2 U^* = 0. \tag{8-81}$$

وبهذا نجد ان الكمية U^* ، التي تدعى الجهد المغناطيسي اللامتجه ، تحقق معادلة لابلاس .

يعد التعبير الرياضي للجهد اللامتجه لثنائي القطب المغناطيسي مفيداً جداً . فمن الملاحظ أنه يمكن كتابة المعادلة (8-79) بالشكل الآتي :

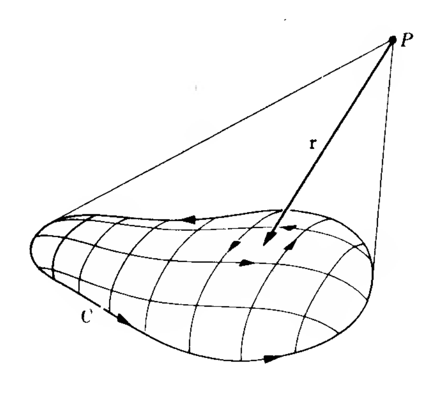
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = -\mu_0 \, \mathbf{grad} \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2}{4\pi r_2^3} \right), \tag{8-82}$$

ومن الواضح عندئذ أن الجهد اللامتجه لثنائي القطب المغناطيسي يأخذ الصيغة الآتية

$$U^*(\mathbf{r}_2) = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2}{4\pi r_2^3} \tag{8-83}$$

بالامكان تجزئة الدائرة الكهربائية الكبيرة C الى دوائر صغيرة تشبه عيون الشبكة كما هو موضح في الشكل (10-8) . وإذا فرضنا أن كل دائرة صغيرة تحمل التيار نفسه الذي تحمله الدائرة الكهربائية الأصلية C ، لبقي التأثير الناتج عن هذا الافتراض هو التأثير نفسه كما لو كان التيار يسري فقط في الدائرة الكهربائية الأصلية . والسبب في ذلك يعود الى أن التيار الذي يسري في أي فرع من الفروع الداخلية يتعادل ويصبح صفراً . والآن يمكننا كتابة العزم المغناطيسي لكل دائرة صغيرة من التيار كالآتي :

$$d\mathbf{m} = I\mathbf{n} \, da, \tag{8-84}$$



الشكل 10-8

دائرة كهربائية عينية مشيدة من ثنائيات أقطاب مغناطيسية أولية

إذ تعد كل دائرة كهربائية وكانها واقعة في مستوٍ واحدٍ نظراً لصغرها . وبادخال هذا التعبير في المعادلة (83-8) ومن ثم اجراء التكامل ليشمل السطح المحاط بالمنحني C ينتج :

$$U^*(P) = \frac{I}{4\pi}\int_S \frac{\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{n}\, da}{r_2^3}. \tag{8-85}$$

وفي هذه المعادلة يجب أن تفسر $\mathbf{r}_2$ على أنها متجه يمتد من da الى النقطة P ، أي $-\mathbf{r}$ ، كما هو موضح في الشكل (10-8) . وبالتعويض عن :

$$\mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}$$

ينتج :

$$U^*(P) = -\frac{I}{4\pi}\int_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, da}{r^3}. \tag{8-86}$$

والكمية $\mathbf{r}.\ \mathbf{n}\ da$ تساوي تماماً ناتج ضرب r في مسقط المساحة da على مستوٍ عمودي على المتجه $\mathbf{r}$. وبهذا تصبح الكمية $\mathbf{r}.\ \mathbf{n}\ da/\ r^3$ مساوية للزاوية المجسمة التي تشكلها المساحة da عند نقطة P . عندئذ يمكننا كتابة المعادلة (86-8) بالشكل الآتي :

$$U^*(P) = -\frac{I\Omega}{4\pi}, \tag{8-87}$$

إذ ان Ω تمثل الزاوية المجسمة التي يكونها المنحني C عند نقطة P .

وبالإمكان استخدام الجهد المغناطيسي اللامتجه لحساب المجال المغناطيسي الناشيء عن دوائر كهربائية حاملة للتيار أو عن طبقات مغناطيسية مزدوجة (وهي طبقات ثنائيات الأقطاب) . إن هذا الأسلوب يكون في بعض الاحيان مفيداً في التعامل مع المسائل المتعلقة بالدوائر الكهربائية . أما الاستعمال الرئيس لهذا الأسلوب فيتمثل في التعامل مع المواد المغناطيسية .

8-9 الفيض المغناطيسي :Magnetic flux

تدعى الكمية المعطاة بالعلاقة :

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, da \tag{8-88}$$

الفيض المغناطيسي ويقاس بوحدة الويبر . وعلى الرغم من التناظر الموجود بين الفيض المغناطيسي والفيض الكهربائي ، الا أن الفيض المغناطيسي يتفوق كثيراً في الأهمية على الفيض الكهربائي . والفيض المغناطيسي خلال سطح مغلق يساوي صفراً كما هو واضح من العلاقة

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, da = \int_V \operatorname{div} \mathbf{B}\, dv = 0. \tag{8-89}$$

ومن هذه النتيجة يتبين كذلك ان الفيض المغناطيسي خلال دائرة كهربائية لا يعتمد على السطح المستخدم لحساب الفيض . وسنستخدم هذه النتائج في الفصل القادم عند مناقشة الحث الكهرومغناطيسي .

مسائل

8-1 جسيم مشحون كتلته m يحمل شحنة قدرها q متحركة في مجال مغناطيسي منتظم B_0 . بين أن حركة الجسيم بشكل عام تكون لولبية ذات مقطع دائري نصف قطره يساوي

$$R = mv_{\perp}/qB$$

اذ ان $v_{\perp}$ تمثل مركبة سرعة الجسيم العمودية على المجال المغناطيسي .

8-2 تعطى الدالة المسماة هاملتونيان Hamiltonian للجسيم المشحون المتحرك في مجال مغناطيسي منتظم B_0 موازٍ للاحداثي z بالعلاقة :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} p^2 - \frac{qB_0}{2m} (xp_y - yp_x) + \frac{q^2B_0^2}{8m} (x^2 + y^2).$$

بين ان معادلات الحركة التي يمكن اشتقاقها من $\mathcal{H}$ تتفق مع نتائج المسألة السابقة .

8-3 قذف بروتون سرعته 10^7 m/ sec بصورة عمودية على مجال مغناطيسي منتظم $0.1 \mathrm{w/m^2}$. (أ) مامقدار الانحراف الحاصل في مسار الجسيم عن الخط المستقيم بعد أن يقطع مسافة قدرها سنتيمتراً واحداً ؟ (ب) كم من الزمن يستغرق البروتون ليقطع قوساً بتسعين درجة ؟

8-4 أثبت ان القوة المؤثرة على سلكين متوازيين يحملان تيارين I_1 و I_2 يسريان باتجاه واحد هي قوة تجاذب . وإذا كان السلكان طويلين جداً وتفصلها مسافة قدرها a ، جد القوة المغناطيسية المؤثرة على قطعة dl_2 من السلك الثاني .

8-5 سلك يصنع شكلاً سداسياً منتظماً طول ضلعه a ، ويحمل تياراً قدره I . جد الحث المغناطيسي عند مركز الشكل السداسي .

8-6 شريط رقيق طويل جداً من المعدن عرضه w ، يسري فيه تيار قيمته الكلية I . جد الحث المغناطيسي في مستوي الشريط وعلى بعد قدره b من الحافة القريبة للشريط .

8-7 عدد كبير قدره N من اللفات المصنوعة من سلك دقيق ملفوف على سطح كرة خشبية نصف قطرها a . فاذا علم أن مستوي اللفات عمودي على محور الكرة ، وأن اللفات تغطي جميع سطح الكرة وتشكل طبقة واحدة ويسري فيها تيار قيمته I ، عين المجال المغناطيسي عند مركز الكرة .

8-8 ملف حلزوني طوله 15 cm يحتوي على طبقتين من اللفات . كل طبقة مكونة من مائة لفة ، نصف قطر الطبقة الاولى يساوي 2 cm ونصف قطر الطبقة الثانية يساوي 2.05 cm . فاذا كانت اللفات تحمل تياراً قيمته ثلاثة أمبيرات ، جد الحث المغناطيسي عند مختلف النقاط الواقعة على طول محور الحلزون . إعمل رسماً بيانياً للحث المغناطيسي المحوري دالة للبعد الممتد من مركز الملف الحلزوني الى أحد طرفيه .

8-9 ملف حلزوني ذو مقطع مربع الشكل (أي ان كل لفة من لفات الملف تعمل شكلاً مربعاً) طول ضلعه a يحتوي على N من اللفات لوحدة الطول ويحمل تياراً قدره I . فاذا كان الملف طويلاً جداً ، جد الحث المغناطيسي المحوري عند مركز الملف .

8-10 يعطى الحث المغناطيسي للفة دائرية تحمل تياراً قدره I عند نقطة واقعة على محور اللفة (الاحداثي z) وفق المعادلة (8-38) . إستعمل الحقيقة التي تنص على أن div B = 0 للحصول على تعبير تقريبي للمركبة الشعاعية للمجال المغناطيسي B_r بحيث يكون التعبير صحيحاً للنقاط القريبة جداً من المحور .

8-11 المركبة العمودية للحث المغناطيسي المتكون بين قطبي معجل للجسيمات معطاة بالمعادلة :

$$B_z = B_z(r, z)$$

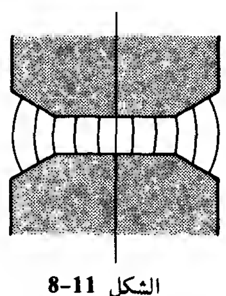
اذ ان :

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

تمثل البعد الشعاعي عن محور وجهي القطبين . (أ) اذا كانت $|B_z|$ دالة متناقصة للبعد r ، بين أن خطوط المجال المغناطيسي تنحني نحو الخارج كما هو موضح في الشكل (8-11) ، بغض النظر عما اذا كان القطب العلوي شمالياً أو جنوبياً . [ملاحظة : إستخدم الحقيقة التي تنص على أن curl B = 0 ، وأن $B_r = 0$ على المستوي الواقع في الوسط] . (ب) واذا كانت خطوط المجال المغناطيسي منحنية كما هو موضح في الشكل ، بين أن الجسيمات المتسارعة التي تنجرف بعيداً عن المستوي الوسطي تقع تحت تأثير قوة تعمل على إعادة الجسيمات الى المستوي الوسطي ، بغض النظر عما اذا كانت الجسيمات موجبة الشحنة أو سالبة الشحنة .

8-12 * يستدل من المعادلة (8-30) على أن هناك صنفاً معيناً واحداً فقط من المجالات المتجهة يمكن أن يحقق الصفات الفيزيائية لمجال الحث المغناطيسي . أثبت أن المعادلة :

$$\mathbf{B} = (\mathbf{r}/r) \times \mathbf{grad}\, g(x, y, z),$$



الشكل 8-11

تمثل مجالاً مغناطيسياً ملائماً باعتبار أن الدالة $g\ (x,\ y,\ z)$ هي حل لمعادلة لابلاس ، وجد كثافة التيار J الذي يولد هذا المجال .

8-13 برهن على أن B تحقق معادلة لابلاس الاتجاهية :

$$\nabla^2 \mathbf{B} = 0.$$

في حالة سريان تيارات ثابتة في وسط موصل ذي توصيل نوعي قدره g . أفرض أن الوسط متجانس وذو إتجاه واحد وغير مغناطيسي .

8-14 جد الحث المغناطيسي عند بعد قدره r عن مركز سلك مستقيم يحمل تياراً I مستخدماً قانون أمبير ، عندما يكون : $r > R$ و $r < R$ ، اذ ان R تمثل نصف قطر السلك . أثبت ان الحث المغناطيسي يتلاشى عند محور السلك .

8-15 ملف حلزوني حلقي يحتوي على عدد من اللفات قدره N ويحمل تياراً قيمته I ، (لاحظ الشكل 2-9) . نصف قطر الملف الداخلي a ونصف قطره الخارجي b . جد الحث المغناطيسي عند مختلف النقاط الواقعة داخل لفات الملف ، ثم جد النسبة b/a التي من شأنها أن تسمح للحث المغناطيسي داخل الملف بنسبة من التغير لا تزيد عن 25% .

8-16 أثبت ان الجهد المغناطيسي المتجه لسلكين طويلين مستقيمين متوازيين يحملان نفس التيار I ولكن باتجاهين متعاكسين يساوي :

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \mathbf{n},$$

إذ ان r_2 و r_1 تمثلان البعدين من نقطة المجال الى السلكين ، و $\underset{\sim}{n}$ تمثل وحدة المتجه الموازي للسلكين .

8-17 منظومة من الموصلات مكونة من سلك مستقيم طويل محاط بقشرة رقيقة اسطوانية من المعدن (نصف قطرها b) ومتحدة المركز مع السلك. الموصلان يحملان تيارين متساويين I ومنعاكسين بالاتجاه. جد الجهد المغناطيسي المتجه للمنظومة.

8-18 تعرف زاوية الميل المغناطيسي على أنها الزاوية المحصورة بين إتجاه الحث المغناطيسي والمستوي المماس لسطح الارض. اشتق تعبيراً لزاوية الميل كدالة لخط العرض الجيومغناطيسي، على فرض أن الحث المغناطيسي هو مجال لثنائي قطب.

8-19* (أ) اثبت أن الجهد المغناطيسي اللامتجه عند نقطة واقعة على محور (المحور z) لفة دائرية من التيار نصف قطرها a يساوي:

$$U^* = \frac{1}{2} I \left\{1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right\}.$$

(ب) جد مفكوك هذه الصيغة حسب نظرية ذي الحدين للحصول على تعبير توالٍ يصح للقيم $z < a$.

(جـ) إن الجهد المغناطيسي اللامتجه U^* ينبغي ان يحقق معادلة لابلاس. وفضلاً على ذلك يتبين من التناظر أن:

$$U^* = U^*(r, \theta)$$

إذ أن r تمثل البعد من مركز اللفة الى نقطة المجال، و θ تمثل الزاوية المحصورة بين المتجه **r** ومحور z. بين، باستخدام التوافقيات المنطقية المعطاة بالمعادلة (3-18)، أنه يمكن تشييد حلاً للجهد U^* بحيث يمكن اختصاره الى نفس صيغة الجهد التي حصلنا عليها في الفرع (ب) عند نقاط محور التماثل.

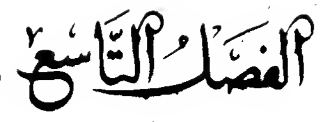
(د) إستخدم صيغة الجهد U^* المستخرجة في الفرع (جـ) لايجاد المركبتين B_r و B_θ عند نقاط واقعة خارج محور تماثل لفة التيار.

8-20* كرة نصف قطرها a تحمل شحنة كثافتها السطحية σ تدور حول محور يمر بمركزها بسرعة زاوية ω. بين أن المجال المغناطيسي عند نقطة خارجية هو مجال ثنائي قطب، ثم جد عزم ثنائي القطب المكافيء.

8-21 اثنان من ثنائيات الأقطاب $\mathbf{m}_1$ و $\mathbf{m}_2$ يقعان في مستوٍ واحدٍ. ثنائي القطب $\mathbf{m}_1$ مثبت في موقعه، لكن $\mathbf{m}_2$ له حرية الحركة الدورانية حول محور يمر في مركزه. بين أنه في حالة الاتزان تتحقق المعادلة

$$\tan \theta_1 = -2 \tan \theta_2,$$

حيث θ_1 و θ_2 هما الزاويتان المحصورتان بين المتجه **r** وكل من المتجهين $\mathbf{m}_1$ و $\mathbf{m}_2$ على الترتيب (**r** يمثل متجه الإزاحة بين $\mathbf{m}_2$ و $\mathbf{m}_1$).



الحث الكهرومغناطيسي
ELECTROMAGNETIC INDUCTION

لقد كان العالمان فاراداي وهنري أول من لاحظ توليد قوة دافعة كهربائية محتثة نتيجة لتغيير الفيض المغناطيسي ، وكان ذلك في مطلع القرن التاسع عشر . ومن تلك التجارب الرائدة التي قام بها هذان العالمان تطورت المولدات الحديثة والمحولات و . . . الخ . وسنعالج في هذا الفصل في المقام الأول الصياغة الرياضية لقانون الحث الكهرومغناطيسي ومايتعلق به من حالات بسيطة .

9-1 الحث الكهرومغناطيسي Electromagnetic induction

يمكن تلخيص نتائج تجارب عديدة انجزت على هذا الموضع بالقانون الآتي :

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (9\text{-}1)$$

وهذا يعني ان التغير الحاصل في الفيض المغناطيسي خلال دائرة كهربائية يكون مصحوباً بقوة دافعة كهربائية . لقد وجد أن هذه النتيجة التي تعرف بأسم قانون فاراداي في الحث الكهرومغناطيسي لا تعتمد على الطريقة التي يتغير بها الفيض — إذ يمكن أن تشوه الدائرة الكهربائية أو تحرك أو تغير قيمة B داخل الدائرة الكهربائية . ومن المهم جداً أن يدرك المرء أن المعادلة (1-9) تمثل قانوناً تجريبياً

مستقلاً ـ لا يمكن اشتقاقها من قوانين تجريبية أخرى . وهي بالتأكيد ليست نتيجة لقانون حفظ الطاقة المستخدم في موازنة الطاقة للتيارات في المجالات المغناطيسية .

لكن

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{9-2}$$

و

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, da, \tag{9-3}$$

ولهذا يمكن كتابة المعادلة (1-9) بالشكل الآتي :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, da. \tag{9-4}$$

واذا كانت الدائرة الكهربائية متماسكة وثابتة في موضعها ، فإنَّ المشتقة بالنسبة للزمن يمكن نقلها داخل التكامل حيث تصبح مشتقة جزئية . وفضلاً عن ذلك يمكن استخدام نظرية ستوكس لتحويل التكامل الخطي لشدة المجال **E** الى تكامل سطحي للكمية curl E . وبهذا نحصل على الآتي :

$$\int_S \operatorname{curl} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, da = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}\, da. \tag{9-5}$$

وبما أن هذه النتيجة تصح لجميع السطوح S ، لذا ينتج :

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{9-6}$$

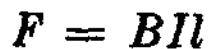
وهذه هي الصيغة التفاضلية لقانون فراداي . أما الأوساط المتحركة فانها تتطلب معالجة تتعدى نطاق هذا الكتاب .

والعلامة السالبة في قانون فراداي تشير الى حقيقة أن القوة الدافعة الكهربائية المحتثة تكون بذلك الاتجاه الذي يعمل على معاكسة التغير الذي تسبب في توليدها . فاذا أردنا أن نزيد الفيض المغناطيسي خلال دائرة كهربائية ، فإنَّ القوة الدافعة الكهربائية المحتثة ستحاول تكوين تيار يسري بذلك الاتجاه الذي يعمل على تناقص الفيض . وهذا يعني أنه إذا أردنا دفع قطب مغناطيسي داخل ملف ، لقام التيار المتولد بفعل القوة الدافعة الكهربائية المحتثة بتكوين مجال مغناطيسي في هذا الملف بحيث ينتج تنافر بينه وبين قطب المغناطيس . وجميع هذه الظواهر يمكن تغطيتها بقانون لنز الذي ينص على :

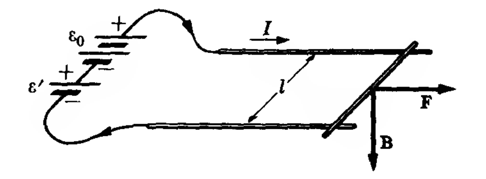
في حالة حدوث تغير في منظومة مغناطيسية ، فإنَّ ما يحدث سيعمل على معاكسة التغير .

ومن الواضح أن ما يحدث هو بفعل إتجاه التيار وبالتالي إتجاه القوة المشار إليها في الأمثلة المعطاة في أعلاه . وينبغي ان لا يستخف المرء باستخدامات قانون لنز . وفي حالات كثيرة يمثل قانون لنز أسرع وسيلة ، إن لم نقل الطريقة الوحيدة ، للحصول على معلومات عن التفاعلات الكهرومغناطيسية . وحتى في حالة توفر طرق أخرى فإنه يعدُّ وسيلة لتدقيق النتائج .

هناك حالة خاصة لقانون فراداي يمكن فيها إشتقاق القوة الدافعة الكهربائية من قانون لنز ومن قانون حفظ الطاقة . أفرض أن سلكاً مستقيماً ينزلق على زوج من السكك الافقية تفصلها مسافة قدرها l ، وأفرض وجود مجال مغناطيسي B عمودي على مستوى السكك . دع مصدراً ذا قوة دافعة كهربائية ε_0 يتصل مع السكتين كما هو مبين في الشكل (9-1) . ونتيجة لمرور التيار I في السكك تنشأ عليه قوة مقدارها



$$F = BIl$$



الشكل 9-1 قوة دافعة كهربائية حركية ناشئة عن إنزلاق السلك في مجال مغناطيسي

واتجاهها نحو اليمين . وبفضل هذه القوة يتحرك السلك نحو اليمين بتعجيل منتظم . فاذا فرضنا أن سرعة السلك تبلغ v في لحظة زمنية معينة ، فإنَّ المعدل الزمني للشغل المنجز يساوي Fv . أما القدرة التي يجهزها مصدر القوة الدافعة الكهربائية ε_0 فيتم بمعدل قدره $\varepsilon_0 I$. لذا ينتج لدينا :

$$\varepsilon_0 I = I^2R + Fv \qquad (9\text{-}7)$$

ونتيجة لذلك تكون قيمة التيار I أقل من القيمة الأصلية وهي ε_0/R ، ولهذا تكون القوة المغناطيسية مختلفة . ولتجنب هذه الصعوبة تضاف ق.د.ك. متغيرة قيمتها ε' على التوالي مع ε_0 ، وذات مقدار (متغير) كافٍ لجعل التيار I ثابتاً . وبهذا يمكننا ان نستعيض عن المعادلة (9-7) بالعلاقة الآتية :

$$(\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}')I = I^2R + Fv. \tag{9-8}$$

لكن :

$$\mathcal{E}_0 I = I^2R,$$

لذا :

$$\mathcal{E}' I = BIlv. \tag{9-9}$$

وبحذف I من جهتي هذه المعادلة ينتج :

$$\mathcal{E}' = Blv = \frac{d\Phi}{dt}\,; \tag{9-10}$$

بيد أن $\mathcal{E}'$ هي ليست ق.د.ك. محتثة ، إنما القيمة السالبة لها ، أي القوة الدافعة الكهربائية التي يجب اضافتها الى $\mathcal{E}_0$ لكي يبقى التيار ثابتاً . لذا :

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{9-11}$$

وهذه النتيجة تتفق بطبيعة الحال مع المعادلة (1-9) . والآن يمكننا تعميم العلاقة

$$\mathcal{E} = -Blv \tag{9-12}$$

وذلك بكتابتها بصيغة إتجاهية . وإذا كانت السرعة $\mathbf{v}$ ذات إتجاه اعتباطي نسبة للمتجه $\boldsymbol{l}$ ، فإن المركبة الوحيدة للسرعة $\mathbf{v}$ التي تكون عمودية على $\boldsymbol{l}$ هي التي تساهم في تحديد قيمة $\mathcal{E}$. وبهذا تتناسب $\mathbf{v}$ طردياً مع المتجه $\boldsymbol{l}\times\mathbf{v}$. ولمجال مغناطيسي إعتباطي $(\mathbf{B})$ ، فان المركبة العمودية على مستوي المتجهين $\boldsymbol{l}$ و $\mathbf{v}$ هي الوحيدة التي تساهم في تحديد قيمة $\mathcal{E}$. ولما كان المتجه $\boldsymbol{l}\times\mathbf{v}$ عمودياً على مستوي المتجهين $\boldsymbol{l}$ و $\mathbf{v}$ ، فإنه بالإمكان التعبير عن $\mathcal{E}$ بالصيغة الاتجاهية الآتية :

$$\mathcal{E} = \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{l}\times\mathbf{v} \tag{9-13}$$

وبمقارنة المعادلة (13-9) مع الشكل (1-9) تتبين صحة العلامة التي تظهر في العلاقة (13-9) . ومرة اخرى يجب على المرء أن يلاحظ أن المعادلة (13-9) هي حالة خاصة من المعادلة (1-9) . واشتقاق المعادلة (13-9) لا يبرهن على صحة المعادلة (1-9) ، طالما أن التغير الوحيد الذي تم إعتماده هو تغير مساحة الدائرة الكهربائية . وتدعى القوة الدافعة الكهربائية المشار إليها في المعادلة (13-9) بأسم ق.د.ك. حركية .

9-2 الحثية الذاتية Self-inductance

في هذا البند سنتناول العلاقة بين الفيض والتيار الذي يسري في دائرة كهربائية معزولة . والهدف من ذلك هو إدخال الحث الذاتي ـ وهو احد المعالم العملية للدوائر الكهربائية . الفيض المغناطيسي خلال دائرة كهربائية معزولة يعتمد على الشكل الهندسي للدائرة ، وحسبما جاء في المعادلة (8-26) فان اعتماد الفيض على تيار الدائرة يكون خطياً . وبهذا نجد أن التغير الوحيد في الفيض خلال دائرة كهربائية صُلْبَةٍ وثابتة ينتج عن التغيرات التي تحصل في التيار . وهذا يعني أن :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dI}\frac{dI}{dt}, \tag{9-14}$$

وهذه المعادلة تبقى صحيحة وإن لم تتحقق المعادلة (8-26) ، إذ أن كل مايطلب هو أن يعتمد الفيض على التيار . أما اذا تحققت المعادلة (8-26) ، أو بصورة أعم ، اذا كان الفيض يتناسب طردياً مع التيار ، فان الكمية $d\Phi/dI$ تكون ثابتة وتساوي Φ/I . وعلى أية حال تعرف الحثية L وفق العلاقة

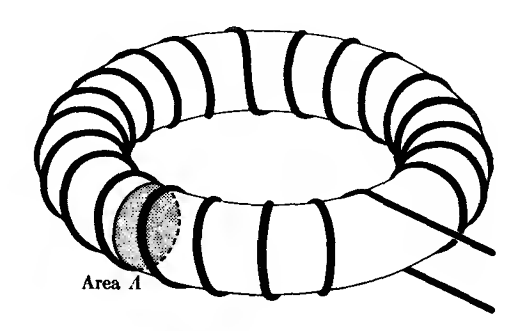
$$L = \frac{d\Phi}{dI}. \tag{9-15}$$

وعندما يكون التمييز بين هذه الكمية والكمية Φ/I أمراً اساسياً ، فإنه من الافضل أن ندعو الكمية $d\Phi/dI$ الحثية التزايدية . وما لم يذكر خلاف ذلك فمن الأفضل أن نترك كلمة حثية تلازم المعادلة (9-15) . وباستخدام المعادلات (9-14) و (9-15) و (9-1) يمكننا أن نعبر عن القوة الدافعة الكهربائية المحتثة بالمعادلة :

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}, \tag{9-16}$$

وهي معادلة ذات أهمية عملية جديرة بالاعتبار .

ولتوضيح استعمال المعادلة (9-15) في حساب الحثية ، سنعمد الى حساب الحثية الذاتية لملف حلزوني حلقي كالملف المبين في الشكل (9-2) . تطبق المعادلة (9-15) على الدائرة الكهربائية بأجمعها ، أي ليس على لفات الملف الحلقي (المبين في الشكل) فحسب ، إنما على الدائرة الكهربائية الخارجية المتصلة بنهايتي الملف . وباستخدام سلك توصيل ملتوٍ أو سلك محوري ، لا ينتج عنه مجال مغناطيسي خارجي ، فإنه بالامكان ابعاد الجزء المكون للمجال من الدائرة الكهربائية الى مكان بعيد بحيث لا يساهم المجال الناشيء عن ذلك الجزء في الفيض المغناطيسي



الشكل 2-9 ملف حلزوني حلقي

داخل الملف . واذا ما تم إنجاز ذلك لأصبح بالامكان استخدام المعادلة (15-9) للحصول على حثية الملف الحلزوني الحلقي بشرط أن تمثل ε القوة الدافعة الكهربائية بين نهايتي الملف . ومن قانون أمبير نجد أن الحث المغناطيسي داخل لفات الملف يساوي :

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}, \tag{9-17}$$

إذ أن N تمثل عدد لفات الملف و l متوسط طول حلقة الملف و I التيار الذي يسري في الملف . [تتضمن المعادلتان (17-9) و (18-9) تقريب ناشيء عن إهمال التغير الذي يحدث للحث المغناطيسي خلال مقطع الملف . والمسألة 8-9 تتناول تفاصيل هذا التقريب] . أما الفيض المغناطيسي الذي يتخلل كل لفة من لفات الملف فيساوي :

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 NIA}{l}, \tag{9-18}$$

عندئذٍ يصبح الفيض الكلي خلال جميع لفات الملف وعددها N مساوياً :

$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} I. \tag{9-19}$$

وببساطة نجد أن الحثية تصبح :

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}. \tag{9-20}$$

ان الوحدة العملية للحثية هي الهنري وتساوي ، حسب المعادلة (15-9) ، واحد فولت ثانية/ أمبير . وتشير المعادلة (20-9) الى أن الوحدة البديلة للثابت μ_o هي هنري/ متر ، وهذه تكافىء الوحدة التي أعطيت سابقاً وهي ويبر/ أمبير متر .

9-3 الحثية المتبادلة : **Mutual inductance**

أخذنا في البند السابق الدوائر الكهربائية المعزولة فقط ، ولهذا كان الفيض المغناطيسي خلال الدائرة الكهربائية ناتجاً عن التيار الذي يسري في الدائرة ذاتها . وبالامكان رفع هذا القيد بفرض وجود n من الدوائر الكهربائية . عند ذلك يمكن كتابة الفيض الذي يتخلل احدى هذه الدوائر ، ولتكن الدائرة الكهربائية المؤشرة بالحرف i ، بالشكل الآتي :

$$\Phi_i = \Phi_{i1} + \Phi_{i2} + \cdots + \Phi_{ii} + \cdots + \Phi_{in} = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij}. \qquad (9\text{-}21)$$

وهذا يعني أنه بالامكان التعبير عن هذا الفيض على أنه يساوي مجموع قيم الفيض لكل واحدة من الدوائر الكهربائية التي يبلغ عددها n ، اذ أن الكمية Φ_{i1} تمثل الفيض خلال الدائرة الكهربائية التي تحمل الرقم i الناتج عن مرور التيار في الدائرة الكهربائية التي تحمل الرقم واحداً ، وهلم جرّا ، وبذلك يمكن كتابة القوة الدافعة الكهربائية المحتثة في الدائرة i ، $\mathcal{E}_i$ ، بالصيغة الآتية :

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_i}{dt} = -\left\{\frac{d\Phi_{i1}}{dt} + \cdots + \frac{d\Phi_{ii}}{dt} + \cdots + \frac{d\Phi_{in}}{dt}\right\} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{d\Phi_{ij}}{dt}. \qquad (9\text{-}22)$$

واذا كانت كل واحدة من هذه الدوائر الكهربائية صلبة وثابتة ، فان التغيرات الوحيدة التي يمكن أن تحدث في Φ_{ij}'s هي تلك التغيرات التي تنشأ عن التغيرات في قيم التيارات . لذا :

$$\frac{d\Phi_{ij}}{dt} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j}\frac{dI_j}{dt}. \qquad (9\text{-}23)$$

تعد المعاملات $d\Phi_{ij}/dI_j$ ثوابتاً مستقلة عن التيار فيما اذا صحت المعادلة (26-8) . وقد تعتمد هذه المعاملات على التيار عندما لا تكون قيمها ثابتة بسبب الصفات اللاخطية للاوساط المغناطيسية الملازمة لدائرة كهربائية معينة . وفي كلتا الحالتين تعرف الكمية :

$$M_{ij} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j}, \qquad i \neq j \tag{9–24}$$

على أنها الحثية المتبادلة بين الدائرة الكهربائية i والدائرة الكهربائية j . وسيتضح فيما بعد أن :

$$M_{ij} = M_{ji}$$

وعند ذلك لا يبقى مايدعو للإلتباس في الرموز السفلية للحثية المتبادلة . وبطبيعة الحال فإن الكمية $d\Phi_{ii}/dI_i$ هي بالضبط ما يسمى الحثية الذاتية للدائرة الكهربائية i والتي يرمز لها L_i أو M_{ii} . ووحدة الحثية المتبادلة مثلما هي وحدة الحثية الذاتية .

وكمثال على حساب الحثية المتبادلة نأخذ الملف الحلزوني الحلقي المبين في الشكل (2–9) ونضيف اليه ملفاً آخر عدد لفاته N_2 . في هذه الحالة يولد التيار الذي يسري في الملف الأول وقدره I_1 مجالاً مغناطيسياً قيمته

$$B = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l},$$

وفيضاً في الملف الاول قيمته تساوي :

$$\Phi_{11} = \frac{\mu_0 N_1^2 A I_1}{l}$$

كما يولد فيضاً مغناطيسياً في الملف الثاني يساوي :

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A I_1}{l}.$$

ومن هاتين القيمتين للفيض ينتج :

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 A}{l} \tag{9–25}$$

و

$$M_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l}. \tag{9–26}$$

وبالمثل يمكننا أن نحصل على ما يأتي اذا أخذنا التيار I_2 بنظر الاعتبار :

$$L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 A}{l}, \tag{9–27}$$

$$M_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l}, \tag{9–28}$$

مما يثبت أن :

$$M_{12} = M_{21}$$

في هذه الحالة . وفضلاً عن ذلك يمكننا أن ندمج المعادلات (25-9) و (26-9) و (27-9)،لنحصل على :

$$M_{12} = \sqrt{L_1 L_2}. \qquad (9\text{-}29)$$

وهذه المعادلة تمثل التحديد الذي يفرض على الحثية المتبادلة بين دائرتين كهربائيتين ، إنها دائماً اقل من (أو تساوي) الجذر التربيعي لحاصل ضرب الحثية الذاتية لكل من الدائرتين . وعلى ضوء هذا التحديد غالباً مايستخدم عامل ازدواج k يمكن تعريفه حسب العلاقة :

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}, \qquad |k| \leq 1. \qquad (9\text{-}30)$$

9-4 صيغة نيومان The Neumann formula

الحثية المتبادلة بين دائرتين كهربائيتين صلبتين في وسط خطي (وليكن الفراغ في الوقت الحاضر) هي :

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}. \qquad (9\text{-}31)$$

وتعد هذه النتيجة صحيحة لأن Φ_{21} تتناسب طردياً مع I_1 ، مما يجعل الكمية Φ_{21}/I_1 تساوي $d\Phi_{21}/dI_1$ وعليه يمكن في هذه الحالة استعمال المعادلة (26-8) لحساب M_{21} . يعطى الفيض بموجب العلاقة :

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{S_2} \left\{ \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right\} \cdot \mathbf{n}\, da_2. \qquad (9\text{-}32)$$

لكن :

$$\oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = \mathrm{curl}_2 \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\,; \qquad (9\text{-}33)$$

لذا :

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \mathrm{curl}_2 \left\{ \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right\} \cdot \mathbf{n}\, da_2. \qquad (9\text{-}34)$$

وباستخدام نظرية ستوكس لتحويل التكامل السطحي نحصل على العلاقة :

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}, \tag{9-35}$$

والتي تعرف باسم صيغة نيومان للحثية المتبادلة .

وبالقدر نفسه من المساواة تستخدم صيغة نيومان على الحثية الذاتية ، حيث تأخذ الشكل الآتي :

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}'_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|}. \tag{9-36}$$

لكنه يجب أن نكون حذرين عند تطبيق هذه المعادلة ، وذلك بسبب الانفرادية singularity المتمثلة عند النقطة $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_1$ ، واذا ماأخذنا جانب الحذر فإن المعادلة (9-36) تكون احياناً ذات فائدة كبيرة .

غير أن تطبيق المعادلتين (9-35) و (9-36) لحساب الحثية يكون صعباً عادة ، باستثناء الدوائر الكهربائية ذات الوضع الهندسي البسيط . ومع ذلك تكون المعادلة (9-35) بشكل خاص مهمة جداً في دراسة القوى والعزوم التي تؤثر بها احدى الدوائر الكهربائية على الأخرى ، وهذا ماسنتناوله في الفصل الثاني عشر .

9-5 توصيل الحثيات على التوالي وعلى التوازي :
Inductances in series and in parallel

غالباً ماترتبط الحثيات ربطاً يقوم على التوالي وعلى التوازي ، ولهذا ينبغي معرفة نتيجة هذا الربط ، كما هي حال المقاومات والمتسعات . وبوسعنا أن نقوم باشتقاق مبني على الصيغة :

$$\mathcal{E} = -L(dI/dt)$$

ونحصل على صيغ للحثية الفعالة لحثيتين متصلتين على التوالي وعلى التوازي . ولكن إنجاز ذلك يتطلب إهمال حقيقة أن المحث يمتلك قدراً لا يستهان به من المقاومة دائماً . فالحصول على حثية تامة أصعب بكثير من الحصول على متسعة تامة أو مقاومة تامة . ولهذا السبب ستتضمن مجاميع المحثات المتصلة على التوالي والتوازي التي سنعالجها في هذا البند مقاومات بالاضافة الى الحثيات .

الدائرة الكهربائية المبينة في الشكل (9-3) تمثل محثين متصلين على التوالي .

وعند جمع الهبوط في الجهد عبر عناصر الدائرة من المهم أن نلاحظ أن M قد تكون كمية موجبة أو سالبة ، ذلك أن تغيير إتجاه اي من المسارين C_1 أو C_2 يؤدي الى عكس علامة M في المعادلة (35-9) . وإذا اخذنا هذا الشيء بعين الاعتبار ، لوجدنا أن مجموع التغيرات في الجهد عبر عناصر الدائرة الكهربائية الموضحة في الشكل (3-9) تساوي :

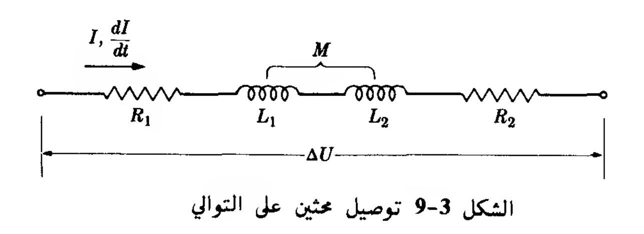
$$\Delta U + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = R_1 I + R_2 I,$$

أو

$$\Delta U = R_1 I + L_1 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt} + R_2 I + L_2 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt}. \quad (9\text{–}37)$$

أي أن

$$\Delta U = (R_1 + R_2)I + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{dI}{dt}. \quad (9\text{–}38)$$



الشكل 3-9 توصيل محثين على التوالي

وبهذا نجد أن الدائرة تمثل مقاومة قيمتها $R_1 + R_2$ متصلة على التوالي مع حثية قدرها $L_1 + L_2 + 2M$. إن قيمة الحثية إما ان تساوي $L_1 + L_2 + 2|M|$ بالنسبة للاقتران الموجب (أي بالنسبة للفيضين الناشئين عن التيارين I_1 و I_2 عندما يسريان باتجاه واحد في الملفين) ، أو أن تساوي $L_1 + L_2 - 2|M|$ بالنسبة للاقتران السالب . ان الوصف البديل للحثية المتبادلة يتمثل في العلاقة :

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}, \qquad -1 \leq k \leq 1. \quad (9\text{–}39)$$

وبهذا تكون الحثية الفعالة لدائرة التوالي بالشكل الآتي :

$$L_{\text{eff}} = L_1 + 2k\sqrt{L_1 L_2} + L_2. \quad (9\text{–}40)$$

وبتغيير k يصبح بالإمكان تركيب حثية متغيرة . (لقد كانت هذه هي الوسيلة الشائعة في دائرة التنغيم الكهربائية لأجهزة الراديو التي صنعت في الأيام الأولى ، لاحظ الفصل الثالث عشر) .

بيد أن توصيل المحثات على التوازي كما هو مبين في الشكل (4-9) لا يكون سهلاً كما في حالة التوصيل على التوالي . والحقيقة فإن سلوك الدائرة الكهربائية المبينة في هذا الشكل لا يكون مشابهاً لسلوك دائرة كهربائية مكونة من العنصرين L-R المتصلين على التوالي . ولهذا لا يصح القول بأن الحثية الفعالة والمقاومة الفعالة هما دوال معينة للكميات L_1 و L_2 و R_1 و R_2 . ولكنه اذا أمكن إهمال R_1 و R_2 لنتج :

$$\Delta U = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}$$
$$\Delta U = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}. \qquad (9\text{-}41)$$

واذا حذفت dI_1/dt اولاً ثم حذفت dI_2/dt من بين المعادلتين (41-9) لنتج الآتي :

$$\Delta U(L_2 - M) = (L_1L_2 - M^2)\frac{dI_1}{dt},$$
$$\Delta U(L_1 - M) = (L_1L_2 - M^2)\frac{dI_2}{dt}. \qquad (9\text{-}42)$$

وبجمع هاتين المعادلتين ينتج :

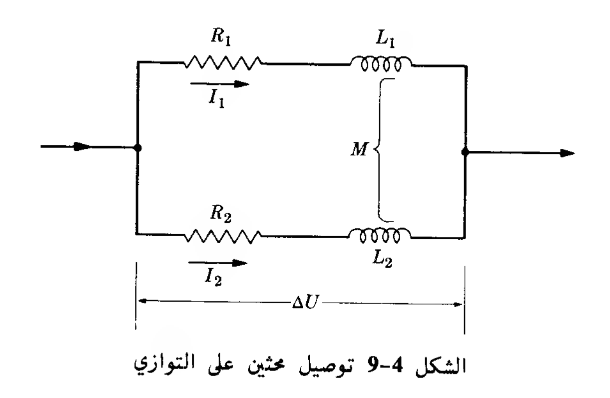
$$\Delta U = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}\frac{dI}{dt}. \qquad (9\text{-}43)$$

وبهذا تكون الحثية الفعالة لمحثين متصلين على التوازي كما يأتي :

$$L_{\text{eff}} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}, \qquad (9\text{-}44)$$

ومرة أخرى تعتمد علامة M على الطريقة التي يتم فيها توصيل المحثات .

إن أهم الاستخدامات للمحثات تتمثل في الدوائر الكهربائية للتيار المتناوب . وللدائرة الكهربائية التي تشتغل بتردد منفرد ، يمكن الحصول على دائرة توالي مكافئة للدائرة الكهربائية المبينة في الشكل (4-9) . ولكننا نجد أن المقاومة المكافئة والحثية المكافئة كلاهما تعتمدان على التردد . وهذا الاعتماد على التردد هو أساس الصعوبة المشار اليها في أعلاه .



الشكل 4-9 توصيل محثين على التوازي

مسائل

9-1 موصل معدني على شكل سلك طوله l حرك في مجال مغناطيسي B بسرعة v . اثبت أن فرق الجهد بين طرفي السلك يساوي $\mathbf{B.l \times v}$ ، معتمداً في ذلك على قوة لورنتز المؤثرة على الالكترونات في السلك .

9-2 قضيب معدني طوله متر واحد يدور حول محور عمودي عليه ويمر بإحدى نهايتي القضيب بسرعة زاوية قدرها $12\,rad/sec$. مستوي دوران القضيب عمودي على مجال مغناطيسي منتظم $0.3\,w/m^2$. ماقيمة القوة الدافعة الكهربائية المحتثة بين طرفي القضيب ؟

9-3 يمتاز المجال المغناطيسي ذو التناظر الاسطواني بان تكون مركبته الموازية للاحداثي z معطاة بالمعادلة :

$$B_z = B(r),$$

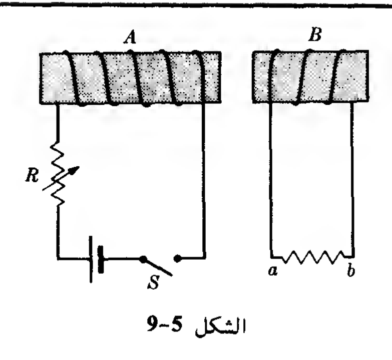
إذ ان البعد r يمثل المسافة عن محور التناظر . يدور في هذا المجال أيون شحنته q وكتلته m بسرعة زاوية قدرها .

$$\omega = qB(R)/m$$

ويعمل دائرة نصف قطرها R ومركزها ينطبق على محور التناظر . فإذا أخذ مقدار المجال المغناطيسي يزداد ببطء ، أثبت أن القوة الدافعة الكهربائية المحتثة حول مدار الأيون تؤدي الى تعجيله . ولكي يبقى الأيون في مداره بين أن متوسط الزيادة في $B(r)$ خلال السطح المحاط بالمدار يجب أن يساوي ضعف الزيادة الحاصلة في $B(R)$.

9-4 جسم اسطواني عازل ذو سماحية قدرها ϵ يدور حول محوره بسرعة زاوية ω . فاذا سلط مجال مغناطيسي منتظم B على هذا الجسم بصورة موازية لمحور الاسطوانة ، جد شحنة الاستقطاب المحتثة على العازل .

9-5 وضعت دائرتان كهربائيتان بصورة متجاورة كما هو مبين في الشكل (9-5) . عين إتجاه سريان التيار المحتث في المقاومة ab باستخدام قانون لنز عندما (أ) يقرب الملف B من الملف A ، و (ب) تنقص قيمة المقاومة R ، و (جـ) يفتح المفتاح S .



الشكل 9-5

9-6 ملف مكون من مائة لفة ذو مقطع دائري وقد احتشدت لفاته الى درجة يمكن عدُّها واقعة جميعها بمستوٍ واحدٍ تقريباً . متوسط نصف قطر الملف يساوي ثلاثة سنتمترات . يدور الملف حول أحد أقطاره بسرعة قدرها تسعمائة دورة في الدقيقة الواحدة . وجد أن متوسط القوة الدافعة الكهربائية المحتثة في الملف تساوي 0.50 ملي فولت عندما يكون محور الدوران شاقولياً . ماذا يمكنك ان تستنتج عن المجال المغناطيسي عند موقع الملف ؟

9-7 قرص دائري سمكه t يدور حول محوره بسرعة زاوية ω . القرص مصنوع من معدن ذي توصيل نوعي g . وضع هذا القرص الدوار بين قطبي مغناطيس يولد مجالاً مغناطيسياً منتظماً B في منطقة مربعة صغيرة مساحتها a^2 كائنة على بعد متوسطه يساوي r عن المحور . فاذا كان المجال المغناطيسي عمودياً على القرص ، احسب القيمة التقريبية للعزم المغناطيسي المؤثر على القرص . (اعمل فرضية معقولة عن مقاومة التيار الدوام) .

9-8 ملف حلزوني حلقي مكون من N من اللفات كالملف المبين في الشكل (9-2) ملفوف على مادة غير مغناطيسية . فاذا كان متوسط نصف قطر الملف b ونصف قطر المقطع a ، أثبت أن الحثية الذاتية للملف تعطى حسب العلاقة :

$$L = \mu_0 N^2 (b - \sqrt{b^2 - a^2})$$

9-9 دائرة كهربائية مكونة من قشرتين اسطوانيتين نصف قطريها R_1 و R_2 ، $(R_2 > R_1)$ ، وطولها المشترك L وصلتا بألواح مسطحة النهاية ، بحيث أن الشحنة تنساب من إحدى القشرتين لتعود الى القشرة الأخرى . ماقيمة الحثية الذاتية لهذه الدائرة ؟

9-10 اذا كان عدد لفات الملف الحلقي المشار إليه في المسألة (9-8) يبلغ 150 لفة و $b = 4\,cm$ و $a = 1.5\,cm$ ، ماقيمة حثية الملف بوحدة الهنري ؟

9-11 لفتان دائريتان صغيرتان من السلك نصفا قطريهما a و b واقعتان في مستوٍ واحدٍ على بعد قدره r . ما الحث المتبادل بين اللفتين فيما اذا كانت المسافة بينهما على درجة كافية من الكبر بحيث يمكن استخدام التقريبات المتعلقة بثنائي القطب ؟

9-12 لفتان دائريتان حاملتان للتيار موضوعتان على بعد قدره r بحيث أن محور اللفة الاولى، يوازي محور اللفة الثانية . فاذا كان هذا البعد بينهما كبيراً بحيث يمكن استخدام التقريبات المتعلقة بثنائي القطب ، بين كيف يمكن أن توضع إحدى اللفتين بالنسبة الى اللفة الأخرى بحيث تكون الحثية المتبادلة لهما صفراً .

9-13 دائرتان كهربائيتان مكونتان من سلك مستقيم طويل جداً وآخر بشكل مستطيل أحد بعديه h والآخر d . المستطيل يقع في مستوٍ يمر خلال السلك ، والضلعان h يوازيان السلك ويقعان على بعدين قدرهما r و r+d عنه . أحسب الحثية المتبادلة بين الدائرتين الكهربائيتين .

9-14 لفتان دائريتان من السلك متحدتا المحور نصفا قطريهما a و b تفصلهما مسافة قدرها x . أثبت باستخدام صيغة نيومان أن الحثية المتبادلة للفتين تساوي

$$M = \mu_0(ab)^{1/2}\left[\left(\frac{2}{k} - k\right)K(k) - \frac{2}{k}E(k)\right],$$

إذ أن :

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + x^2},$$

و K(k) و E(k) هما تكاملان ناقصيان elliptic integrals يعرفان وفق المعادلتين

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1 - k^2\sin^2\phi)^{1/2}},$$

و

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2\sin^2\phi)^{1/2}\, d\phi.$$

9-15 تأمل مرة أخرى المسألة السابقة . جد مفكوك الكمية $1/|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|$ في صيغة نيومان حسب نظرية ذي الحدين ، ثم أنجز عملية التكامل لكل الحدود لتحصل على

$$M = \frac{\mu_0\pi a^2b^2}{2h^3}\left(1 + 3\,\frac{ab}{h^2} + \frac{75}{8}\,\frac{a^2b^2}{h^4} + \cdots\right),$$

إذ أن :

$$h^2 = x^2 + (a+b)^2$$

9-16 وضعت دائرتان كهربائيتان إحداهما بجوار الأخرى . الدائرة الأولى تمتلك حثية قدرها L_1 ومقاومة R_1 والثانية تمتلك حثية L_2 ومقاومة R_2 . فإذا كانت الحثية المتبادلة بين الدائرتين تساوي M ، أثبت أن كمية الشحنة التي تنساب خلال إحدى هاتين الدائرتين تساوي :

$$Q = \varepsilon_0 M/R_1 R_2$$

عندما يربط مصدر للقوة الدافعة الكهربائية ε_0 بشكل فجائي على التوالي مع الدائرة الأخرى .

9-17 سلط مجال مغناطيسي $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ معتمد على الزمن على مادة موصلة غير مغناطيسية ذات توصيل نوعي قدره g . إبدأ بالصيغة التفاضلية لقانون فراداي المتمثلة بالعلاقة (6-9) وأثبت أن كثافة التيار الدوام المحتث في المادة الموصلة يحقق المعادلة التفاضلية الآتية :

$$\nabla^2 \mathbf{J} = g\mu_0(\partial \mathbf{J}/\partial t)$$

على فرض انه لا يحدث تجميع للشحنات (أي أن $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$) .

9-18 أثبت أن القوة الدافعة الكهربائية في دائرة كهربائية ثابتة C تعطى حسب العلاقة :

$$-\frac{d}{dt}\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l},$$

إذ أن A تمثل الجهد المتجه .

الفصل العاشر

الخواص المغناطيسية للمادة
MAGNETIC PROPERTIES OF MATTER

ناقشنا في الفصل الثامن طرق إيجاد الحث المغناطيسي الناشيء عن توزيع معين للتيارات . فاذا أردنا التعامل مثلاً مع دائرة حاملة للتيار مكونة من لفة دائرية من سلك ، لأصبح بامكاننا حساب المجال المغناطيسي في الفضاء المحيط بالسلك بمساعدة قانون بايوت . والآن دعنا نملأ المنطقة المحيطة بالسلك بوسط مادي ، فهل سيتغير الحث المغناطيسي نتيجة لوجود المادة في هذه المنطقة؟ الجواب هو "نعم" .

تتكون المادة كما هو معروف من ذرات ، وكل ذرة تحتوي على الكترونات في حالة متحركة ، وحركة كل ألكترون مقيدة داخل الذرة التي ينتمي اليها . هذه الدوائر الكهربائية الناشئة عن حركة الالكترونات في الذرة هي ماسندعوها التيارات الذرية . وبهذا سيكون لدينا نوعان من التيار كما يبدو : (أ) تيار حقيقي يتكون من إنتقال الشحنة بسبب حركة الالكترونات الطليقة والايونات المشحونة ، و (ب) وتيار ذري ناشيء عن حركة دورانية بحتة لا تؤدي الى حدوث إنتقال في الشحنة . ومع ذلك نجد أن كلاً من هذين النوعين من التيار يساهم في تكوين المجالات المغناطيسية .

10-1 التمغنط Magnetization

يعد كل تيار ذري بمثابة دائرة كهربائية صغيرة جداً ذات أبعاد ذرية ، ولهذا السبب قد يكون من الملائم وصفه كثنائي قطب مغناطيسي . والحقيقة أن عزم ثنائي القطب المغناطيسي هو الكمية التي تهمنا هنا ، طالما أن مجال الحث المغناطيسي الناشيء عن ذرة منفردة عند نقاط بعيدة يحدد كلياً بتعيين عزم ثنائي القطب المغناطيسي لها $\mathbf{m}$.

لنفرض ان العزم المغناطيسي للذرة i هو $\mathbf{m}_i$. والآن نعرف كمية عينية متجهة ، هي التمغنط $\mathbf{M}$ ، بالطريقة نفسها التي سبق إستخدامها في الفصل الرابع لتعريف الاستقطاب ، وذلك بجمع كل عزوم ثنائيات الاقطاب المغناطيسية الموجودة في عنصر صغير من الحجم Δv جمعاً اتجاهياً ، ومن ثم تقسيم ناتج الجمع على Δv ، وبذلك ينتج الآتي :

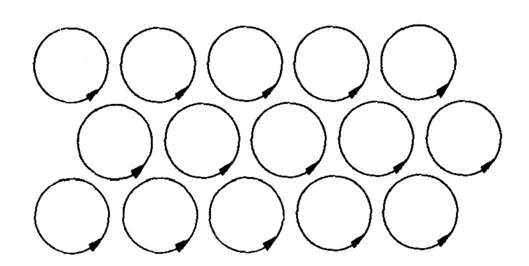
$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_i \mathbf{m}_i, \qquad (10\text{–}1)$$

وببساطة فان التمغنط يساوي عزم ثنائي القطب المغناطيسي لوحدة الحجم من المادة . وعملية الغاية المتمثلة في المعادلة (1–10) هي عملية إعتيادية عينية لأخذ الغاية ، حيث يجعل الحجم Δv صغيراً جداً من وجهة النظر العينية ، ولكنه ليس صغيراً الى درجة تجعله لا يحتوي على عدد كبير إحصائياً من الذرات . وعند ذلك تصبح الكمية $\mathbf{M}$ بمثابة دالة نقطية متجهة . وفي الحالة التي لا تكون فيها المادة ممغنطة ، فان ناتج الجمع $\Sigma\, \mathbf{m}_i$ سيؤول الى الصفر نتيجة للاتجاهات العشوائية لعزوم الثنائيات $\mathbf{m}_i$. ولكنه بوجود مجال مغناطيسي خارجي ، ينشأ تمغنط $\mathbf{M}$ يعتمد عادة على هذا المجال . وسنتناول في البند (6–10) طبيعة اعتماد $\mathbf{M}$ على $\mathbf{B}$.

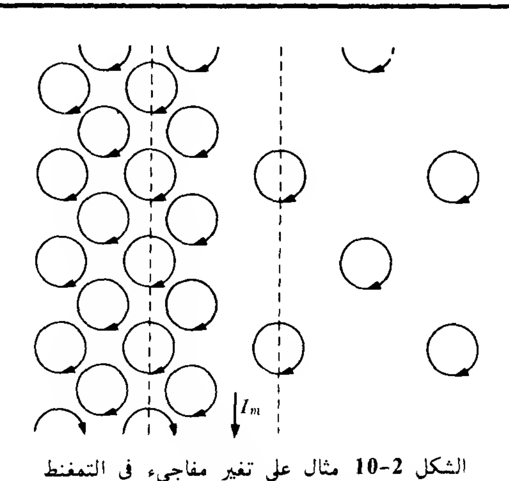
سنفترض الآن أن $\mathbf{M}(x, y, z)$ هي دالة معلومة ، وبالتالي سنحسب مساهمة المادة الممغنطة في تكوين المجال المغناطيسي من المعادلات المستخرجة في البند (7–8) .

ان دالة المتجه $\mathbf{M}$ تعطينا وصفاً عينياً للتيارات الذرية داخل المادة . وبالتحديد فان $\mathbf{M}$ تقيس عدد دوائر التيار الذرية لوحدة الحجم مضروباً بمتوسط العزم المغناطيسي لكل دائرة كهربائية . وطبقاً لوجهة النظر العينية البحتة ، فان جميع التأثيرات المغناطيسية الناجمة عن المادة يمكن وصفها على نحوٍ كافٍ بدلالة التمغنط أو مشتقة التمغنط . واحدى هذه المشتقات ، وهي الدالة $\mathbf{curl\,M}$ ، تكافيء كثافة التيار الحقيقي الذي يولد القدر نفسه من المجال المغناطيسي الذي يولده التمغنط $\mathbf{M}$ ، وهو مايدعى باسم كثافة تيار التمغنط ويرمز له $\mathbf{J}_M$. وقبل

أن نشتق هذه العلاقة المهمة التي تربط $\mathbf{J}_M$ بالمتجه $\mathbf{M}$ ، دعنا ننظر الى نموذج مبسط من مادة ممغنطة كما لو أنها مكونة من تيارات ذرية تدور بالاتجاه نفسه واحدة بجوار الاخرى (لاحظ الشكل 1-10) . فاذا كان التمغنط منتظماً ، لنتج أن كل تيار يمحو التيار المجاور له ، مما يؤدي الى جعل قيمة التيار الفعال في المنطقة الداخلية للمادة صفراً . اما اذا كان التمغنط غير منتظم لأصبحت عملية حذف التيارات الذرية غير كاملة . وكمثال على التمغنط غير المنتظم ، نأخذ التغير المفاجيء الذي يحصل للتمغنط المبين في الشكل (2-10) . واذا وجهنا اهتمامنا نحو المنطقة الواقعة بين الخطين المتقطعين ، لأتضح أن الشحنة التي تتحرك نحو الاسفل تفوق كمية الشحنة المتحركة نحو الاعلى . وهذا ماندعوه بتيار التمغنط . وبهذا نجد أنه على الرغم من عدم حدوث إنتقال في الشحنة ، هناك حركة فعالة للشحنة نحو الاسفل . وهذا ''التيار'' قادر على توليد مجال مغناطيسي .



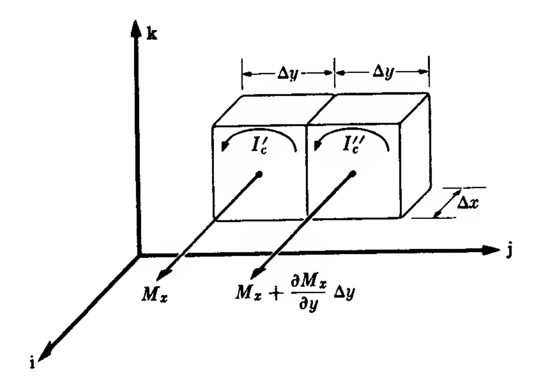
الشكل **1-10** صورة مبسطة لمادة مغناطيسية تحتوي على تيارات ذرية تدور باتجاه واحد .



الشكل **2-10** مثال على تغير مفاجيء في التمغنط

بقي علينا أن نشتق علاقة بين كثافة تيار التمغنط $\mathbf{J_M}$ والتمغنط $\mathbf{M}$. دعنا نأخذ عنصرين صغيرين من الحجم في قطعة من مادة مغناطيسية ، حجم كل عنصر يساوي $\Delta x \Delta y \Delta z$ ، موضوعين أحدهما بجوار الآخر باتجاه محور y (الشكل 10-3) . فاذا كان التمغنط في العنصر الحجمي هو $\mathbf{M}(x, y, z)$ ، لأصبح التمغنط في العنصر الحجمي الثاني مساوياً

$$\mathbf{M}(x, y, z) + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \Delta y + \text{حدود ذات رتب أعلى}$$



الشكل 3-10 الاستعاضة عن عناصر حجمية لمادة ممغنطة بتيارات دائرة هي $\mathbf{I'_c}$ و $\mathbf{I''_c}$.

مركبة العزم المغناطيسي باتجاه المحور x للعنصر الاول وقدرها $M_x \Delta x\ y \Delta z$ يمكن كتابتها بدلالة التيار الدائر $\mathbf{I'_c}$:

$$M_x \Delta x \Delta y \Delta z = I'_c \Delta y \Delta z. \tag{10-2}$$

وبالمثل نجد أن مركبة العزم المغناطيسي باتجاه محور x للعنصر الثاني تساوي

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial y} \Delta y\right) \Delta x \Delta y \Delta z = I''_c \Delta y \Delta z. \tag{10-3}$$

حيث أهملنا الحدود ذوات الرتب العليا وذلك لأنها تتلاشى عند الغاية التي يصبح عندها حجم كل عنصر حجمي صغيراً جداً . عندئذٍ تصبح محصلة التيار المتجه نحو الاعلى في المنطقة الوسطى الكائنة بين العنصرين :

$$I'_c - I''_c = -\frac{\partial M_x}{\partial y}\Delta x\,\Delta y. \tag{10-4}$$

وبعد ذلك نأخذ عنصرين حجميين متجاورين واقعين على محور x ونوجه اهتمامنا على مركبة التمغنط باتجاه محور y في كل عنصر . هنا ، في المنطقة الوسطى بين العنصرين ، نجد أن محصلة التيار المتجه نحو الاعلى والناشيء عن التيارات الدائرة التي تحدد العزوم المغناطيسية تساوي :

$$(I_c)_{\rm up} = \frac{\partial M_y}{\partial x}\Delta x\,\Delta y. \tag{10-5}$$

هذان هما التياران الدواران الوحيدان لعنصر معين اللذان يسببان تكوين تيار باتجاه z . إن هذا التيار الناشيء عن التمغنط غير المنتظم يدعى تيار التمغنط ، وهو ليس تياراً ناتجاً عن إنتقال الشحنة إنما هو مشتق كما رأينا من التيارات الدوارة ، أي التيارات الذرية في المادة . المساحة الفعالة لكل من التيارات المعطاة بالمعادلات (10-4) و (10-5) تساوي $\Delta x \Delta y$. لذا :

$$(J_M)_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \tag{10-6a}$$

أو

$$\mathbf{J}_M = \text{curl}\,\mathbf{M}. \tag{10-6b}$$

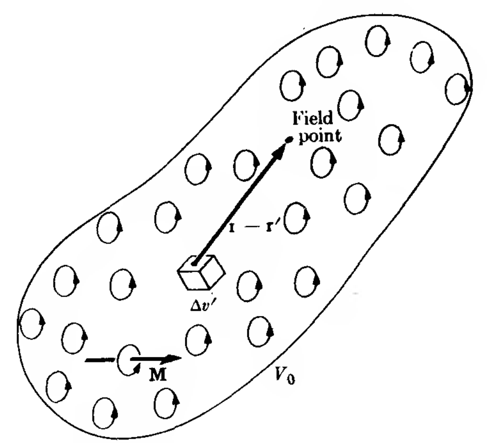
وهذا يعني أن كثافة تيار التمغنط تساوي إلتفاف التمغنط .

10-2 المجال المغناطيسي الناتج عن المادة الممغنطة :
The magnetic field produced by magnetized material

طبقاً لما جاء في المعادلة (10-1) فإنَّ كل عنصر حجمي $\Delta v'$ من المادة الممغنطة يميز بعزم مغناطيسي قدره :

$$\Delta \mathbf{m} = \mathbf{M}(x', y', z')\,\Delta v'. \tag{10-7}$$

وباستخدام نتائج البند 7-8 يمكننا أن نكتب المساهمة في المجال المغناطيسي عند النقطة (x, y, z) الناتجة عن كل $\Delta \mathbf{m}$ (أو بمعنى آخر عن كل عنصر حجمي $\Delta v'$) . وعندئذ يتم الحصول على المجال المغناطيسي باجراء التكامل على الحجم الكلي V_0 للمادة . والشكل (4-10) يشير الى هذا الأسلوب بشكل تخطيطي .



الشكل 4 ـ 10 مساهمة توزيع من مادة ممغنطة في الحث المغناطيسي

وبدلاً من أن نحسب B مباشرة نجد أنه من الملائم أن نتعامل مع الجهد المتجه A ومن ثم نحصل على المجال المغناطيسي بأخذ الإلتفاف . حسبما جاء في البند 7-8 يعطى الجهد المتجه عند نقطة (x, y, z) بموجب العلاقة

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\mathbf{M}(x', y', z') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M}(x', y', z') \times \mathbf{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \qquad (10\text{-}8)$$

وبالإمكان تحويل هذا التكامل باستخدام المتطابقتين (I-9) و (I-17) في الجدول (I-1) الى الآتي :

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\mathbf{curl}' \, \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da', \qquad (10\text{-}9)$$

إذ أن S_0 تمثل سطح الحجم V_0 . لكن كثافة تيار التمغنط السطحي $\mathbf{j}_M$ (ونعني بها تيار التمغنط الذي ينساب في الطبقة السطحية من المادة الممغنطة لوحدة الطول) تعرف حسب العلاقة

$$\mathbf{j}_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n}, \tag{10-10}$$

عندئذ يصبح بالإمكان إستخدام العلاقة (10-6b) وكتابة المعادلة (9-10) كالآتي

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}')\, dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\mathbf{j}_M\, da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{10-11}$$

ومما يبعث على السرور أننا إستطعنا أن نحصل على هذه العلاقة بأسلوب رياضي وبطريقة طبيعية . وبهذا نجد أن الجهد المتجه الناتج عن توزيع لتيارات ذرية داخل المادة له نفس هيئة الجهد الناتج عن توزيع لتيارات حقيقية إنتقالية . وينبغي أن نشير الى أن المعادلة (10-10) هي التعبير الملائم لكثافة التيار السطحي الذي ينسجم مع العلاقة

$$\mathbf{J}_M = \text{curl}'\, \mathbf{M}$$

ويجب إدخال الكمية $\mathbf{j}_M$ كلما يتغير التمغنط M بصورة مفاجئة كما يحدث عند السطح الفاصل بين وسطين . ولكنه اذا كانت المنطقة التي يحدث فيها الانقطاع في التمغنط منتشرة على مسافة قدرها $\Delta\xi$ ، لأمكن إثبات أن الكمية $\mathbf{j}_M$ تدخل ضمن الحد $\mathbf{J}_M \Delta\xi$.

وعلى الرغم من أن المعادلة (10-11) صحيحة وذات صيغة تنسجم مع نتائج الفصل الثامن ، إلا أنها لا تخلو من بعض الصعوبات العملية عندما يكون الهدف منها حساب الحث المغناطيسي من توزيع معين للتمغنط . أولاً يلزم إنجاز عملية الالتفاف $\text{curl}\,\mathbf{M}$ ، وثانياً هناك عملية إلتفاف أخرى ينبغي القيام بها للحصول على الحث المغناطيسي من المجال **A** . وبالتأكيد يكون من الأفضل التعامل مع كميات لا متجهة متى ماكان ذلك ممكناً ، كما أن حساب إنحدار مجال لا متجه (كالذي ورد في موضوع الكهربائية المستقرة) أسهل بكثير من حساب التفاف مجال متجه . ولهذا السبب سنعود الى العلاقة (10-8) ونحاول أن نستنبط أسلوباً آخر غير ذلك الاسلوب ، ومايهمنا في حقيقة الأمر هو المتجه **B** وليس المتجه **A** . ولهذا دعنا نجري عملية الالتفاف :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{curl}\,\mathbf{A}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \text{curl}\left[\mathbf{M} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\right] dv', \tag{10-12}$$

إذ أن عملية التفاضل في الإلتفاف تؤخذ بالنسبة للاحداثيات غير المؤشرة بعلامة (′)

وكما هو متوقع فإنَّ هدفنا الثاني هو تحويل الكمية المراد تكاملها في العلاقة (12-10) . ولتحقيق ذلك نعود الى المتطابقات الاتجاهية المدونة في الجدول . (1-1)

باستعمال المتطابقة (10-I) :

$$\mathbf{curl}\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}\,\text{div}\,\mathbf{b} - \mathbf{b}\,\text{div}\,\mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}.$$

وبالتعويض عن :

$$\mathbf{a} = \mathbf{M} \text{ and } \mathbf{b} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3,$$

وبملاحظة أن عملية التفاضل تؤخذ بالنسبة للاحداثيات غير المؤشرة بالعلامة (′) نجد أن المتطابقة تؤول الى الآتي :

$$\mathbf{curl}\left[\mathbf{M} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\right] = \mathbf{M}\,\text{div}\left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\right] - (\mathbf{M} \cdot \nabla)\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \tag{10–13}$$

وبما أن :

$$\text{div}\,\mathbf{M}(x', y', z') = 0,$$

ينتج :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_{\text{I}}(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_{\text{II}}(\mathbf{r}), \tag{10–14}$$

إذ أن :

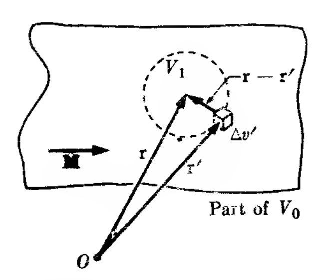
$$\mathbf{B}_{\text{I}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_0} \mathbf{M}\,\text{div}\left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\right] dv', \tag{10–14a}$$

$$\mathbf{B}_{\text{II}}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_0} (\mathbf{M} \cdot \nabla)\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\, dv'. \tag{10–14b}$$

لنأخذ التكامل الأول . ونرى أنه من الملائم تقسيم حجم المغناطيس V_0 الى منطقتين :

(1) منطقة كروية حجمها V_1 تحيط بالنقطة (x, y, z) ـ لاحظ الشكل (5-10) ،

(2) المنطقة المتبقية وحجمها $V_0 - V_1$.



الشكل 5-10 المساهمة الناشئة عن المنطقة المجاورة لنقطة مجال

عندئذ يمكن كتابة B_I كمجموع لتكاملين ، التكامل الأول يغطي الحجم V_1 والتكامل الثاني يغطي الحجم V_0-V_1 . لكن الحد الذي يحتوي على التباعد يتلاشى في كل مكان عدا النقطة $\mathbf{r'=r}$ ، وهذا يجعل التكامل الذي يغطي الحجم V_0-V_1 صفراً . لذا :

$$\mathbf{B}_I(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_1} \mathbf{M}\ \mathrm{div}\left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right]dv'$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_1} \mathbf{M}\ \mathrm{div}'\left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right]dv'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_1} \mathbf{M}\ \mathrm{div}'\ (\mathbf{s}/s^3)\ dv',$$

إذ أن :

$$\mathbf{s} \equiv \mathbf{r}' - \mathbf{r}$$

إن حجم V_1 لم يحدد ، فكل مايطلب هو أن يحتوي هذا الحجم على النقطة $s=0$. فاذا ما تم إختيار الحجم صغيراً لأمكن إعتبار المتجه $\mathbf{M}$ كمية ثابتة خلال كل الحجم V_1 ومساوية $\mathbf{M}(x,y,z)$. لذا :

$$\mathbf{B}_I(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{M}(\mathbf{r})\int_{V_1} \mathrm{div}'\ (\mathbf{s}/s^3)\ dv'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{M}(\mathbf{r})\int_{S_1} \frac{\mathbf{s}\cdot\mathbf{n}}{s^3}\ da'$$

$$= \mu_0\mathbf{M}(\mathbf{r}). \tag{10-15}$$

والآن نتناول التكامل الثاني ونحاول أن نجد B_{II} . يمكننا تحويل الكمية المطلوب تكاملها باستخدامها المتطابقة (I-5) التي ستأخذ الصيغة الآتية

$$\nabla\left[\mathbf{M}\cdot\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right]=(\mathbf{M}\cdot\nabla)\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}+\mathbf{M}\times\mathbf{curl}\left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right]. \tag{10-16}$$

والحد الأخير في هذه المعادلة يحتوي على :

$$\mathbf{curl}\left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right]=-\mathbf{curl\ grad}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

والتي تتلاشى بالتماثل . لذا :

$$\mathbf{B}_{II}(\mathbf{r})=-\mu_0\nabla\frac{1}{4\pi}\int_{V_0}\mathbf{M}(\mathbf{r}')\cdot\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dv',$$

والتي يمكن كتابتها كالآتي :

$$\mathbf{B}_{II}(\mathbf{r})=-\mu_0\nabla U^*(\mathbf{r}). \tag{10-17}$$

الكمية $U^*(r)$ تمثل مجالاً لا متجهاً ، وسندعوها الجهد المغناطيسي اللامتجه الناشيء عن المادة المغناطيسية :

$$U^*(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi}\int_{V_0}\mathbf{M}(\mathbf{r}')\cdot\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dv'. \tag{10-18}$$

وبجمع المعادلتين (10-15) و (10-17) نحصل على مجال الحث المغناطيسي :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=-\mu_0\nabla U^*(\mathbf{r})+\mu_0\mathbf{M}(\mathbf{r}). \tag{10-19}$$

وبهذا نجد أنه بالامكان التعبير عن الحث المغناطيسي الناشيء عن توزيع لمادة ممغنطة كمجموع لحدين : إنحدار لمجال لا متجه زائداً حداً يتناسب مع التمغنط الموضعي . عند نقطة خارجية (في الفراغ) تصبح **M** صفراً ، وبهذا يصبح الحث المغناطيسي مساوياً لانحدار المجال اللامتجه .

10-3 الجهد المغناطيسي اللامتجه وكثافة القطب المغناطيسي :
Magnetic scalar potential and magnetic pole density

إن التعبير عن الجهد المغناطيسي اللامتجه المتمثل بالمعادلة (10-18) يشابه هيئة الجهد الكهروستاتيكي الناتج عن مادة عازلة مستقطبة . وهنا أيضاً نقترح إجراء التحويلات الرياضية :

$$\frac{\mathbf{M}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}=\mathbf{M}\cdot\mathrm{grad}'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$
$$=\mathrm{div}'\frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}-\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{div}'\,\mathbf{M}, \qquad (10\text{–}20)$$

وبهذا تصبح المعادلة (10-18) بالشكل الآتي :

$$U^*(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\frac{\mathbf{M}\cdot\mathbf{n}\,da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}-\frac{1}{4\pi}\int_{V_0}\frac{\mathrm{div}'\,\mathbf{M}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv', \qquad (10\text{–}21)$$

اذ تمثل S_0 السطح الذي يحيط بالمنطقة V_0 .

وعلى ضوء التناظر مع البند (2-4) نرى أنه من الملائم أن نعرف كميتين لا متجهتين هما :

$$\rho_M(\mathbf{r}')\equiv-\mathrm{div}'\,\mathbf{M}(\mathbf{r}'), \qquad (10\text{–}22)$$

وتدعى كثافة القطب المغناطيسي ، والكمية :

$$\sigma_M(\mathbf{r}')\equiv\mathbf{M}(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{n}, \qquad (10\text{–}23)$$

وتدعى الكثافة السطحية لشدة القطب المغناطيسي . هاتان الكميتان مفيدتان جداً ، وتلعبان الدور نفسه في النظرية المغناطيسية الذي تلعبه الكميتان ρ_P و σ_P في نظرية العوازل . وحدة كثافة القطب المغناطيسي هي أمبير/ متر مربع ، أما وحدة الكثافة السطحية لشدة القطب فهي أمبير/ متر .

خذ على سبيل المثال قضيباً مغناطيسياً منتظم التمغنط . ولما كان التمغنط منتظماً فإن $\rho_M=0$. والكثافات السطحية الوحيدة التي لا تتلاشى هي التي تتوزع على تلك السطوح التي تكون لها مركبة عمودية للتمغنط . هذه السطوح تدعى أقطاب المغناطيس . وعلى الرغم من أن هذا المثال يمثل حالة مثالية نوعاً ما ، إلا أنه لا يختلف كثيراً عن القضيب المغناطيسي المستعمل في المختبرات . (الواقع انه لقطبي المغناطيس تأثير على إزالة المغناطيسية ، وهذا التأثير يقضي على إنتظام التمغنط مما يؤدي الى إنتشار كل قطب على منطقة أكبر نوعاً ما من المنطقة السطحية) .

إن شدة القطب الكلية لكل مغناطيس تساوي صفراً . وهذا النص يمكن إستنتاجه من نظرية التباعد بصورة مباشرة :

$$\int_{V_0} (-\text{div}\,\mathbf{M})\,dv + \int_{S_0} \mathbf{M}\cdot\mathbf{n}\,da = 0.$$

والآن سنكمل الاشتقاق الذي بدأناه . المعادلة (18-10) تأخذ الشكل الآتي

$$U^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V_0} \frac{\rho_M\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi}\int_{S_0} \frac{\sigma_M\,da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad \text{(10–18a)}$$

ويمكن الحصول على $\mathbf{B}(x, y, z)$ من ضرب $(-\mu_0)$ في الانحدار نسبة الى الاحداثيات غير المؤشرة بالعلامة (′) زائداً الكمية $\mu_0\mathbf{M}$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_0} \rho_M \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dv' + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S_0} \sigma_M \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}da' + \mu_0\mathbf{M}(\mathbf{r}). \qquad \text{(10–19a)}$$

وهذه المعادلة تمثل مساهمة المادة الممغنطة داخل V_0 في قيمة الحث المغناطيسي عند النقطة (x, y, z) .

10–4 مصادر المجال المغناطيسي . الشدة المغناطيسية :
Sources of the magnetic field. Magnetic intensity

رأينا في البنود السابقة كيف تولد المادة الممغنطة مجالاً مغناطيسياً . وفضلاً عن ذلك ناقشنا في الفصل الثامن المجالات المغناطيسية الناشئة عن التيارات الكهربائية الحقيقية . وعموماً يوجد نوعان من المصادر المغناطيسية : النوع الاول ينشأ عن التيارات الحقيقية التي يمكن قياسها في المختبر ، والنوع الثاني ينشأ عن التيارات الذرية داخل المادة . ومن المهم أن يدرك المرء أنه في ظل ظروف معينة قد تولد قطعة من مادة معينة مجالاً مغناطيسياً سواءً لكونها ممغنطة أم لأنها تحمل تياراً حقيقياً . فالحديد على سبيل المثال ، وهو واحد من أحسن المواد المغناطيسية ، قد يكون حاملاً لتيار حقيقي متكون من الألكترونات الطليقة ، ومع ذلك فإن أيونات الحديد المثبتة في التركيب البلوري تحتوي على تيارات ذرية يمكن توجيهها بحيث تولد تمغنطاً قوياً .

وعموماً يمكن كتابة المعادلة المعبرة عن المجال المغناطيسي بالشكل الآتي :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dv' - \mu_0\nabla U^*(\mathbf{r}) + \mu_0\mathbf{M}(\mathbf{r}), \qquad \text{(10–24)}$$

إذ أن

$$U^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho_M\, dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\sigma_M\, da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (10\text{–}25)$$

الحجم V يشمل جميع المناطق الحاملة للتيار ويغطي المادة بأجمعها . والسطح S يشمل جميع السطوح وكذلك السطوح الكائنة بين الاوساط المختلفة . أما كثافة التيار **J** فتشمل جميع التيارات الحقيقية الناشئة عن انتقال الشحنات المختلفة . على حين نجد أن تأثير التيارات الذرية يتمثل في متجه التمغنط **M** .

ويمكن حل المعادلة (24–10) لايجاد الحث المغناطيسي فيما اذا حددت قيمة المتجهين **M** و **J** عند جميع النقاط . في معظم المسائل يحدد متجه كثافة التيار ، بيد ان متجه التمغنط **M** (x́,ý,ź) يعتمد على **B** (x́,ý,ź). ولهذا نجد ، حتى اذا عرفت صيغة الدالة **M(B)** ، ان المعادلة (24–10) تمثل في احسن الاحوال معادلة تكاملية للمتجه **B**. وللتغلب على هذه الصعوبة ندخل متجهاً مغناطيسياً مساعداً يدعى الشدة المغناطيسي **H** ويعرف وفقاً للعلاقة :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}. \qquad (10\text{–}26)$$

وبدمج المعادلتين (24–10) و (26–10) نحصل على :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, dv - \nabla U^*(\mathbf{r}). \qquad (10\text{–}27)$$

وهنا يظهر أننا لم نجنِ شيئاً من جراء هذه المناورة ، وسبب ذلك هو أن المتجه **H** لازال يعتمد على المتجه **M** من خلال ρ_M و σ_M . ولكننا سنبين في البند القادم كيف يرتبط المتجه **H** بكثافة التيار الحقيقية **J** من خلال معادلة تفاضلية . هذه الحالة تشبه الحالة الكهروستاتيكية ، حيث يكون المتجه المساعد **D** مرتبطاً بكثافة الشحنة الحرة من خلال تباعد الازاحة .

يلعب متجه المجال **H** دوراً مهماً في النظرية المغناطيسية ، وبصورة خاصة في المسائل التي تتضمن مغانط دائمية . وسنتناول هذه الامور في بنود أخرى من هذا الفصل . ووحدة الشدة المغناطيسية هي وحدة التمغنط نفسها وعلى وجه التحديد أمبير / متر .

10-5 معادلات المجال The field equations

عبرنا في الفصل الثامن عن المعادلات الاساسية التي تصف التأثيرات المغناطيسية للتيارات التقليدية بصيغ تفاضلية :

$$\text{div}\,\mathbf{B} = 0, \qquad \textbf{curl}\,\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}.$$

والآن سنرى كيف تعدل هذه المعادلات عندما تساهم مادة ممغنطة في تكوين المجال المغناطيسي **B** .

لاشك أن القاريء يتذكر أن معادلة التباعد $(\text{div}\,\mathbf{B} = 0)$ نشأت بسبب امكانية كتابة المتجه **B** كالتفاف للدالة المتجهة **A** . لكن هذه النتيجة غير مقتصرة على المجالات المغناطيسية الناتجة عن التيارات الحقيقية . المجال المغناطيسي الناتج عن المادة الممغنطة يمكن اشتقاقه أيضاً من جهد متجه . والحقيقة ان هذا الاسلوب سبق ان استعملناه في البند (2-10) . وبهذا يمكننا دائماً أن نكتب المتجه **B** بصيغة **curlA** وعندئذ تكون معادلة التباعد :

$$\text{div}\,\mathbf{B} = 0. \tag{10-28}$$

ذات صفة عامة بحكم الضرورة .

إن ''معادلة الإلتفاف'' هي الصيغة التفاضلية لقانون أمبير . وهنا يجب علينا ان نكون حذرين لنشمل جميع أنواع التيارات التي يمكنها أن تولّد مجالاً مغناطيسياً . لذا يكون من الافضل ان نكتب هذه المعادلة بصيغة عامة هي :

$$\textbf{curl}\,\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}_M), \tag{10-29}$$

إذ ان **J** هي كثافة التيار الحقيقي و $\mathbf{J}_\mathbf{M}$ هي كثافة تيار التمغنط . وبالامكان دمج هذه المعادلة بالعلاقة (10-6b) لنحصل على :

$$\textbf{curl}\left(\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}\right) = \mathbf{J},$$

وحسبما جاء في العلاقة (26-10) فإن هذه المعادلة تكافيء الصيغة الآتية :

$$\textbf{curl}\,\mathbf{H} = \mathbf{J}. \tag{10-30}$$

وبهذا نجد أن المتجه المغناطيسي المساعد **H** يرتبط بكثافة التيار الحقيقي من خلال إلتفافه .

المعادلتان (28-10) و (30-10) هما معادلتان أساسيتان للمجال المغناطيسي . واستخدام هاتين المعادلتين مع شروط حدود ملائمة ومع علاقة تجريبية بين **B** و **H** يكفي لحل المعضلات المغناطيسية . وقد يكون من المفضل في بعض الأحيان أن تستعمل صيغة تكاملية لهذه النظرية . وبمساعدة نظرية ستوكس يمكن تحوير العلاقة (30-10) الى الآتي :

$$\int_S \operatorname{curl} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}\, da = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, da,$$

أو

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I. \qquad (10\text{–}31)$$

وهذا يعني أن التكامل الخطي للمركبة المماسة للشدة المغناطيسية حول مسار مغلق C يساوي التيار الكلي الذي ينتقل خلال المساحة المحاطة بالمنحني C .

وبتطبيق نظرية التباعد نجد أن المعادلة (28-10) تكافيء العلاقة :

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, da = 0. \qquad (10\text{–}32)$$

أي أن الفيض المغناطيسي خلال أي سطح مغلق يساوي صفراً .

10-6 التأثرية المغناطيسية والنفوذية . التخلف المغناطيسي :
Magnetic susceptibility and permeability. Hysteresis

لكي نستطيع حل المسائل والمعضلات في النظرية المغناطيسية ، من الضروري أن تتوفر لدينا علاقة بين **M** و **H** ، أو بين **M** وأحد متجهات المجال المغناطيسي . هذه العلاقات تعتمد على طبيعة المادة المغناطيسية ، ونحصل عليها عادة من التجربة .

إن العلاقة بين **M** و **H** تكون علاقة خطية تقريباً لصنف واسع من المواد . فإذا كانت المادة متساوية الاتجاه وخطية* لأصبح بالإمكان كتابة هذه العلاقة كالآتي :

---

* اذا كانت المادة غير متساوية الاتجاه ، لوجب إستبدال المعادلة (33-10) بالعلاقة الممتدة

$$M_x = \chi_{m,11}H_x + \chi_{m,12}H_y + \chi_{m,13}H_z,$$

وهلم جرا . وتحت هذه الظروف لم يعد من الضروري أن تكون **M** بنفس إتجاه **H** . بيد أن أننا سنقتصر في هذا الكتاب على المواد متساوية الاتجاه فقط .

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \tag{10-33}$$

حيث تدعى الكمية χ_m التأثرية المغناطيسية (أو قابلية التمغنط) وهي كمية لا متجهة ولا تحمل وحدة قياس . فاذا كانت التأثرية المغناطيسية موجبة دعيت المادة بارامغناطيسية ، ووجود هذه المادة يؤدي الى تقوية الحث المغناطيسي . أما اذا كانت التأثرية المغناطيسية سالبة ، سميت المادة دايا مغناطيسية ، ووجود هذه المادة يؤدي الى ضعف الحث المغناطيسي . وعلى الرغم من أن التأثرية المغناطيسية تعد دالة لدرجة الحرارة ، وأحياناً يكون تغيرها فجائياً اذا تغيرت درجة الحرارة ، يمكننا القول بصورة عامة إنَّ التأثرية المغناطيسية للمواد البارامغناطيسية والدايامغناطيسية صغيرة جداً من حيث القيمة ، أي ان

$$|\chi_m| \ll 1 \tag{10-34}$$

للمواد البارامغناطيسية والدايامغناطيسية .

قيم التأثرية المغناطيسية لعدد من المواد الشائعة معطاة في الجدول (1-10) .

ومما تجدر الإشارة إليه هو أن معظم الكتب المختصة في إعطاء الثوابت والبيانات الفيزيائية لا تدرج قيم التأثرية المغناطيسية بصورة مباشرة ، إنما تعطي قيم التأثرية المغناطيسية الكتلية mass susceptibility (ورمزها $\chi_{m,\,mass}$) ، أو قيم التأثرية المغناطيسية الجزيئية molar susceptibility (ورمزها $\chi_{m,\,molar}$) . وهذه القيم تعرف كالآتي :

$$\chi_m = \chi_{m,\mathrm{mass}}\, d, \tag{10-35}$$

$$\chi_m = \chi_{m,\mathrm{molar}} \frac{d}{A}, \tag{10-36}$$

إذ أن d تمثل الكثافة الكتلية للمادة و A الوزن الجزيئي . وبما أن كل الكميتين **M** و **H** تمتلكان أبعاد العزم المغناطيسي لوحدة الحجم ، يصبح واضحاً أن الكميتين **H** $\chi_{m,\,mass}$ و **H** $\chi_{m,\,mole}$ تعطيان العزم المغناطيسي لوحدة الكتلة والعزم المغناطيسي للمول الواحد على الترتيب . ولقد وجدنا من الملائم أن ندرج أيضاً قيم التأثرية المغناطيسية الكتلية لعدد من المواد الشائعة في الجدول (1-10) .

الجدول **1-10**

التأثرية المغناطيسية لعدد من المواد البارامغناطيسية والدايامغناطيسية في درجة حرارة الغرفة .

Material	χ_m	$\chi_{m,\text{mass}}$, m^3/kgm
Aluminum	2.3×10^{-5}	0.82×10^{-8}
Bismuth	-1.66×10^{-5}	-1.70×10^{-8}
Copper	-0.98×10^{-5}	-0.11×10^{-8}
Diamond	-2.2×10^{-5}	-0.62×10^{-8}
Gadolinium chloride ($GdCl_3$)	276.0×10^{-5}	114.0×10^{-8}
Gold	-3.6×10^{-5}	-0.19×10^{-8}
Magnesium	1.2×10^{-5}	0.69×10^{-8}
Mercury	-3.2×10^{-5}	-0.24×10^{-8}
Silver	-2.6×10^{-5}	-0.25×10^{-8}
Sodium	-0.24×10^{-5}	-0.25×10^{-8}
Titanium	7.06×10^{-5}	1.57×10^{-8}
Tungsten	6.8×10^{-5}	0.35×10^{-8}
Carbon dioxide (1 atm)	-0.99×10^{-8}	-0.53×10^{-8}
Hydrogen (1 atm)	-0.21×10^{-8}	-2.47×10^{-8}
Nitrogen (1 atm)	-0.50×10^{-8}	-0.43×10^{-8}
Oxygen (1 atm)	209.0×10^{-8}	155.0×10^{-8}

العلاقة الخطية بين الكميتين **M** و **H** تدل ضمناً على أن العلاقة بين **B** و **H** هي علاقة خطية أيضاً :

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \tag{10-37}$$

حيث يمكن الحصول على النفوذية μ من دمج المعادلتين (26-10) و (33-10) :

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m). \tag{10-38}$$

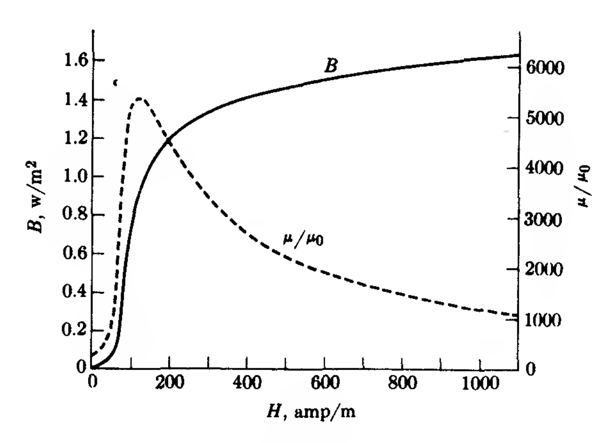
وفي بعض الأحيان تعطى الكمية :

$$K_m = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m \tag{10-39}$$

بدلاً من النفوذية . وتدعى هذه الكمية ورمزها K_m النفوذية النسبية وهي بدون وحدة . ويتضح من الجدول (1-10) أن قيمة النفوذية النسبية للمواد البارامغناطيسية والدايامغناطيسية قريبة جداً من الواحد .

والمواد الفيرومغناطيسية تشكل صنفاً آخر من المواد المغناطيسية . تتميز هذه المواد بقدرتها على اكتساب تمغنط دائمي وكذلك بتأثيرها الشديد على الحث المغناطيسي . المواد الفيرومغناطيسية ليست خطية ، ولهذا السبب لا يصح تطبيق المعادلتين (33-10) و (37-10) اللتين تكون الكميتان χ و μ فيهما ثابتتين . ومع ذلك فانه من الملائم ان نستخدم العلاقة (37-10) كمعادلة لتعريف النفوذية حتى إذا كانت دالة للشدة المغناطيسية ، أي $\mu = \mu(\mathbf{H})$. ولكنه ينبغي على القاريء أن يكون حذراً ، إذ أن ممارسة هذا النهج ربما يقود الى صعوبات في حالات معينة . فاذا ما تم تعريف النفوذية وفقاً للمعادلة (37-10), ، فإنها (بالاعتماد على **H**) تأخذ مدى كاملاً من القيم التي تمتد من مالانهاية حتى الصفر ، وقد تكون هذه القيم موجبة أو سالبة . وأحسن نصيحة تعطى بهذا الخصوص هي أن تعالج كل مسألة تتضمن الظاهرة الفيرومغناطيسية بشكل مستقل ، وأن تعين المنطقة المهمة على المنحني B-H حسب المسألة المعنية . وأن تجرى التقريبات التي تلائم تلك المنطقة .

قبل كل شيء دعنا نأخذ عينة غير ممغنطة من مادة فيرومغناطيسية . فإذا زيدت الشدة المغناطيسية إبتداءً من الصفر بصورة مطردة ، لحصلنا على منحنٍ شبيه بالمنحني B-H المبين في الشكل (6-10) ، وهو مايدعى بمنحني التمغنط للمادة . وعند ذلك يتضح أن قيم النفوذية المستمدة من منحني التمغنط باستخدام العلاقة $\mu = B/H$ تكون جميعها موجبة ، ولكنها تغطي طيفاً واسعاً من القيم . وتحدث ذروة النفوذية عند مايسمى "بركبة" المنحني . وقد تصل القيمة القصوى



الشكل 6-10 منحني التمغنط والنفوذية النسبية للحديد الصلب

للنفوذية ما يعادل $10^5 \mu_0$ لبعض المواد. ولكن قيمتها لمواد أخرى تكون أصغر بكثير من تلك القيمة . وسبب وجود هذه ''الركبة'' في المنحني هو أن التمغنط **M** يصل الى القيمة القصوى في المادة ، وأن

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

تستمر في الزيادة عند القيم الكبيرة لشدة المجال المغناطيسي **H** فقط بسبب الحد $\mu_0\mathbf{H}$. القيمة القصوى للتمغنط تدعى تمغنط الإشباع للمادة .

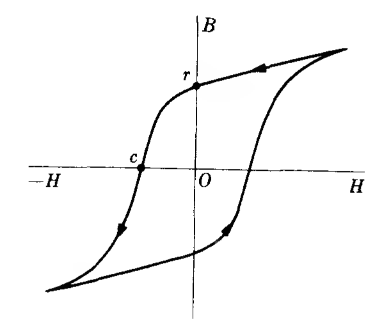
الجدول 2-10

خواص المواد الفيرومغناطيسية في درجة حرارة الغرفة

$\mathbf{M_s}$ = تمغنط الإشباع .
$\mathbf{H_s}$ = شدة المجال المغناطيسي اللازم لحدوث الإشباع .
$\mathbf{H_c}$ = الحفاظية
$\mathbf{B_r}$ = المغناطيسية المتبقية .

Material	Composition, %	$\mu_0 M_s$, w/m²	H_s, amp/m	K_m, maximum
Iron (annealed)		2.16	1.6×10^5	5,500
Cobalt		1.79	7.0×10^5	
Nickel		0.61	5.5×10^5	
ALLOYS			H_c amp/m	
Iron-silicon	96 Fe, 4 Si	1.95	24	7,000
Permalloy	55 Fe, 45 Ni	1.60	24	25,000
Mumetal	5 Cu, 2 Cr, 77 Ni, 16 Fe	0.65	4	100,000
Permendur	50 Co, 50 Fe	2.40	16	5,000
Mn-Zn ferrite	$Mn_xZn_{(1-x)}Fe_2O_4$	0.34	16	2,500
Ni-Zn ferrite	$Ni_xZn_{(1-x)}Fe_2O_4$	0.37	30	2,500
		B_r w/m²		
Cobalt steel	52 Fe, 36 Co, 7W, 3.5 Cr, 0.7 C	0.95	18×10^3	
Alnico V	51 Fe, 8 Al, 14 Ni 24 Co, 3 Cu	1.25	44×10^3	

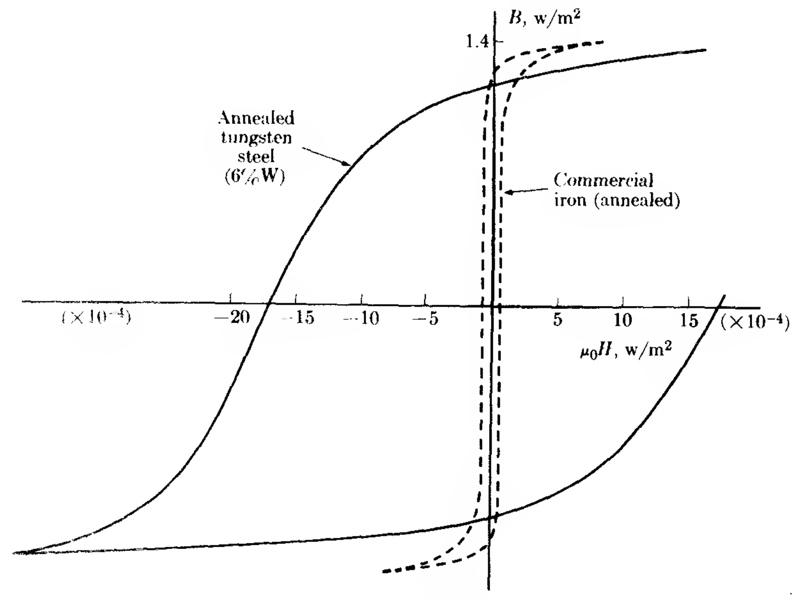
بعد ذلك نأخذ عينة فيرومغناطيسية ممغنطة بالطريقة المذكورة في أعلاه . فإذا انقصت الشدة المغناطيسية **H** ، لوجدنا أن العلاقة B-H لن تتبع المنحني المبين في الشكل (6-10) بالاتجاه الخلفي ، إنما تتبع مساراً جديداً حتى نقطة r كما هو موضح في الشكل (7-10) . وهذا يدل على أن تمغنط هذه العينة الفيرومغناطيسية لن يختفي (بعد أن تتمغنط) بازالة المجال الممغنط **H** . والحقيقة إن ازالة التمغنط كلياً يتطلب تسليط قدر معين من شدة المجال المغناطيسي بالإتجاه المعاكس . فإذا استمرت **H** بالازدياد بالاتجاه المعاكس لأكتسبت العينة تمغنطاً **M** بالاتجاه المعاكس ، وعند ذلك يبدأ التماثل في الظهور على الشكل (7-10) . وأخيراً إذا انقصت **H** مرة أخرى لرأينا أن العلاقة تتبع الجزء السفلي من المنحني المبين في الشكل . وبهذا نجد أن المنحني B-H الناتج عن زيادة **H** يختلف كلياً عن شكل المنحني الناشيء عن نقصان **H** . هذه الظاهرة تدعى التخلف المغناطيسي hysteresis . وهذه التسمية مستمدة من كلمة إغريقية تعني ''يتأخر عن'' ، وفعلاً يتأخر التمغنط عن المجال الممغنط .



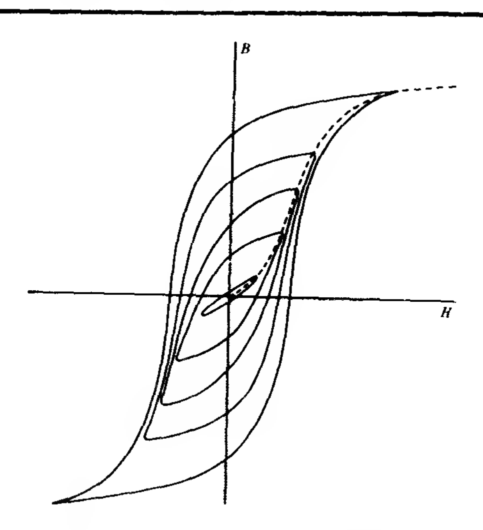
الشكل 7-10 دورة نموذجية للتخلف المغناطيسي في مادة فيرومغناطيسية .

المنحني المبين في الشكل (7-10) يدعى دورة التخلف المغناطيسي للمادة . وقيمة **B** عند نقطة r تدعى المغناطيسية المتبقية retentivity . ومقدار **H** عند نقطة c يدعى الحفاظية coercivity للمادة . ويتضح من الشكل (7-10) أن قيمة μ طبقاً للمعادلة (37-10) تكون سالبة في الربع الثاني والرابع من الشكل . ان شكل دورة التخلف لايعتمد على طبيعة المادة الفيرومغناطيسية (الشكل 8-10) فحسب ، بل يعتمد أيضاً على القيمة العظمى للكمية **H** التي تعرضت اليها المادة

(الشكل 9-10) . ولكن حالما تكون H_{max} كافية لتوليد الاشباع في المادة ، لايحدث تغير في شكل دورة التخلف عند زيادة H_{max} .



الشكل **10-8** مقارنة بين منحنيات التخلف لبضعة مواد . (لاحظ ان $\mu_0 H$ قد مثلت الاحداثي الافقي بدلاً من **H** ، و $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ بوحدات النظام المتري) .



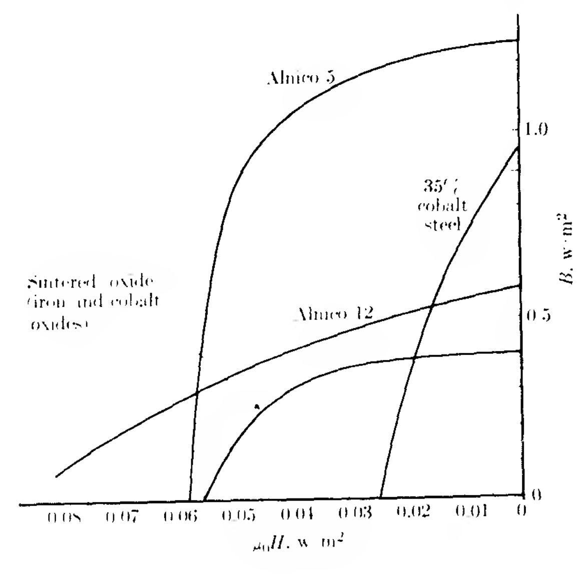
الشكل **10-9** دورة التخلف المغناطيسي الرئيسة وعدد من الدورات الثانوية للتخلف لمادة نموذجية

من الامور التي ينبغي معرفتها في بعض التطبيقات هي النفوذية الفعالة للمادة عند حدوث تغيرات دورية صغيرة في شدة المجال المغناطيسي **H** بالاضافة الى المجال المغناطيسي الكبير الثابت . فاذا كان ΔB هو التغير في المجال المغناطيسي الناتج عن تغير في الشدة المغناطيسية قدرها ΔH ، لأمكننا تعريف النفوذية التزايدية incremental حسب العلاقة :

$$\mu_{\text{in}} = \frac{\Delta B}{\Delta H}, \tag{10-40}$$

وهذه القيمة تساوي تقريباً ميل منحني التخلف المغناطيسي الذي يمر خلال النقطة المعنية .

تستعمل المواد الفيرومغناطيسية لأحد أمرين : اما لزيادة الفيض المغناطيسي في دائرة كهربائية ، اوكمصدر للمجال المغناطيسي (ونعني بذلك المغانط الدائمية) ولتوليد المغناطيس الدائمي تمغنط المادة أولاً الى حد الاشباع وذلك بوضعها في مجال مغناطيسي قوي (أي بوضعها بين قطبي مغناطيس كهربائي أو بوضعها داخل ملف حلزوني يمرر فيه تيار كبير خاطف) . ولكنه ، عند سحب المغناطيس الدائمي من المجال الخارجي ، سيتعرض الى مجال مزيل للتمغنط . هذه النقطة ستناقش بالتفصيل في البندين (10-10) و (10-11) . ولهذا فان الربع الثاني من دورة التخلف المغناطيسي هو الجزء المهم من العلاقة B-H لمادة المغناطيس الدائمي .



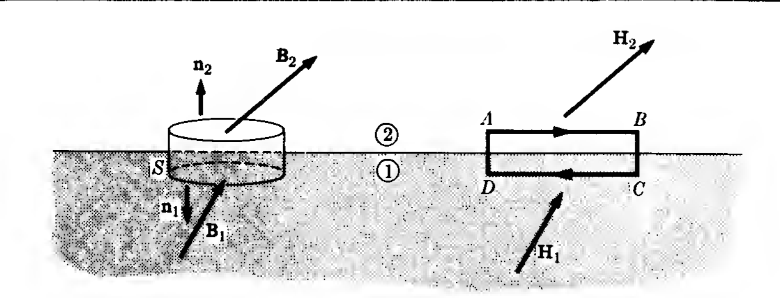
الشكل **10-10** منحنيات التخلف لمواد المغناطيس الدائمي . (لاحظ ان μ_0 **H** قد رسمت على الاحداثي الافقي بدلاً من **H**) .

7 ـ 10 تطبيق شروط الحدود على متجهات المجال
Boundary conditions on the field vectors

قبل أن يصبح بوسعنا حل المسائل المغناطيسية ، حتى البسيطة منها ، يجب ان نعرف كيف تتغير متجهات المجال المغناطيسي **B** و **H** عند اجتياز السطح الفاصل بين وسطين . والسطح الفاصل الذي سنأخذه بعين الاعتبار اما ان يكون بين وسطين مختلفين في خواصها المغناطيسية أو بين وسط مادي والفراغ .

خذ الوسطين المتلامسين 1 و 2 كما هو موضح في الشكل 11-10 . دعنا نشيد سطحاً بشكل علبة أقراص S بحيث يقطع السطح الفاصل ، وعلى ان يكون ارتفاع العلبة صغيراً جداً بالمقارنة مع قطر قاعدتي العلبة . وباستخدام تكامل الفيض المتمثل بالمعادلة (32-10) على السطح S نجد أن :

$$\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \, \Delta S + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \, \Delta S = 0,$$



الشكل 11-10 شروط الحدود لمتجهات المجال عند السطح الفاصل بين وسطين يمكن الحصول عليها باستخدام قانون كاوس على السطح S ، ثم بأخذ التكامل **H.dl** حول المسار **ABCDA** .

اذ ان n_2 و n_1 يمثلان العمودين المقامين (بالاتجاه الخارجي) على السطحين العلوي والسفلي لعلبة الاقراص على الترتيب . وبما أن $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ ، وأن كلاً من هذين العمودين يمكن أن يمثل العمود المقام على السطح الفاصل ، لذا :

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \qquad (10\text{–}41a)$$

$$\mathbf{B}_{2n} - \mathbf{B}_{1n} = 0. \qquad (10\text{–}41b)$$

وهذا يعني ان المركبة العمودية للحث المغناطيسي تكون متصلة عبر السطح الفاصل بين وسطين .

كما يمكننا الحصول على شرط الحدود للمجال **H** بتطبيق قانون أمبير المتمثل في المعادلة (31–10) على المسار المغلق (المستطيل الشكل) ABCDA المبين في الشكل (11–10) . سنفرض ان طول كل من ضلعي المسار AB و CD يساوي $\Delta \mathbf{l}$ ، وأن طول كل من الضلعين AD و BC صغير جداً بحيث يمكن اهماله . ويهمل التيار المار خلال المستطيل عادة مالم يكن هناك تيار سطحي حقيقي . لذا :

$$\mathbf{H}_2 \cdot \Delta\mathbf{l} + \mathbf{H}_1 \cdot (-\Delta\mathbf{l}) = |\mathbf{j}_s \times \Delta\mathbf{l}|, \tag{10–42a}$$

أو

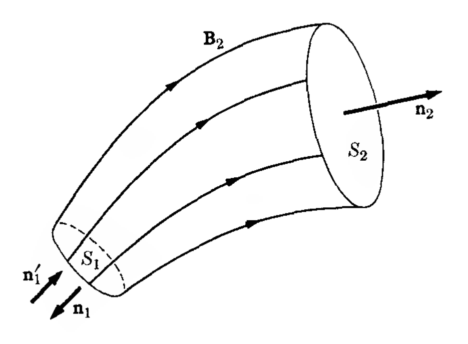
$$H_{2t} - H_{1t} = |\mathbf{j}_s \times \mathbf{l}_0|, \tag{10–42b}$$

اذ ان $\mathbf{j}_s$ تمثل كثافة التيار السطحي (التيار المنتقل لوحدة الطول من الطبقة السطحية) ، و $\mathbf{l}_0$ وحدة المتجه باتجاه $\Delta \mathbf{l}$. وبهذا نجد أن المركبة المماسة لشدة المجال المغناطيسي تكون متصلة عبر السطح الفاصل بين وسطين مالم يكن هناك تيار سطحي حقيقي . وأخيراً ، بما ان المعادلة (42 ـ 10)تصح لأي جزء $\Delta\mathbf{l}$ من المسار ، موازٍ للسطح الفاصل ، فان هذه المعادلة يمكن ان تكتب بالشكل الآتي :

$$\mathbf{n}_2 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j}_s. \tag{10–42c}$$

وقبل أن نكمل هذا البند ، سنبرهن خاصية مهمة أخرى للحث المغناطيسي ، وهي أن الفيض المغناطيسي يكون متصلاً في كل مكان . دعنا نركز إهتمامنا على منطقة في الفضاء ، ونرسم خطوط المجال المغناطيسي ، وهي خطوط وهمية مرسومة بطريقة بحيث أن إتجاه كل خط عند أية نقطة هو إتجاه الحث المغناطيسي عند تلك النقطة . ثم نتصور أنبوبة من الفيض محاطة من جوانبها بخطوط الحث المغناطيسي دون أن تتقاطع معها (لاحظ الشكل 12–10) . والسطحان S_1 و S_2 يمثلان نهايتي الحجم الأنبوبي . وبتطبيق نظرية التباعد نحصل على

$$\begin{aligned}\int_V \operatorname{div} \mathbf{B}\, dv &= 0\\ &= \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, da - \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}'\, da\\ &= \Phi(S_2) - \Phi(S_1).\end{aligned} \tag{10–43}$$



الشكل 12-10 أنبوبة حث مغناطيسي

وبهذا نجد أن الفيض المغناطيسي الذي يدخل الانبوبة خلال السطح S_1 هو نفسه الذي يخرج من السطح S_2 . وخطوط الفيض لا تنتهي أبداً إنما تتصل في نهاية المطاف مع نفسها مشكلة خطوطاً مغلقة .

إن النصوص السابقة تنطبق بطبيعة الحال على الحث المغناطيسي $\mathbf{B}$ ، الا أنها لا تصح لشدة المجال $\mathbf{H}$ ، وسبب ذلك هو أن

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = -\operatorname{div} \mathbf{M},$$

وهذه الكمية لا تساوي صفراً في كل مكان . لذا نجد عند تطبيق نظرية التباعد على انبوبة حث مغناطيسي أن :

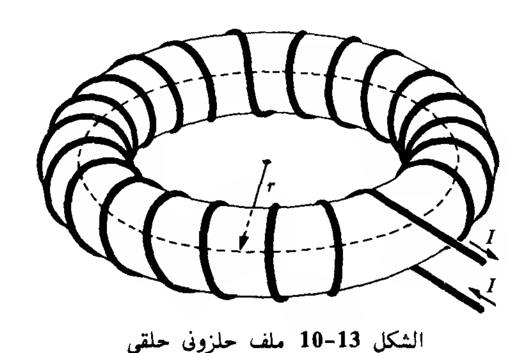
$$\int_{S_1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}\, da - \int_{S_2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}'\, da = \int_V \rho_M\, dv. \tag{10-44}$$

والانقطاع الحاصل في فيض شدة المجال المغناطيسي يعين بواسطة شدة القطب المغناطيسي الكلية المحصور داخل انبوبة الفيض .

10-8 دوائر التيار الكهربائية التي تحتوي على أوساط مغناطيسية :
Current circuits containing magnetic media

تعاملنا في الفصل الثامن مع المجالات المغناطيسية الناشئة عن الدوائر الكهربائية في الفراغ . ومن الأمثلة التي اعتمدناها في المسائل (المسألة 15-8) هو

الملف الحلزوني الحلقي المنتظم اللفات والذي يحمل تياراً قدره I (لاحظ الشكل 13-10) .



الشكل 13-10 ملف حلزوني حلقي

دعنا نحل مسألة الملف الحلزوني الحلقي مرة ثانية ، ولكن الملف في هذه المرة قد لُف على مادة فيرومغناطيسية سنفترض أنها متجانسة ومتساوية الاتجاه وغير ممغنطة في الأصل . إن اسهل متجه مجال يمكننا الحصول عليه هو شدة المجال المغناطيسي ، وذلك لأن هذا المتجه يرتبط مباشرة بقيمة التيار الذي يسري في لفات الملف حسب قانون أمبير المتمثل في المعادلة (31-10) . وعند تطبيق هذه المعادلة على مسار دائري متحد المركز مع الفجوة الهوائية للملف (وهو المسار المرسوم على شكل خط دائري متقطع في الشكل) ، يتضح أن شدة المجال المغناطيسي H يكون لها المقدار نفسه لجميع نقاط المسار ، لذا :

$$H_t l = NI,$$

أو

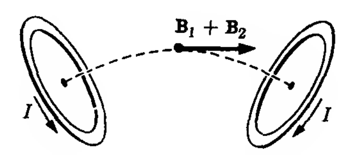
$$H_t = \frac{NI}{l}. \qquad (10\text{–}45)$$

وهنا يشير الرمز السفلي لشدة المجال على المركبة الماسة للمسار ، و $l = 2\pi r$ يمثل طول المسار الكلي . ومن المعادلة (26-10) ينتج :

$$B_t = \frac{\mu_0 NI}{l} + \mu_0 M_t. \qquad (10\text{–}46)$$

وبهذا يتضح أن المجال المغناطيسي يختلف عما هو عليه في حالة الفراغ بحد مضاف قدره $\mu_0 M_t$.

باستخدام الاسلوب المذكور في أعلاه يمكن الحصول على المركبة المماسة للمتجه B (وكذلك للمتجه H) فقط ، وهي المركبة الوحيدة التي نتوقع وجودها . حسب المعادلة (10-27) هناك نوعان من المصادر للشدة المغناطيسية : التيارات الحقيقية والمادة الممغنطة . ومن السهل أن نثبت أن التيار الذي يسري في لفات الملف يولد مجالاً مماساً فقط . الملف يكافيء N من اللفات الدائرية الحاملة للتيار . ولدمج المجال المغناطيسي الناشيء عن جميع لفات الملف نأخذ كل زوج من اللفات على حدة (لاحظ الشكل 10-14) ، عندئذ يتضح أن كل زوج من اللفات يولد مجالاً مماساً عند النقطة المعنية .

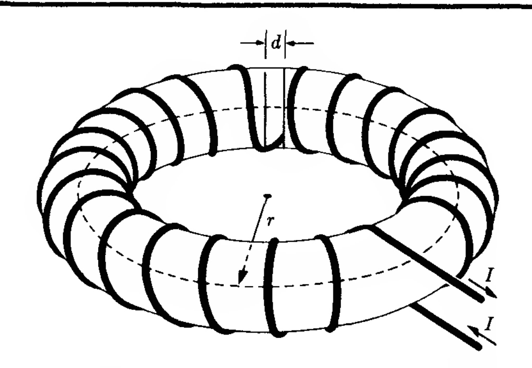


الشكل 10-14 الطبيعة المحورية للمجال الناشيء عن لفات الملف تتضح من دمج المجال المغناطيسي لكل زوج من اللفات .

مساهمة المصدر الثاني للشدة المغناطيسية وهو المادة الممغنطة ذاتها قد تتجلى من خلال كثافتي القطب : $\rho_M = -\mathrm{div}\mathbf{M}$ و $\sigma_M = \mathbf{M}.\mathbf{n}$ ولما كانت المادة الفيرومغناطيسية داخل الملف الحلقي هي مادة متساوية الاتجاه ، فإن التمغنط M سيكون بنفس اتجاه H . ولكن التمغنط ينشأ بسبب مرور التيار في لفات الملف ، وأن المجال المتولد يكون بالاتجاه المماسي . ولهذا نتوقع نشوء مركبة تمغنط مماسية M_t فقط . وعلى هذا الأساس لا توجد سطوح في العينة الحلقية عمودية على متجه التمغنط وبالتالي لا توجد σ_M . وأخيراً يجب أن تكون قيمة ρ_M صفراً ، على الرغم من أن M_t قد تكون دالة للبعد r (وهو المسافة المقاسة من محور الملف الحلقي) ، وأن الحد $\partial M_t/\partial r$ لا تساهم في divM . والنتيجة المهمة هي أن المادة الممغنطة لا تساهم في تكوين الشدة المغناطيسية في هذه الحالة ، وأن المعادلة (10-46) تعطي المجال المغناطيسي الكلي .

وهناك معضلة أخرى اكثر تعقيداً من تلك المعضلة التي مر ذكرها ، وهي الملف الحلزوني الحلقي المكون من N من اللفات والذي يحيط بعينة فيرومغناطيسية تحتوي على قطع سمكه d (الشكل 10-15) . وسنعامل فجوة الهواء للقطع وكأنها

فجوة من الفراغ ، وذلك لأن نفوذية الهواء تختلف بمقدار ضيئل جداً عن نفوذية الفراغ μ_0. وفي هذه المسألة نجد أن قانون أمبير للدوائر الكهربائية لا يفي بالغرض لتعيين المتجه **H** ، وسبب ذلك هو أنه لا يمكننا أن نستنتج من طبيعة التماثل في هذه الحالة أن المتجه **H** يمتلك القيمة نفسها عند جميع نقاط المسار الدائري . ولهذا نعود أولاً الى المعادلة (27–10) .



الشكل **15-10** ملف حلزوني حلقي يحيط بحلقة من مادة مغناطيسية فيهاقطع مكون من فجوة هوائية

نلاحظ هنا مرة أخرى أن كلاً من التيارات الحقيقية والتمغنط يساهم في تكوين الشدة المغناطيسية . ولما كانت لفات الملف متماثلة مع تلك اللفات المذكورة في المسألة السابقة ، فإنَّ المساهمة في قيمة **H** المتأتية من التيارات الحقيقية يجب أن تكون تماماً بالمقدار نفسها كما في تلك المسألة . وإذا رمزنا لهذه المساهمة بالرمز السفلي 1 ، لأمكننا كتابة الآتي :

$$H_{1t} = \frac{NI}{l}. \tag{10–47}$$

ومشكلتنا الآن هي حساب H_2 أو الحد $\nabla \bar{U}^*$. ولجعل المسألة بسيطة نفرض أن مركبة التمغنط المماسية M_t منتظمة خلال المادة الفيرومغناطيسية . وهذه الفرضية ستوفر لنا كل أساسيات الفيزياء التي نحتاجها بدون تعقيدات جبرية . وبهذا ρ_M تساوي صفراً ، ولكن $\sigma_M = \pm M_t$ على أوجه القطب التي تحاذي الفجوة الهوائية . هذه الحالة شديدة الشبه بالمسألة الكهروستاتيكية التي تتضمن المتسعة المشحونة ذات اللوحين المتوازيين . والحقيقة هي أن الصيغ الرياضية للجهد تكون متماثلة في

الحالتين . وإذا فرضنا أن الفجوة الهوائية ضيقة جداً . لأمكننا أن نحصل على الآتي بصورة تقريبية :

$$H_{2t} = M_t \quad (\text{في الفجوة})$$
$$H_{2t} = 0 \quad (\text{فيما عدا ذلك}) \tag{10-48}$$

لكن هذه النتيجة لا تتفق مع قانون أمبير للدائرة الكهربائية ، وذلك لأن :

$$\oint H_t\,dl = \oint (H_{1t} + H_{2t})\,dl = NI + M_t d \neq NI$$

ما لم تكن d صغيرة جداً الى حد الإهمال . وعندما تكون الفجوة ضيقة ولكن ليس الى الحد الذي يمكننا اهمال سمكها ، فان التقريب الأفضل يكون كالآتي :

$$H_{2t} = M_t\left(1 - \frac{d}{l}\right) \quad (\text{في الفجوة})$$
$$H_{2t} = -M_t\frac{d}{l} \quad (\text{في المادة}) \tag{10-49}$$

وهذه النتيجة لا تحقق قانون أمبير فحسب ، إنما تشير الى إستمرارية المركبة العمودية للحث المغناطيسي عند أوجه القطب .

وبدمج المعادلتين (10–47) و (10–49) ، ثم تعويض الناتج في المعادلة (10–26) :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}),$$

نجد أن :

$$B_t = \frac{\mu_0 NI}{l} + \mu_0 M_t\left(1 - \frac{d}{l}\right) \tag{10-50}$$

وهذه النتيجة تصح للفجوة الهوائية وكذلك للمادة المغناطيسية .

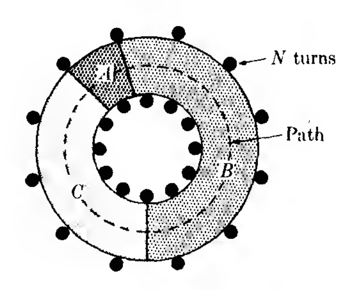
10–9 الدوائر المغناطيسية Magnetic circuits:

تشكل خطوط الفيض المغناطيسي كما رأينا مسارات مغلقة . فاذا كان جميع الفيض المغناطيسي المرافق لتيارات معينة محصوراً في مسارٍ محددٍ نوعاً ما ، لجاز لنا

عندئذ التكلم عن الدوائر المغناطيسية . وبهذا تكون الأمثلة التي نوقشت في البند (8-10) دوائر مغناطيسية ، طالما كان الفيض المغناطيسي محصوراً في المنطقة داخل لفات الملف الحلزوني الحلقي . ففي المثال الأول تتكون الدائرة المغناطيسية من مادة واحدة فقط ، هي الحلقة الفيرومغناطيسية . وفي المثال الثاني نواجه دائرة توال مكونة من مادتين : مادة فيرومغناطيسية وفجوة هواء .

لنأخذ دائرة توالٍ أكثر شمولية مكونة من عدد من المواد المحاطة بلفات ملف حلزوني حلقي عددها N وتحمل تياراً قدره I كتلك المبينة في الشكل (16-10) . وبتطبيق قانون أمبير على مسار يتبع الدائرة المغناطيسية (المسار الدائري المرسوم بهيئة خط متقطع في الشكل) نحصل على :

$$\oint H\,dl = NI.$$



الشكل **10-16** دائرة مغناطيسية

ومن الملائم أن نعبر عن H عند كل نقطة من نقاط المسار بدلالة الفيض المغناطيسي . فباستخدام المعادلتين :

$$B = \mu H \quad ، \quad \Phi = BA$$

حيث إن A تمثل مساحة مقطع الدائرة المغناطيسية عند النقطة المقصودة ، نجد أن

$$\oint \frac{\Phi\,dl}{\mu A} = NI.$$

ومادمنا نتعامل مع دائرة مغناطيسية ، فإنَّ من المتوقع أن يكون الفيض المغناطيسي ثابتاً لجميع النقاط لهذه الدائرة . ولهذا يمكننا إخراج الفيض خارج علامة التكامل :

$$\Phi \oint \frac{dl}{\mu A} = NI \qquad (10\text{–}51)$$

هذه هي المعادلة الأساسية للدائرة المغناطيسية التي تمكننا من إيجاد الفيض المغناطيسي بدلالة معالم الدائرة المختلفة .

المعادلة (51–10) تذكرنا بمعادلة مشابهة مألوفة في دوائر التيار الكهربائية :

$$IR = \mathcal{E}.$$

وطبقاً للتناظر الموجود في الحالتين المغناطيسية والكهربائية ، نعرف القوة الدافعة المغناطيسية (mmf) وفق العلاقة :

$$\text{mmf} = NI, \qquad (10\text{–}52)$$

ونعرف المقاومة المغناطيسية Reluctance ورمزها $\mathcal{R}$ حسب الصيغة :

$$\mathcal{R} = \oint \frac{dl}{\mu A}. \qquad (10\text{–}53)$$

وباستخدام هذين التعريفين يمكننا كتابة المعادلة (51–10) كالآتي :

$$\Phi = \frac{\text{mmf}}{\mathcal{R}}. \qquad (10\text{–}51a)$$

أما اذا تكونت الدائرة المغناطيسية من عدد من القطع المتجانسة بحيث ان لكل قطعة مقطع عرضي منتظم ، فبالامكان تقريب المقاومة المغناطيسية كالآتي :

$$\mathcal{R} = \sum_j \frac{l_j}{\mu_j A_j} = \sum_j \mathcal{R}_j. \qquad (10\text{–}53a)$$

وبهذا تكون المقاومة المغناطيسية الكلية لدائرة التوالي مساوية لمجموع المقاومات المغناطيسية للعناصر المتكونة منها . والواقع إن التناظر بين الدوائر المغناطيسية ودوائر التيار تتعدى الصفات المشتركة التي أشرنا اليها تواً ، فمن المعلوم ان مقاومة دائرة تيار كهربائية تعطى بموجب العلاقة :

$$R = \oint \frac{dl}{gA},$$

ولا تختلف هذه العلاقة عن نظيرتها (المعادلة 53–10) الا في احلال g بدلاً من μ . وبسبب هذا التماثل الموجود في الحالتين ، يبدو واضحاً أن بالامكان دمج

مجاميع من المقاومات المغناطيسية المتصلة على التوالي وعلى التوازي بالطريقة ذاتها التي استخدمت لدمج مجاميع المقاومات .

ان أكثر استخدامات مفهوم الدائرة المغناطيسية يتمثل في الدوائر التي تحتوي على مواد فيرومغناطيسية ، لكن استعمال هذه المواد بالذات يتضمن قدراً معيناً من الصعوبة . فمن المعلوم ان $\mu = \mu(H)$ للمواد الفيرومغناطيسية ، ولا يمكننا أن نعرف قيمة H في المادة مالم نحل المسألة بصورة كاملة ونجد الفيض المغناطيسي . ومع ذلك فأن هذه الحالة غير ميؤوس منها ، فالحقيقة إنَّ حل المسألة ممكن بطريقة سهلة نوعاً ما وذلك باستخدام الاسلوب الآتي : أولاً ــ كتخمين أولي يمكننا ان نفرض ان :

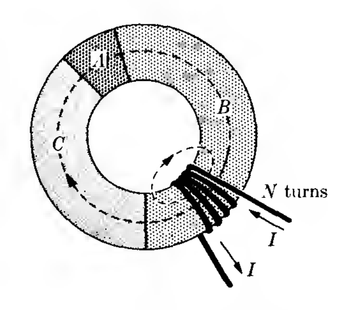
$$H = NI/l_{\text{total}},$$

إذ ان l_{total} تمثل الطول الكلي للدائرة . ثانياً ــ يمكن الحصول على نفوذية كل مادة في الدائرة المغناطيسية لهذه القيمة لـ H من المنحني الملائم للتمغنط . ثالثاً ــ تحسب المقاومة المغناطيسية الكلية للدائرة . رابعاً ــ يحسب الفيض المغناطيسي من المعادلة (10–51a) . خامساً ــ ومن هذه القيمة للفيض يمكن إيجاد الشدة المغناطيسية في العناصر المختلفة للدائرة ، ثم يعاد حساب نفوذية هذه العناصر . سادساً ــ يعاد هذا الاسلوب بدءاً بالفقرة الثالثة . واعتيادياً تكفي محاولتان أو ثلاث محاولات لتعيين الفيض بدقة كافية .

تتناسب المقاومة المغناطيسية $\mathcal{R}_j$ عكسياً مع النفوذية μ_j . ولما كانت نفوذية المادة الفيرومغناطيسية مائة مرة أو ألف مرة ، بل وحتى مائة ألف مرة اكبر من نفوذية الفراغ في حالات معينة ، فمن الواضح عندئذٍ أن المادة الفيرومغناطيسية تشكل ممراً ذا مقاومة مغناطيسية منخفضة للفيض المغناطيسي . فإذا لاقى الفيض المغناطيسي مسارين متوازيين ، أحدهما يمتلك مقاومة مغناطيسية عالية $\mathcal{R}_h$ والآخر يمتلك مقاومة منخفضة $\mathcal{R}_l$ ، لوجدنا ان معظم الفيض يمر خلال المسار الذي تكون مقاومته المغناطيسية منخفضة . عندئذ تكون المقاومة المغناطيسية المكافئة للمسارين معطاة بالعلاقة :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_h\mathcal{R}_l/(\mathcal{R}_h + \mathcal{R}_l).$$

واذا نظرنا الآن الى الشكل (10–17) لوجدنا أنه عندما تكون المواد A و B و C فيرومغناطيسية ، يصبح معظم الفيض محصوراً داخل الحلقة الفيرومغناطيسية ، وسبب ذلك هو أن المسار الكائن في الهواء بين نهايتي الملف الحلزوني يكون ذا مقاومة مغناطيسية عالية نسبياً . وبهذا تكون الدائرتان المغناطيسيتان المبينتان في الشكلين (10–16) و (10–17) متكافئتين أساساً .



الشكل **10-17** هذه الدائرة المغناطيسية تكافيء الدائرة المغناطيسية المبينة في الشكل **10-16** فيما اذا كانت نفوذية المواد **A** و **B** و **C** عالية .

وعندما تكون المادتان B و C فيرومغناطيسيتين ، ولكن A تمثل فجوة هوائية ، فإن الدائرتين المغناطيسيتين تصبح غير متكافئتين ، والسبب في ذلك هو حدوث تسرب في الفيض من نهايتي الملف الحلزوني المبين في الشكل (10-17) . أما كمية الفيض المتسرب فيعتمد على النسبة بين المقاومة المغناطيسية للدائرة المغناطيسية وبين مسار التسرب . وعندما يكون طول فجوة الهواء A صغيراً بالمقارنة مع طول الملف الحلزوني ، فإنَّ التسرب في الفيض يكون قليلاً ويمكن إهماله اذا أردنا أن نحصل على حسابات تقريبية . ولقد حسبت المقاومة المغناطيسية لمسار التسرب للعديد من الأشكال الهندسية الشائعة للدوائر المغناطيسية ، وهذه القيم المحسوبة معطاة في عدد من المراجع القياسية* . إن التقريب في مفهوم الدوائر المغناطيسية هو بالتأكيد أكثر مما هو عليه في حالة الدوائر الكهربائية ، وذلك لأن : أولاً ــ النسبة بين المقاومة المغناطيسية للدائرة الى المقاومة المغناطيسية لمسار التسرب هي ليست قليلة بالمقارنة مع نظيرتها في حالة الدائرة الكهربائية ، وثانياً ــ الأبعاد العرضية للدائرة المغناطيسية هي عادة غير قابلة للإهمال مقارنة مع طولها ، ومع ذلك فقد ثبت أن مفهوم الدائرة المغناطيسية هو مفيد للغاية .

* راجع على سبيل المثال :

Electromagnetic Devices by Herbert C. Roters (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1941) Chapters IV and V, and *Magnetic Circuits and Transformers*, by the M.I.T. Staff (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1943).

10-10 الدوائر المغناطيسية التي تحتوي على مغانط دائمية :
Magnetic circuits containing permanent magnets

إنَّ مفهوم الدائرة المغناطيسية يفيدنا أيضاً في تطبيقه على دوائر المغناطيس الدائمي ، وهي الدوائر التي يكون فيها مصدر الفيض نابعاً من المادة الممغنطة بشكل دائمي . وسنجد أنه من الملائم أن نستعمل الرمز P–M ليكون بمثابة إختصار لكلمة مغناطيس دائمي أحياناً . وبسبب التعقيدات التي تتضمنها العلاقة B–H في مادة المغناطيس الدائمي ، يصبح الأسلوب المتبع في البند السابق غير ملائم للمسألة التي نحن بصددها . وعوضاً عن ذلك الأسلوب سنبدأ مرة أخرى بقانون أمبير للدائرة الكهربائية ، ثم نطبقه على مسار الفيض لدائرة المغناطيس الدائمي :

$$\oint H\, dl = 0,$$

أو

$$\int_a^b H\, dl = -\int_{b(P-M)}^a H\, dl. \qquad (10\text{-}54)$$

عند كتابة هذه المعادلة نفترض أن مادة الـ P–M موجودة بين النقطتين b و a من مسار الفيض ، على حين يكون مسار الفيض الممتد من نقطة a الى b خالياً من مواد المغناطيس الدائمي . وباستخدام المعادلتين :

$$B = \mu H \quad \text{و} \quad \Phi = BA$$

في الجهة اليسرى من المعادلة (54–10) نحصل على :

$$\Phi \int_a^b \frac{dl}{\mu A} = -\int_{b(P-M)}^a H\, dl. \qquad (10\text{-}55a)$$

لكن الفيض المغناطيسي يكون متصلاً خلال الدائرة المغناطيسية برمتها ، لذا :

$$\Phi = B_m A_m,$$

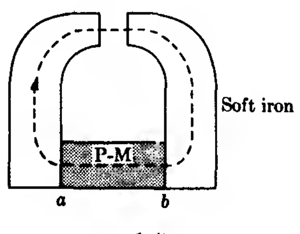
إذ أن B_m تمثل المجال المغناطيسي داخل المغناطيس الدائمي ، و A_m مساحة المقطع العرضي له . ويمكننا كتابة الجهة اليمنى من المعادلة (55–10): $-H_m l_m$ ، إذ أن H_m تمثل متوسط الشدة المغناطيسية داخل المغناطيس و l_m تمثل طول المغناطيس . لذا ينتج :

$$B_m A_m \mathcal{R}_{ab} = -H_m l_m \qquad (10\text{-}55b)$$

وهذه معادلة تربط بين الكميتين المجهولتين B_m و H_m ، يمكن حلها آنياً مع منحني التخلف المغناطيسي للمغناطيس للحصول على B_m و H_m .

وكمثال على دائرة P-M ، نأخذ الدائرة المكونة من مغناطيس ، وفجوة هواء ، وحديد مطاوع (لاحظ الشكل 18-10) . ومن المهم أن يدرك المرء أن الحديد المطاوع ليس مادة مغناطيس دائمي ، وانه ذا تخلف مغناطيسي يمكن إهماله بالمقارنة مع تخلف المغناطيس الدائمي ، ونفوذيته μ_i كمية موجبة . المقاومة المغناطيسية تعطى حسب العلاقة الآتية :

$$\mathcal{R}_{ab} = \frac{l_i}{\mu_i A_i} + \frac{l_g}{\mu_0 A_g}, \tag{10-56}$$



الشكل **10-18**

إذ يشير الرمزان السفليان i و g الى الحديد المطاوع وفجوة الهواء على الترتيب . واذ كانت فجوة الهواء ليست ضيقة أكثر مما ينبغي ، لأمكن تقريب العلاقة (10-56) الى الآتي :

$$\mathcal{R}_{ab} \approx \frac{l_g}{\mu_0 A_g},$$

وعند دمج هذه المعادلة مع (10-55b) ينتج :

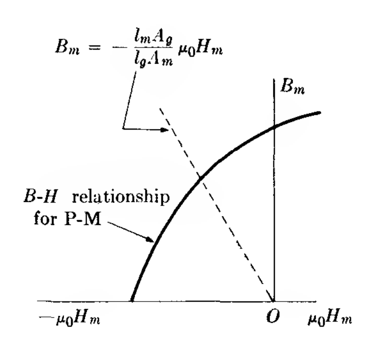
$$B_m = -\frac{l_m A_g}{l_g A_m} \mu_0 H_m, \tag{10-57}$$

وهذه المعادلة تمثل علاقة خطية بين الكميتين B_m و H_m ، وقد رسمت مع منحني التخلف المغناطيسي للمغناطيس في الشكل (19 ـ 10) . وتقاطع الخطين يحدد

نقطة العمل للمغناطيس . وهكذا أصبحت المسألة محلولة الآن ، إذ يمكن تعيين الفيض Φ وكثافة الفيض B_g بسهولة من معرفة B_m .

وعلى أية حال هناك نقطتان جديرتان بالذكر . النقطة الأولى هي : ما القيمة التي ينبغي استعمالها للمساحة الفعالة A_g للفجوة ؟ يمكننا أن نعدَّ A_g مساوية لمساحة وجه القطب المغناطيسي للحديد المطاوع بصورة تقريبية . وهذا التقريب يكون مقبولاً بشرط أن لا تكون الفجوة الهوائية كبيرة أكثر مما ينبغي . وسوف نتجنب المناقشات التفصيلية لهذه النقطة ، وبدلاً من ذلك نشير الى القارىء المهتم بالموضوع بالرجوع الى المراجع المذكورة في البند السابق . والنقطة الثانية هي أن مشكلة تسرب الفيض لها من الأهمية في دوائر المغناطيس الدائمي ما لأهميتها في الدوائر المغناطيسية الأخرى بالضبط . وسنفرض أنَّ إهمال الفيض المتسرب ممكن في جميع المسائل المعروضة في هذا الكتاب .

وأخيراً ، نلاحظ أن قيمة H_m المعينة من الشكل (19-10) تكون سالبة ، هذا يعني أن الشدة المغناطيسية داخل المغناطيس تعمل على إزالة التمغنط . وهذه تعد نتيجة عامة ، فعندما يكون أصلُ الفيض المغناطيسي نابعاً من المغناطيس الدائمي يتعرض المغناطيس ذاته الى مجال مزيل للتمغنط .



الشكل 19-10 خط إزالة التمغنط لدائرة مغناطيسية . (الرمز m يدل على المغناطيس) . ولما كانت $\mu_0 H_m$ قد رسمت بدلاً من H_m ، فإن ميل خط إزالة التمغنط يساوي $-(l_m A_g/l_g A_m)$ ، أي أنه يساوي عدداً مجرداً .

10-11 مسائل القيم الحدودية المتضمنة مواد مغناطيسية :
Boundary-value problems involving magnetic materials

رأينا في البنود السابقة كيف يمكننا باستخدام مفهوم الدائرة المغناطيسية أن نحصل على حلول مقربة لانواع معينة من المسائل المغناطيسية . ومع ذلك عندما لا يتبع الفيض مساراً محدداً ، يجب ممارسة أساليب رياضية أكثر فعالية من ذلك الاسلوب . وفي هذا البند سنعالج صنفاً معيناً من المسائل ، ونعني بذلك حساب المجالات المغناطيسية داخل المادة المغناطيسية التي لا يوجد في داخلها تيار منتقل .

عندما J = O ، يمكن اختصار المعادلتين الاساسيتين (10-28) و (10-30) الى الآتي :

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \qquad (10\text{–}28)$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = 0. \qquad (10\text{–}58)$$

المعادلة (10-58) تدل ضمناً على أنه يمكن عدُّ المتجه **H** انحداراً لمجال غير متجه . وينبغي ان لا تكون هذه النتيجة مثيرة للدهشة ، حيث إننا نجد ، حسب معادلة المصدر (العلاقة 10-27) ، أن مساهمة المادة المغناطيسية في المتجه **H** قد تم التعبير عنها بهذه الهيئة ، كما اننا قد أوضحنا في البند 8-8 ان المجال (الواقع ان البرهان المذكور هناك يجب ان يعمم ليشمل المجال **H**) الناشيء عن التيارات المنتقلة يمكن اشتقاقها عندما تكون كثافة التيار الموضعية صفراً . طبقاً للمعادلة (10-58) يمكننا كتابة الآتي :

$$\mathbf{H} = -\nabla U^*, \qquad (10\text{–}59)$$

وهنا يشير الرمز *U الى الجهد المغناطيسي اللامتجه الناشيء عن جميع المصادر .

هناك نوعان من المادة المغناطيسية التي تخضع لامكانية اختصار حساب المجال المغناطيسي الى مسألة بسيطة من نوع القيم ـ الحدود : النوع الاول ـ المادة المغناطيسية الخطية او "الخطية تقريباً" التي تتصف بالعلاقة $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. والنوع الثاني ـ قطعة المادة الممغنطة بانتظام التي تخضع للعلاقة $\operatorname{div}\mathbf{M} = O$. وفي كلتا الحالتين تختصر العلاقة (10-28) الى الآتي :

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \qquad (10\text{–}60)$$

وبدمج هذه النتيجة مع العلاقة (59-10) نحصل على :

$$\nabla^2 U^* = 0, \tag{10-61}$$

وهي معادلة لابلاس . وبهذا اختصرت المسألة المغناطيسية الى مسألة إيجاد حل لمعادلة لابلاس يخضع الى شروط الحدود . وعندئذٍ يمكن حساب $\mathbf{H}$ على انه انحدار الجهد المغناطيسي باشارة سالبة ، ومن ثم الحصول على $\mathbf{B}$ من العلاقة

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

او

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}),$$

حسبما يقتضي الحال .

هناك مسألتان مغناطيسيتان تستخدمان لتوضيح الطريقة المشروحة تواً ، هذا فضلاً عن وجود تمرينات من النوع نفسه ضمن المسائل المعطاة في نهاية الفصل . المثال الاول يعالج مسألة تتعلق بكرة من مادة مغناطيسية خطية نصف قطرها a ونفوذيتها μ موضوعة في منطقة من الفضاء تحتوي أساساً على مجال مغناطيسي منتظم B_0 . ويهمنا ان نعرف كيف يتغير المجال المغناطيسي نتيجة لوضع الكرة فيه ، ونعين المجال المغناطيسي داخل الكرة نفسها . وهذه المسألة تشبه الى حد كبير مسألة وضع كرة عازلة في مجال كهربائي منتظم ، وهي المسألة التي قمنا بحلها في البند (9-4) . وباختيار نقطة الاصل لمنظومة الاحداثيات عند مركز الكرة ، وبجعل اتجاه B_0 منطبقاً على الاتجاه القطبي (اتجاه الاحداثي z) ، يمكننا ان نعبر عن الجهد كمجموع توافقيات منطقية . ومرة اخرى يمكن تحقيق جميع شروط الحدود بواسطة توافقيات $\cos\theta$:

$$U_1^*(r, \theta) = A_1 r \cos\theta + C_1 r^{-2} \cos\theta \tag{10-62}$$

بالنسبة لمنطقة الفراغ (1) خارج الكرة ، و :

$$U_2^*(r, \theta) = A_2 r \cos\theta + C_2 r^{-2} \cos\theta \tag{10-63}$$

بالنسبة لمنطقة وجود المادة المغناطيسية (2) . الثوابت A_1 و A_2 و C_1 و C_2 يجب تعيينها وفقاً لشروط الحدود .

عند المسافات البعيدة عن الكرة يحافظ المجال المغناطيسي على انتظامه :

$$\mathbf{B} = B_0\mathbf{k},$$

و

$$U_1^* \to -(B_0/\mu_0) r \cos\theta.$$

لذا

$$A_1 = -(B_0/\mu_0).$$

وبما أن U_2^* والمجال المغناطيسي المصاحب له لا يمكن أن يصبح لا نهائياً عند اية نقطة ، فإن المعامل C_2 يجب أن يجعل صفراً . وبعد تطبيق شروط الحدود عند البعدين $r = \infty$ و $r = 0$ ، نوجه إهتمامنا على السطح الفاصل عند $r = a$:

$$H_{1\theta} = H_{2\theta},$$

$$B_{1r} = B_{2r},$$

أو

$$-\left(\frac{B_0}{\mu_0}\right)\sin\theta + \frac{C_1}{a^3}\sin\theta = A_2\sin\theta, \tag{10-64}$$

$$B_0\cos\theta + 2\mu_0\frac{C_1}{a^3}\cos\theta = -\mu A_2\cos\theta. \tag{10-65}$$

وبحل هاتين المعادلتين آنياً نحصل على :

$$A_2 = -\frac{3B_0}{(\mu + 2\mu_0)},$$

و

$$C_1 = [(\mu/\mu_0) - 1]\frac{B_0a^3}{(\mu + 2\mu_0)},$$

وبهذا يعطى المجال المغناطيسي داخل الكرة وخارجها حسب المعادلتين الآتيتين على الترتيب :

$$\mathbf{B}_2 = \frac{3B_0\mathbf{k}}{1 + 2(\mu_0/\mu)} \tag{10-66}$$

و

$$\mathbf{B}_1 = B_0\mathbf{k} + \left[\frac{(\mu/\mu_0) - 1}{(\mu/\mu_0) + 2}\right]\left(\frac{a}{r}\right)^3 B_0(2\mathbf{a}_r\cos\theta + \mathbf{a}_\theta\sin\theta). \tag{10-67}$$

المسألة الثانية التي نرغب في حلها تعالج أمر المغناطيس الدائمي . والشيء الذي يهمنا في هذه المسألة هو تعيين المجال المغناطيسي الناشيء عن كرة ممغنطة بانتظام نصف قطرها a وذات تمغنط $\mathbf{M}$ بشرط أن لا توجد مجالات مغناطيسية أخرى .

وبأخذ التمغنط باتجاه الاحداثي z ، وبفرض أن نقطة أصل نظام الاحداثيات تنطبق على مركز الكرة ، يمكننا ان نجد مفكوك الجهد بدلالة التوافقيات المنطقية :

$$U_1^*(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1,n} r^{-(n+1)} P_n(\theta) \qquad (10\text{–}68)$$

بالنسبة لمنطقة الفراغ (1) خارج الكرة ، و :

$$U_2^*(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2,n} r^n P_n(\theta) \qquad (10\text{–}69)$$

لمنطقة المغناطيس الدائمي (2) . وهنا فد أهملنا عن عمد التوافقيات ذات القوى الموجبة لـ r في مفكوك المعادلة (10-68) وذلك لأن قيمها تكون كبيرة عند المسافات الكبيرة . كما أهملنا القوى السالبة لـ r في المعادلة (10-69) وذلك لأن قيمها تصبح لانهائية عند نقطة الأصل . واستناداً الى شروط الحدود عند المسافة r = a :

$$H_{1\theta} = H_{2\theta},$$
$$B_{1r} = B_{2r},$$

نحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C_{1,n} a^{-(n+1)} - A_{2,n} a^n) a^{-1} \frac{d}{d\theta} P_n(\theta) = 0 \qquad (10\text{–}70)$$

و

$$\mu_0 C_{1,0} a^{-2} + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\theta) [C_{1,n}(n+1) a^{-(n+2)} + A_{2,n} n a^{n-1}] - \mu_0 M \cos\theta = 0. \qquad (10\text{–}71)$$

ولما كانت كل من الكميات $P_n(\theta)$ دالة متميزة لـ θ ، فإنه لا يمكن تكوين أية كمية من هذه الكميات من دمج الكميات الأخرى دمجاً خطياً . ولكي تتحقق المعادلتان (10-70) ، (10-71) يجب أن يتلاشى كل حد يحتوي على P_n أو $dP_n/d\theta$. ومن الحدود n = 0 :

$$\frac{dP_0}{d\theta} = 0,$$

و

$$\mu_0 C_{1,0} a^{-2} = 0.$$

ومن ذلك ينتج أن $C_{1,0} = 0$ ، و $A_{2,0}$ غير معين . لكن $A_{2,0}$ هو حد ثابت في دالة الجهد ، ويمكن جعل هذه الكمية صفراً من دون أن يؤثر ذلك على **H** أو **B** .

ومن الحدود $n = 1$

$$C_{1,1}a^{-3} - A_{2,1} = 0 \quad ,$$

و

$$2C_{1,1}a^{-3} + A_{2,1} - M = 0,$$

وبحل هاتين المعادلتين آنياً نحصل على :

$$C_{1,1} = \tfrac{1}{3}Ma^3$$

و

$$A_{2,1} = \tfrac{1}{3}M.$$

ولجميع القيم $n \geq 2$. تكون القيم الوحيدة للثابتين $C_{1,n}$ و $A_{1,n}$ المنسجمة مع المعادلتين هي $C_{1,n} = 0$ و $A_{2,n} = 0$.

وبالتعويض عن هذه النتائج في المعادلتين (10-68) و (10-69) ، نحصل على

$$U_1^*(r, \theta) = \tfrac{1}{3}M(a^3/r^2)\cos\theta \qquad (10\text{-}72)$$

و

$$U_2^*(r, \theta) = \tfrac{1}{3}Mr\cos\theta. \qquad (10\text{-}73)$$

ويمكن حساب الشدة المغناطيسية **H** من أخذ الانحدار حيث ينتج :

$$\mathbf{H}_1 = \tfrac{1}{3}M(a^3/r^3)[2\mathbf{a}_r\cos\theta + \mathbf{a}_\theta\sin\theta], \qquad (10\text{-}74)$$

$$\mathbf{H}_2 = -\tfrac{1}{3}M\mathbf{k}. \qquad (10\text{-}75)$$

وبهذا يكون المجال الخارجي لكرة ممغنطة بانتظام مساوياً بالضبط لمجال ثنائي قطب ناشيء عن عزم ثنائي القطب $\frac{4}{3}\pi a^3\mathbf{M}$. والشدة المغناطيسية داخل الكرة تمثل مجالاً مزيلاً للمغناطيسية ، وهذه نتيجة تتفق مع الملاحظات التي ذكرت سابقاً . ولهذا نرى أن الكرة الممغنطة تقع تحت تأثير مجال الكرة ذاتها المزيل للمغناطيسية . العامل :

$$\tfrac{1}{3} = (1/4\pi)(4\pi/3)$$

في المعادلة (75-10) يعتمد على الشكل الهندسي الكروي . والكمية $4\pi/3$ تعرف بعامل ازالة المغناطيسية للكرة . وعوامل ازالة التمغنط لأشكال هندسية أخرى قد حسبت ورتبت في جداول في العديد من النشرات العلمية*

ان المجال المغناطيسي الخارجي B_1 يساوي حاصل ضرب μ_0 في المعادلة (74-10) . أما الحث المغناطيسي داخل الكرة فيساوي :

$$\mathbf{B}_2 = \tfrac{2}{3}\mu_0 M\mathbf{k} = \tfrac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}. \qquad (10\text{–}76)$$

* راجع على سبيل المثال

E. C. Stoner, *Philosophical Magazine* **36**, p. 803 (1945), and R. M. Bozorth and D. M. Chapin, *Journal of Applied Physics* **13**, p. 320 (1942).

مسائل

10-1 مغناطيس دائمي له شكل الجسم الاسطواني الدائري القائم يبلغ طوله L . فاذا كان التمغنط منتظماً وباتجاه محور الاسطوانة ، جد كثافتي تيار التمغنط J_M و j_M . قارن بين توزيع هذا التيار مع توزيع تيار الملف الحلزوني .

10-2 جد توزيع تيارات التمغنط الناشئة عن كرة ذات تمغنط منتظم قدره $\mathbf{M}$. حسب المعادلة (76-10) يكون الحث المغناطيسي منتظماً داخل كرة من هذا النوع . هل يمكنك استعمال هذه المعلومات لتصميم ملف حامل للتيار وقادر على توليد مجال مغناطيسي داخل منطقة كروية في الفضاء ؟

10-3 (أ) يعرف العزم المغناطيسي لجسم عيني بموجب العلاقة :

$$\int_V \mathbf{M}\, dv.$$

برهن صحة المعادلة :

$$\int_V \mathbf{M}\, dv = \int_V \mathbf{r}\rho_M\, dv + \oint_S \mathbf{r}\sigma_M\, da,$$

إذ ان S تمثل السطح الذي يحيط بالحجم V . (ملاحظة : راجع المسألة المشابهة التي تتضمن متجه الاستقطاب في الفصل الرابع) . (ب) : مغناطيس دائمي له شكل كروي نصف قطره R يمتلك تمغنطاً منتظماً $\mathbf{M}_0$ باتجاه المحور القطبي . عين العزم المغناطيسي للمغناطيس مستخدماً كلا الطرفين الايمن والايسر للمعادلة المذكورة في الفرع (أ) .

10-4 (أ) مغناطيس ذو تمغنط محدد بالدالة $\mathbf{M}(x, y, z)$. وكل عنصر حجمي dv يمكن معاملته كثنائي قطب مغناطيسي $\mathbf{M}\, dv$. فاذا وضع المغناطيس في مجال مغناطيسي منتظم $\mathbf{B}_0$ ، جد العزم الدوراني المؤثر على المغناطيس بدلالة عزمه المغناطيسي (المعرف بالمسألة 3-10) . (ب) مغناطيس له شكل أسطواني دائري قائم طوله L ومساحة مقطعه A ، ذو تمغنط منتظم $\mathbf{M}_0$ موازٍ لمحور الاسطوانة . وضع المغناطيس في مجال مغناطيسي منتظم B_0 . جد العزم الدوراني المؤثر على المغناطيس بدلالة كثافتي القطب .

10-5 مجسم قطع ناقص ذو محاور رئيسة قدرها 2a و 2a و 2b ، ويمتلك تمغنطاً منتظماً باتجاه موازٍ للمحور 2b . فاذا علمت ان التمغنط قدره $\mathbf{M}_0$ ، جد كثافتي القطب المغناطيسي .

10-6 قشرة كروية نصف قطرها الداخلي R_1 ونصف قطرها الخارجي R_2 ، ذات تمغنط منتظم باتجاه الاحداثي z . فاذا كان التمغنط داخل القشرة ممثلاً بالعلاقة :

$$\mathbf{M}_0 = M_0\mathbf{k}.$$

جد الجهد اللامتجه U^* عند نقاط واقعة على الاحداثي z داخل وخارج القشرة .

10-7 مغناطيس دائمي له شكل أسطواني دائري قائم طوله L ونصف قطره R . وضع بحيث ينطبق محوره مع الاحداثي z . وبحيث ينطبق مركزه على نقطة الاصل للاحداثيات . فاذا كان التمغنط منتظماً وقدره M باتجاه المحور ، (أ) جد $U^*(z)$ عند جميع نقاط محور التماثل داخل المغناطيس وخارجه ، و (ب) استعمل نتيجة الفرع (أ) لايجاد الحث المغناطيسي B_2 عند نقاط محور التماثل داخل المغناطيس وخارجه .

10-8 كرة من مادة مغناطيسية نصف قطرها R وضعت في نقطة الاصل للاحداثيات . فاذا أعطي التمغنط وفقاً للدالة :

$$\mathbf{M} = (ax^2 + b)\mathbf{i},$$

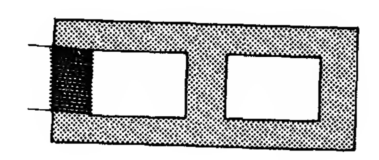
عين كثافتي القطب وتيارات التمغنط ، علماً أن a و b كميتان ثابتتان .

10-9 حلقة من الحديد الصلب متوسط طولها 15 cm ، لف عليها ملف حلزوني حلقي عدد لفاته مائة لفة . عين الحث المغناطيسي داخل الحلقة عندما يسري في الملف تيار قدره (أ) 0.1 ، (ب) 0.2 ، (جـ) 1.0 من الامبيرات .

10-10 حلقة من الحديد المطاوع فيها قطع سمكه سنتيمتر واحد ، لف عليها ملف حلزوني حلقي كما هو مبين في الشكل (15-10) . متوسط طول الحلقة الحديدية يساوي عشرين سنتيمتراً ، ومساحة مقطعها تساوي أربعة سنتيمترات مربعة ، ونفوذيتها تساوي $3000\,\mu_0$ ، وعدد لفات الملف تساوي مائتين . فاذا علم أن الملف يحمل تياراً قدره عشرة أمبيرات . (أ) أحسب الحث المغناطيسي داخل فجوة الهواء ، و (ب) جد قيمتي B و H داخل الحلقة الحديدية .

10-11 أحسب الحثية الذاتية لدائرة التيار المشار اليها في المسألة السابقة .

10-12 دائرة مغناطيسية بنفس الهيئة المبينة في الشكل (20-10) . لف على طرفها الايسر سلك مكون من مائة لفة ويحمل تياراً قيمته تساوي أمبيراً واحداً . ارتفاع الدائرة يبلغ عشرة سنتيمترات وطولها عشرين سنتيمتراً ، ومساحة مقطع كل ساق يساوي ستة سنتيمترات مربعة ، ونفوذيتها تساوي $5000\,\mu_0$. باهمال التسرب أحسب الفيض المغناطيسي خلال الساق الاوسط ، وكذلك خلال الساق الايمن للدائرة .



شكل (20-10)

13-10 دائرة مغناطيسية بنفس الهيئة المبينة في الشكل (18-10) تحتوي على مغناطيس دائمي طوله ثمانية سنتيمترات ، وحديد مطاوع طوله ستة عشر سنتيمتراً ، وفجوة هواء سمكها ثمانية أعشار السنتيمتر . متوسط مساحة مقطع كل من الحديد والمغناطيس تساوي أربعة سنتيمترات مربعة ، ومساحة مقطع فجوة الهواء الفعالة ثلاثة سنتيمترات مربعة . النفوذية النسبية للحديد تساوي خمسة آلاف . (أ) أحسب كثافة الفيض المغناطيسي في الفجوة للمغناطيس ، عندما يعمل من مادة (sintered oxide) أولاً ، ومن مادة (35% Co steel) ثانياً . أهمل التسرب . (ب) اذا غيرت أبعاد الدائرة المغناطيسية بحيث أنقص سمك الفجوة الهوائية ليصبح ثمانية أعشار المليمتر ، أعد حساب ماذكر في الفرع (أ) .

14-10 جد الحث المغناطيسي داخل كرة ذات تمغنط منتظم لكل من المواد المبينة في الشكل (10-10) .

15-10 دائرة مغناطيسية بالهيئة المبينة في الشكل (18-10) مكونة من مغناطيس من سبيكة (Alinco 5) طوله عشرة سنتيمترات ، ومسار من الحديد المطاوع طوله ستة عشر سنتيمتراً ، وفجوة هوائية سمكها سنتيمتر واحد . كما تحتوي الدائرة على ملف مكون من ثمانمائة أمبير ـ لفة (باتجاه يساعد الفيض الذي يولده المغناطيسي) . جد كثافة الفيض المغناطيسي في فجوة الهواء . (أهمل التسرب ، وخذ $K_m = 5000$ للحديد المطاوع ، وافرض أن مساحة مقطع كل من المغناطيس والحديد المطاوع وفجوة الهواء متساوية) .

*16-10 احسب عامل إزالة التمغنط لجسم اسطواني طويل ذي تمغنط دائمي ومنتظم ، علماً أن اتجاه التمغنط عمودي على محور الاسطوانة .

17-10 جسم اسطواني طويل نصف قطره a ونفوذيته μ وضع في مجال مغناطيسي منتظم B_o بحيث أن محور الاسطوانة عمودي على المجال . احسب الحث المغناطيسي داخل الجسم الاسطواني . ارسم مخططاً كمياً مبيناً خطوط الحث المغناطيسي خلال الجسم . (افرض من البداية ان U^* يمكن تحديدها كلياً بدلالة التوافقيات المنطقية $\cos\theta$. هذه الفرضية يمكن تبريرها طالما أن جميع شروط الحدود تتحقق بدلالة التوافقيات $\cos\theta$.

*18-10 قشرة اسطوانية طويلة نصف قطرها الداخلي a ، ونصف قطرها الخارجي b ، ونفوذيتها النسبية K_m ، وضعت بصورة عمودية على مجال مغناطيسي منتظم B_o . (أ) أثبت أن الحث المغناطيسي B_i في منطقة الفراغ داخل القشرة يكون موازياً للمجال B_o . (ب) أثبت أن عامل الحجب المغناطيسي h_m يعطى بالعلاقة :

$$h_m \equiv \frac{B_0}{B_i} = 1 + \frac{(K_m - 1)^2}{4K_m}\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right).$$

الفصل الحادي عشر *

النظرية المجهرية للخواص المغناطيسية للمادة

MICROSCOPIC THEORY OF THE MAGNETIC PROPERTIES OF MATTER

تم التركيز في الفصل السابق على الصفات العينية للتمغنط ، كما أعطيت الصفات المغناطيسية للمادة بدلالة الدالة **M** . حيث أن هذه الدالة تعتمد على الحث المغناطيسي بواسطة معالم محسوبة تجريبياً . ولكننا سننظر الآن للموضوع من وجهة نظر مجهرية (اي كمجموعة ذرات أو جزيئات) ، وسننظر الى الكيفية التي تستجيب بها الجزيئات انفرادياً لتأثير المجال المغناطيسي . فبأجراء هذه الطريقة سوف ننتهي الى صياغة نظرية لقابلية التمغنط للوسط المادي وكذلك نستخرج علاقة B–H لكافة انواع المواد . ومثل هذه الطريقة هي بالطبع ابعد من الغرض المطلوب لهذا الكتاب . ومع ذلك ، بوسعنا أن نضع بشكل مبسط كيف تنشأ الانواع المختلفة للسلوك المغناطيسي ، وفضلاً عن ذلك سنشتق الصيغ التي تتنبأ بالقيمة التقريبية لقابلية التمغنط لحالات معينة . ويمكن إيجاد مناقشة شاملة لهذا الموضوع في كتب فيزياء الحالة الصلبة †

لقد تعاملنا في الصياغة العينية للموضوع مع متجهي المجال **B** و **H** اللذين يرتبطان معاً بالمعادلة :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}).$$

* بالامكان حذف هذا الفصل بدون فقدان استمرارية المادة العلمية في الكتاب .

† See, e.g., C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 2nd ed., 1956), Chapters 9 and 15. Also, J. E. Goldman, *The Science of Engineering Materials* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957).

من وجهة النظر المجهرية فأن التمييز بين **B** و **H** سيختفي ، لأننا نتعامل مع تجميع جزيئات (أي مع تجميع ثنائيات أقطاب مغناطيسية أو مع زمر من الثنائيات) في الفراغ ، وسنتناول المجال المغناطيسي قرب الجزيئة في الفراغ أو عند موقع الجزيئة عندما تترك هذه الجزيئة المنظومة . ولهذا نجد أن :

$$\mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{H}_m.$$

هنا يشير الرمز السفلي m لكلمة "مجهري" ، في حين يشير الرمز نفسه في البنود اللاحقة لهذا الفصل الى قيمة محددة للمجال المجهري ، وبالتحديد ، المجال عند موقع الجزيئة مثل الرمز $\mathbf{B}_m$ (و $\mathbf{H}_m$) .

من المألوف عند مناقشة المجال المجهري داخل المادة وضع علاقة تربط $\mathbf{H}_m$ بالمجال العيني **H** ، بدلاً من $\mathbf{B}_m$ بدلالة المجال **B** ، لأن كلاً من **H** و $\mathbf{H}_m$ يمكن كتابتها ببساطة بدلالة تكاملات رياضية حول توزيعات التيار وثنائي القطب . وعلى أية حال سينشأ اختلاف قليل سوءاً قمنا بحساب $\mathbf{H}_m$ ام $\mathbf{B}_m$ لأنها يختلفان عن بعضها بعامل النسبة μ_0 .

11-1 المجال الجزيئي داخل المادة Molecular fieid inside matter

المجال المغناطيسي الذي يعد فعالاً في تأثيره المتبادل مع التيارات الذرية في ذرة او جزيئة يطلق عليه اسم المجال الجزيئي :

$$\mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{H}_m.$$

وقد يطلق عليه في بعض الكتب الدراسية اسم المجال الموقعي «local field» . هذا هو المجال المغناطيسي عند موقع جزيئي (أو ذري) في المادة ، وينشأ عن مصادر خارجية وعن كافة ثنائيات القطب الجزيئية في المواد مع استثناء الجزيئة الواحدة (أو الذرة) عند النقطة قيد الدرس . من الثابت بأنه ليست بالضرورة أن تكون $\mathbf{B}_m$ مساوية لمجال الحث المغناطيسي العيني ، لأن الكمية الأخيرة متعلقة بالقوة على عنصر تيار ذي أبعاد كبيرة مقارنة مع الأبعاد الجزيئية .

وقد يحسب المجال الجزيئي بطريقة مماثلة لتلك الموضحة في البند (1-5) لحساب المجال الكهربائي الجزيئي داخل العازل . لنفرض جسماً مادياً ذا شكل كيفي ومن الملائم أن نفرض كذلك أن هذا الجسم يمتلك تمغنطاً منتظماً قدره **M** .

لنقطع قطعة صغيرة من الجسم ، تاركين تجويفاً كروياً يحيط بالنقطة المراد قياس المجال الجزيئي عندها . ثم نعالج جزء المادة المتبقية كسلسلة متصلة ، وذلك من وجهة النظر العينية . ومن ثم نعيد وضع المادة المستقطعة داخل التجويف جزيئة بعد جزيئة ، ماعدا الجزيئة التي تقع عند مركز التجويف ، حيث ينبغي حساب المجال الجزيئي عند موقعها . وأما الجزيئات التي أُعيدت الآن فتعامل ثنائيات قطب منفردة أو زمر من الثنائيات وليست كمادة متصلة كما في الحالة العينية .

يمكن إيجاد المجال العيني $\mathbf{H}$ أو الشدة المغناطيسية في العينة ، وفقاً للمعادلة (27-10) كالآتي :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\, dv' + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho_M(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\, dv' + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\sigma_M(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\, da',$$

حيث يمتد التكامل حول كافة المصادر : $\mathbf{J}, \rho_M, \quad \sigma_M.$. ويمكننا إيجاد المجال الجزيئي $\mathbf{H}_m$ بطريقة مماثلة ، ماعدا انه في هذه الحالة هنالك أسهامات اضافية ناتجة عن سطح التجويف وعن ثنائيات القطب المنفردة في التجويف . لاحظ بأنه لا يشمل التكامل المقدار $\rho_M(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ حول حجم التجويف تفصيلياً ، لأن :

$$\rho_M = -\operatorname{div} \mathbf{M} = 0$$

في عينة منتظمة التمغنط ، وبهذا فإنَّ :

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \mathbf{H}_s + \mathbf{H}', \tag{11-1}$$

حيث $\mathbf{H}$ يمثل الشدة المغناطيسية العينية في النموذج ، و $\mathbf{H}_s$ يمثل الاسهام الناتج عن كثافة القطب السطحية $\sigma_M = M_n$ على سطح التجويف ، و $\mathbf{H}'$ يمثل الاسهام الناتج عن ثنائيات القطب المختلفة داخل التجويف .

من الاشتقاق المناظر في البند (1-5) ، يكتب $\mathbf{H}_s$ بالصيغة الآتية :

$$\mathbf{H}_s = \tfrac{1}{3}\mathbf{M}. \tag{11-2}$$

بالاضافة الى ذلك ، فإن اسهام ثنائي القطب يكون كالآتي :

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{4\pi}\sum_i \left[\frac{3(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}_i)\mathbf{r}_i}{r_i^5} - \frac{\mathbf{m}_i}{r_i^3}\right], \tag{11-3}$$

حيث يمثل $\mathbf{r}_i$ المسافة من ثنائي القطب ذي الترتيب i الى مركز التجويف . وأن الصيغة المتمثلة في المعادلة (3-11) تكون مماثلة لصيغة الحد المناظر لثنائي القطب الكهربائي $\mathbf{E}'$ الموضح في البند (1-5) . وبهذا ، فإذا حصرنا أهتمامنا بصنفٍ كبير من المواد التي تمتاز بأن تتلاشى فيها المعادلة (3-11) ، فإن المعادلة (1-11) تختزل الى الآتي :

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \tfrac{1}{3}\mathbf{M}, \tag{11-4}$$

$$\mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{H}_m. \tag{11-5}$$

تمثل المعادلتان (4-11) و (5-11) المجال الجزيئي بدلالة الشدة المغناطيسية العينية والتمغنط في العينة . لمعظم المواد الدايامغناطيسية والبارامغناطيسية يكون الحد : $\tfrac{1}{3}\mathbf{M} = \tfrac{1}{3}\chi_m\mathbf{H}$

صغيراً ومهملاً ، في حين يكون للمواد الفيرومغناطيسية مهماً للغاية .

11-2 منشأ الدايا مغناطيسية Origin of dimagnetism

الدايا مغناطيسية ظاهرة ناتجة عن تطبيق قانون لنز «Lenz's law» على النطاق الذري . فعند تسليط المجال المغناطيسي ، تحور التيارات الالكترونية في كل ذرة بطريقة بحيث أنها تحاول تضعيف تأثير هذا المجال . ولحساب قابلية التمغنط الدايا مغناطيسية لمجموعة ذرات ينبغي معرفة بعض الشيء عن الحركة الالكترونية في الذرة نفسها . سنفترض أن كل الكترون يدور حول النواة الذرية بمدار بشكل معين ، ولتبسيط الموضوع نختار مداراً دائرياً نصف قطره R في مستوٍ عمودي على المجال المغناطيسي المؤثر . ويوضح لنا الميكانيك الكمي بأنه على الرغم من أن هذه الصورة صحيحة تقريباً ، فإن الالكترونات لا تدور حول النواة بمدارات معرفة بدقة . لحل المسألة بدقة ينبغي علينا حل معادلة شرودنكر لالكترون ذري في مجال مغناطيسي . ومع هذا ، فإن حساباتنا التقليدية البسيطة سوف تعطي القيمة التقريبية لقابلية التمغنط الدايامغناطيسية "diamagnetic susceptibility" .

قبل تسليط مجال الحث الغمناطيسي ، فان الالكترون يكون في حالة مستقرة في مداره :

$$F_q = m_e \omega_0^2 R, \tag{11-6}$$

حيث F_q تمثل القوة الكهربائية التي تبقي الالكترون في ذرته و ω_0 تمثل تردد الالكترون الزاوي في مداره و m_e يمثل كتلة الالكترون . فعند تسليط مجال مغناطيسي تنشأ قوة إضافية مؤثرة على الالكترون قدرها $-e\mathbf{v} \times \mathbf{B}_m-$. وبفرض ان الالكترون يبقى بالمدار نفسه ، نجد أن :

$$F_q \pm e\omega R B_m = m_e \omega^2 R,$$

وعند دمج هذه المعادلة مع المعادلة (6-11) ، ينتج :

$$\pm e\omega B_m = m_e(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0). \qquad (11\text{-}7)$$

حيث أن الكمية $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ تمثل تغير التردد الزاوي للالكترون . وبهذا ، فإما أن يتسارع الالكترون أو ان يتباطأ في مداره ، معتمداً على التفاصيل الهندسية (أي معتمداً على اتجاه $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_m$ بالنسبة الى $\mathbf{F}_q$) ، ولكن في كلتا الحالتين ووفقاً لقانون لنز نجد أن : التغير في العزم المغناطيسي المداري يكون في اتجاه مضاد للمجال المؤثر . ويمكن اثبات هذا النص بسهولة من قبل القارىء .

وللمجالات الكبيرة ايضاً والتي يمكن الحصول عليها مختبرياً ($10 \text{ webers}/m^2$)فان $\Delta\omega$ تكون صغيرة جداً بالنسبة الى ω_0، ولهذا فان المعادلة (7 ـ 11) يمكن تقريبها الى الصيغة الآتية :

$$\Delta\omega = \pm \frac{e}{2m_e} B_m. \qquad (11\text{-}8)$$

حيث يطلق على الكمية $(e/2m_e)B_m$ اسم تردد لارمور "larmor frequency" .

الى حد الآن أفترضنا بقاء الالكترون في المدار نفسه كما استخدمنا هذه الفرضية بالاضافة الى توازن القوى لاشتقاق المعادلة (8-11) . ولبقاء الالكترون في مداره ، فإن التغير في طاقته الحركية طبقاً لقانون فرداي للحث ينبغي أن يكون متطابقاً مع المعادلة (8-11) . وعند بدء تأثير المجال المغناطيسي يصبح هنالك تغير في الفيض خلال المدار والذي يعطى بالكمية $\pi R^2 \Delta B_m$. وأن هذا الفيض يكون مرتبطاً بدورات الكترون قدرها Δn ، حيث Δn تمثل عدد الدورات التي يعملها الالكترون خلال فترة تغير المجال . يولد تغير الفيض قوة دافعة كهربائية تمثل بالعلاقة :

$$\mathcal{E} = \pi R^2 \frac{dB_m}{dt} \Delta n = \pi R^2 \frac{dn}{dt} \Delta B_m. \qquad (11\text{-}9)$$

وأما الطاقة المعطاة للالكترون في هذه العملية فتكون $\mathcal{E}e$ ، وتظهر كتغير في الطاقة الحركية قدره :

$$\tfrac{1}{2}m_e R^2(\omega^2 - \omega_0^2) = e\pi R^2 \frac{dn}{dt}\Delta B_m. \qquad (11\text{–}10)$$

حيث ΔB_m تمثل القيمة النهائية للمجال B_m ومعدل قيمة dn/dt تساوي :

$$dn/dt = (\omega + \omega_0)/4\pi.$$

وبهذا تكون :

$$\Delta\omega = \frac{e}{2m_e}B_m,$$

متفقة مع المعادلة (8-11) . وهكذا فإن فرضية المدار الثابت لا تقود الى تناقض بين المعادلة (9-11) ومعادلة القوة .

يسبب التغير في السرعة الزاوية المتوقع من المعادلة (8-11) تغيراً في عزم مغناطيسي قدره :

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{m} &= -\frac{e}{2\pi}\pi R^2 \frac{e}{2m_e}\mathbf{B}_m \\ &= -\frac{e^2}{4m_e}R^2\mu_0\mathbf{H}_m. \qquad (11\text{–}11)\end{aligned}$$

ولإيجاد التمغنط ، لابد من جمع هذه النتيجة ليشمل كافة الالكترونات في وحدة الحجم . وللمادة التي تحتوي على N من الجزيئات لوحدة الحجم ، وبفرض أن جميع الجزيئات من صنف واحد ، فإن :

$$\mathbf{M} = -\frac{Ne^2\mu_0}{4m_e}\mathbf{H}_m\sum_i R_i^2, \qquad (11\text{–}12)$$

حيث يغطي الجمع كافة الالكترونات في جزيئة واحدة . وأما المواد الدايامغناطيسية فإننا نجد أن $\mathbf{H}_m$ يختلف جزئياً عن $\mathbf{H}$ ، وبهذا فإن قابلية التمغنط الدايامغناطيسية تكون

$$\chi_m = -\frac{Ne^2\mu_0}{4m_e}\sum_i R_i^2. \qquad (11\text{–}13a)$$

لقد تم الحصول على هذه النتيجة بفرض ان كافة الالكترونات تدور في مستويات عمودية على المجال $\mathbf{H}_m$. وعند ميلان المدار بحيث أن العمود على المدار يصنع زاوية قدرها θ_i مع المجال ، فإن مركبة $\mathbf{H}_m$ على طول هذا العمود

$(H_m \cos\theta_i)$ تكون فعالة في تغيير السرعة الزاوية للالكترون . وبالاضافة الى ذلك ، فإن مركبة Δm الموازية للمجال تكون أصغر بمعامل قدره $\cos\theta_i$. وبالتالي ، فإن أفضل قيمة لقابلية التمغنط الدايامغناطيسية التقريبية تعطى بالعلاقة :

$$\chi_m = -\frac{Ne^2\mu_0}{4m_e}\sum_i R_i^2 \cos^2\theta_i. \qquad (11\text{-}13b)$$

من المفروض أن تظهر الدايامغناطيسية في كافة انواع المادة ، ولكن يحجب تأثيرها اعتيادياً نتيجة للسلوكين البارامغناطيسي والفيرومغناطيسي اللذين يمكن أن يحدثا آنياً في المادة ، ويتفوقان على السلوك الدايامغناطيسي . على أن الدايامغناطيسية تكون متغلبة في مواد متكونة كلياً من ذرات أو ايونات ذات قشرات الكترونية مغلقة ، حيث تتعادل كافة المساهمات البارامغناطيسية ويزول تأثيرها في مثل هذه المواد .

11-3 منشأ البارامغناطيسية Origin of paramagnetism

يمكن وصف الحركة المدارية لأي الكترون في ذرة أو جزيئة بدلالة العزم المغناطيسي ، ويمكن الاستدلال على هذا الوصف من المعادلة (22-8) مباشرة . بالاضافة الى ذلك ، فمن المعروف أن الالكترون يمتلك خاصية ذاتية يطلق عليها اسم خاصية البرم "Spin" ، كما يمتلك عزماً مغناطيسياً ذاتياً مرافقاً لشحنته التي تكون في حالة حركة مغزلية . ومن ثم ، فإن لكل جزيئة عزم مغناطيسي مقداره m_i والذي يمثل الجمع الأتجاهي للعزوم المدارية والبرمية الناشئة عن الالكترونات المختلفة في الجزيئة . وباختصار ، فإن البارامغناطيسية تنتج من ميل هذه العزوم الجزيئية للتراصف مع المجال المؤثر ، كما هي الحالة في دائرة التيار الكهربائي الممثلة في المعادلة (19-8) التي تميل الى تراصف نفسها مع المجال .

هذه الحالة ليست ببساطة التيار ووضوحه في دائرة كهربائية . والحقيقة أن هناك تعقيدين : اولاً : في حالة وجود مجال مغناطيسي فإن الحركات الالكترونية تكون ذات طابع مُكَمّى "quantized" بحيث يكون لكل عزم مداري وعزم برمي مجموعة منفصلة من الاتجاهات نسبة لأتجاه المجال . بالاضافة الى ذلك ، لا يمكن لالكترونين في جزيئة واحدة ان يشغلا نفس الوضع المُكَمّى ، فإذا كان هناك عدد كافٍ من الالكترونات لجزيئة واحدة لملأ القشرات الالكترونية ، عند ذلك ينبغي استعمال كافة الاتجاهات المحتملة وجعل m_i يساوي صفراً . وبالطبع ، تحدث

الظاهرة البارامغناطيسية فقط عندما تكون $\mathbf{m_i} \neq 0$ ثانياً : إن الحركة الالكترونية داخل الذرة التي تؤدي الى تكوين $\mathbf{m_i}$ تولد أيضاً زخماً زاوياً حول نواة الذرة ، والحقيقة إن $\mathbf{m_i}$ ترتبط بعلاقة خطية مع هذا الزخم الزاوي . تحت هذه الشروط ، فإن العزم المغناطيسي سوف لا يعمل على تراصف عزم ثنائي القطب $\mathbf{m_i}$ مع المجال مباشرة ، ولكنه سيؤدي الى طوافها "precess" حول المجال وبميل ثابت* . وتكون الذرات (أو الجزيئات) في منظومتنا المادية في حالة تلامس حراري فيما بينها . وتكون الذرات في الغاز أو السائل في حالة تصادم مع بعضها البعض باستمرار ، في حين تخضع الذرات في المواد الصلبة لتذبذب حراري . وتحت هذه الظروف ، تتمكن $\mathbf{m_i}$ من استبدال الطاقة المغناطيسية بالطاقة الحرارية ، ومن الانتقال من حالة الى حالة أخرى ذات طابع مختلف . وتحاول طاقة المنظومة الحرارية أن تؤثر بطريقة معينة بحيث ينتج عنها اتجاه عشوائي لـ $\mathbf{m_i}$ ، إلا أن إتجاهات $\mathbf{m_i}$ التي تكون بأتجاه المجال أو بالاتجاه القريب من ذلك تمتلك طاقة مغناطيسية أقل وبهذا فإن تلك الاتجاهات تصبح متغلبة . إن هذه الحالة تشبه تماماً حالة الجزيئات القطبية "polar molecules" الموضوعة في مجال كهربائي ، والتي سبق أن نوقشت في البند (3-5) .

لمادة متألفة بالكامل من نوع جزيئي واحد ، حيث تمتلك كل جزيئة عزماً مغناطيسياً قدره m_0 ، يعطى الاتجاه بصورة تقريبية بواسطة دالة لانجفن "Langevin function" المتمثلة بالمعادلة (21-5) ، حيث :

$$y = \frac{m_0 \mu_0 H_m}{kT}. \tag{11-14}$$

ويعطى التمغنط بالعلاقة الآتية :

$$|\mathbf{M}| = N m_0 \left[\coth y - \frac{1}{y}\right], \tag{11-15a}$$

حيث N تمثل عدد الجزيئات لوحدة الحجم . يمكننا تقريب دالة لانجفن لتشمل الحد الأول من متسلسلتها الأسية إذا إستثنينا درجات الحرارة القريبة من الصفر المطلق ، وبهذا .

---

* مناقشة طواف $\mathbf{m_i}$ في مجال مغناطيسي منتظم موضح في عدة كتب دراسية ، أنظر مثلاً :

H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1950), pp. 176–7.

$$\mathbf{M} = \frac{Nm_0^2}{3kT}\mu_0\mathbf{H}_m, \tag{11–15b}$$

والتي تؤول الى الصيغة الآتية لقابلية التمغنط البارامغناطيسية :

$$\chi_m = \frac{Nm_0^2\mu_0}{3kT}. \tag{11–16}$$

وفقاً للنظرية الذرية ، فإن قيمة m_0 تكون بحدود بضعة مغنيطون بور : ($1\,\text{Bohr magneton} = eh/4\pi m_e$ ، حيث أن h ثابت بلانك) . تؤول المعادلتان (11–16) و (11–13b) الى قيم مقاربة لقيم χ_m المعطاة في الجدول (10–1) .

سوف نلخص نتائج هذا البند باختصار كالآتي : لغرض عرض السلوكية البارامغناطيسية ، فإن ذرات (أو جزيئات) المنظومة ينبغي أن تمتلك عزوماً مغناطيسية دائمة ، تميل الى التراصف مع إتجاه المجال المؤثر . العزوم المغناطيسية المختلفة تكون غير مزدوجة ، أي ، أنها تقوم بالطواف حول المجال المغناطيسي كوحدات منفردة (وليس كمجموعة منسجمة) ، ولكنها قادرة على تبادل الطاقة بسبب التماس الحراري مع محيطها . باستثناء الدرجات الحرارية القريبة من الصفر المطلق وتأثير المجالات الآنية الكبيرة ، فإن التمغنط يكون فيها أقل بكثير من قيمة التشبع المغناطيسي التي يمكن الحصول عليها عند تراصف كافة عزوم ثنائيات القطب .

11-4 النظرية الفيرومغناطيسية Theory of ferromagnetism

في المواد الفيرومغناطيسية تكون العزوم المغناطيسية الذرية (أو الجزيئية) متراصفة تقريباً حتى في حالة غياب المجال المؤثر . ويؤدي هذا التراصف الى نشوء المجال الجزيئي $\mathbf{H}_m$ الذي لا يتلاشى عندما يكون $\mathbf{H} = 0$ وفقاً للمعادلة (11–4) مالم تتلاشى $\mathbf{M}$ آنياً . ويعمل التمغنط على إنشاء مجال جزيئي ، ولكن مالم يولد هذا المجال الجزيئي نفس مقدار التمغنط $\mathbf{M}$ الذي يفترض وجوده في المادة . فإن الحل يكون متناقضاً . وان المشكلة هي تعيين الظروف التي تجعل التمغنط قادراً على دعم نفسه بواسطة المجال الجزيئي .

سيتبين لنا أنه من الضروري تعميم المعادلة (11–4) . للمجال الجزيئي دعنا نكتب :

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \gamma \mathbf{M},$$

والتي لقيمة $\mathbf{H} = 0$ تختزل الى :

$$\mathbf{H}_m = \gamma \mathbf{M}. \qquad (11\text{–}4a)$$

وفقاً للنظرية البسيطة الموضحة في البند (1-11) ، تكون $\gamma = \frac{1}{3}$. فإذا كان حاصل جمع حدود المعادلة (3-11) لا يساوي صفراً ، فإن قيمة γ قدلاتساوي $\frac{1}{3}$ ، ومع ذلك ، فإننا نتوقع أن تكون γ قريبة من تلك القيمة .

لنركز اهتمامنا على مادة متألفة بالكامل من نوع ذري واحد ، حيث تمتلك كل ذرة عزماً مغناطيسياً قدره m_0 . وان عدد الذرات لوحدة الحجم تكون N . فإذا كانت العزوم الذرية متراصفة تقريباً ، فإن M يجب أن تمثل جزءاً كبيراً من Nm_0 ، وبالتحديد دعنا نأخذ :

$$M > 0.7Nm_0. \qquad (11\text{–}17)$$

وحسب المعادلة (15a-11) ينتج :

$$[\coth y - (1/y)] > 0.7,$$

أو

$$y > 3$$

[كما هو معرف بالمعادلة (14-11)] ، وبهذا يكون :

$$y = \frac{m_0 \mu_0 H_m}{kT} > 3$$

وبدمج هذه النتيجة مع المعادلتين (4a-11) و (17-11) ينتج :

$$0.7 \frac{\gamma N \mu_0 m_0^2}{kT} > 3. \qquad (11\text{–}18)$$

وهذا هو الشرط التقريبي لحدوث الفيرومغناطيسية .

ذكرنا في البند السابق ان النظرية الذرية قد تنبأت بأن قيمة m_0 تكون بحدود بضعة مغنيطونات بور . وعلى هذا الأساس فان المعادلة (18-11) تتطلب بأن تكون قيمة γ حوالي 10^3 ، والتي تكون أكبر بكثير مما يمكن أخذه بالحسبان في الاشتقاق المقدم في البند (1-11) . وبهذا يظهر ان منشأ الفيرومغناطيسية يكون معقداً بشكل كبير أكثر من الحالة المناظرة في الفيروكهربائية (المناقشة في البند 4-5) .

قام بييرويس* في عام 1907 بصياغة نظريته للفيرومغناطيسية ، حيث أدرك ويس الدور الأساس الذي يؤديه المجال الجزيئي ، ولم يستطع توضيح قيمة γ الكبيرة . ولكنه أقرها كحقيقة وتابع تطوير نظريته من هذه النقطة . وقد وجد فيما بعد ان تنبؤات نظرية ويس كانت قريبة التطابق مع التجارب . ولهذا السبب غالباً مايطلق على المجال الجزيئي في المعادلة (11-4a) أسم مجال ويس الجزيئي .

قام هايزنبرك† ، بعد حوالي عشرين عاماً بتوضيح منشأ القيمة الكبيرة لـ γ . حيث وضح هايزنبرك : أولاً ـ أن العزوم البرمية المغناطيسية تسهم في إنشاء المجال الجزيئي فقط ، وثانياً ـ ان المجال ينشأ أساساً من قوى كهروستاتيكية . كما بَيَّن هايزنبرك على أساس الميكانيك الكمي بأنه متى ماتغير برم الذرات المجاورة من تراصف متوازٍ الى تراصف معاكس للتوازي ، فانه ينبغي ان يكون هناك تغير آني في التوزيع الشحني الالكتروني في الذرات . ان التغير في التوزيع الشحني يغير طاقة المنظومة الكهروستاتيكية ، وفي بعض الحالات يكون باتجاه تراصف التوازي (أي الفيرومغناطيسية) . ويمكن أن تدرس الطاقة المعتمدة على البرم ، أي الطاقة التي تعتمد على طريقة ترتيب برم المنظومة ، بدلالة القوة (أو العزم) الذي ينشأ على احدى الذرات عند تغيير الترتيب . عندئذٍ يصبح المجال المكافيء متناسباً مع M ولكن بمعامل يعتمد تفصيلياً على توزيع الشحنة في الذرة قيد الدرس .

يمكننا استخدام نظرية ويس ـ هايزنبرك لتنبؤ الطريقة التي يتغير بها تمغنط الفيرومغناطيس مع درجة الحرارة . حيث من الواضح ان هذه النظرية تصور الفيرومغناطيسية كحالة نهائية للبارامغناطيسية في مجال مغناطيسي كبير الى حد ما ، ولكن هذا المجال ينشأ عن التمغنط نفسه .
وبدمج المعادلة (11-4a) مع (11-14) و (11-15) ، ينتج ،

$$M = Nm_0\left[\coth y - \frac{1}{y}\right], \tag{11-19}$$

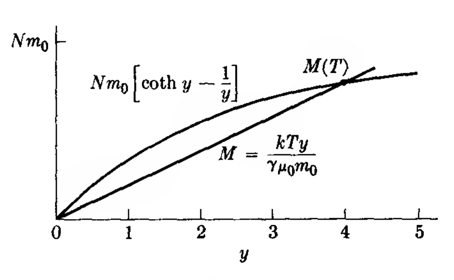
و

$$M = \frac{kTy}{\gamma\mu_0 m_0}. \tag{11-20}$$

ويمكن إيجاد التمغنط الذاتي (أي ، التمغنط عندما يكون المجال الخارجي يساوي صفراً) لدرجة حرارة معينة من الحل الآني للمعادلتين (11-19) و (11-20) . ويمكننا اجراء ذلك ببساطة مستخدمين طريقة الخط البياني : ترسم M كدالة لـ y

* P. Weiss, *Journal de Physique* **6,** 667 (1907).
† W. Heisenberg, *Zeitschrift fur Physik* **49,** 619 (1928).

لكلتا المعادلتين (11-19) و (11-20) ، كما مبين بالشكل (11-1) . تعطي نقطة تقاطع المنحنيين التمغنط M(T) والذي يكون متفقاً مع كلتا المعادلتين .

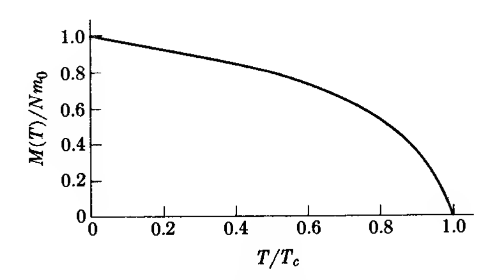


شكل 11-1 . إيجاد التمغنط الذاتي M(T) بمساعدة دالة لانجفن .

كلما زادت درجة الحرارة ، فان المنحني الخطي الممثل بالمعادلة (11-20) يصبح أكثر انحداراً في حين لا تتغير المعادلة (11-19) بتغير درجة الحرارة . وبهذا فان نقطة التقاطع سوف تتحرك نحو يسار الشكل ، ونحصل على قيمة أصغر للتمغنط الذاتي . وأخيراً تصل درجة الحرارة التي عندها تكون المعادلة (11-20) مماسة الى المعادلة (11-19) عند نقطة الاصل . عند هذه الدرجة والدرجات الحرارية الاعلى منها يكون التمغنط الذاتي مساوياً للصفر . ويطلق على هذه الدرجة اسم درجة حرارة كوري ، T_c "Curie temperature" . وعند درجات حرارة أعلى من درجة حرارة كوري يتلاشى التمغنط وتصبح المادة ذات سلوكية بارامغناطيسية أعتيادية .

يظهر الشكل (11-2) ، الرسم البياني لـ M(T) كدالة لدرجة الحرارة الذي ينتج وفقاً للطريقة الموضحة في أعلاه والتي تكون متفقة تقريباً* مع النتائج المستحصلة عملياً للتمغنط الذاتي لمواد فيرومغناطيسية .

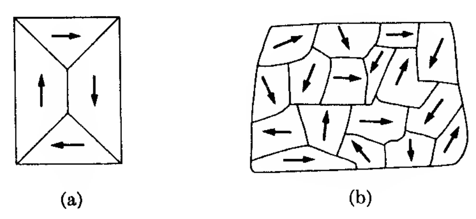
* التصحيحات الكمية للنظرية المقدمة هنا وضعت الخط البياني النظري في حالة متفقة بشكل جيد مع النتائج العملية .



شكل 2-11 . يبين الشكل التمغنط لمادة فيرومغناطيسية كدالة لدرجة الحرارة . يطلق على T_c اسم درجة حرارة كوري . (حسب الخط البياني بمساعدة دالة لانجفن الكلاسيكية . غيرت تصحيحات الميكانيك الكمي شكل الخط البياني بحيث وضعته في حالة متفقة مع النتائج العملية) .

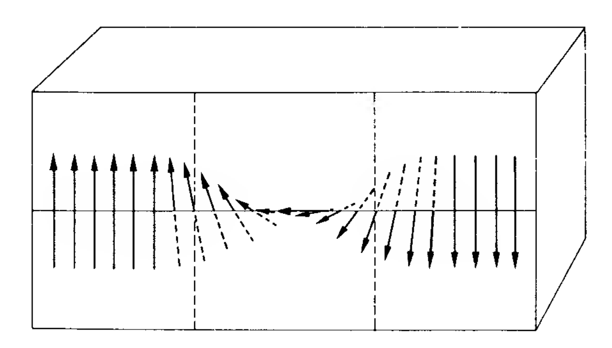
11-5 المناطق الفيرومغناطيسية Ferromagnetic domains

وفقاً للبند السابق ، فإن عينة فيرومغناطيسية ينبغي أن تتمغنط بدرجة قريبة من حالة الاشباع عند درجات حرارة أوطأ من درجة حرارة كوري (بغض النظر عن الماضي المغناطيسي للعينة) . يبدو هذا النص بأنه مغاير للملاحظة التجريبية ، نحن نعرف ، مثلاً ، بأنه يمكن ايجاد قطعة من حديد في حالة ممغنطة أو غير ممغنطة . الجواب لهذه الظاهرة التي تبدو متناقضة هو أن المواد الفيرومغناطيسية تتكون من مناطق مغناطيسية ، كل منطقة تكون ممغنطة بالكامل ومنسجمة مع نتائج البند السابق ، ولكن يمكن للمناطق المغناطيسية المختلفة أن تكون بإتجاهات عشوائية متباينة (الشكل 3-11) ، وبهذا تظهر على هيئة غير ممغنطة من وجهة النظر العينية . وإن ويس هو أول من فرض وجود المناطق الفيرومغناطيسية وذلك عام 1907 .



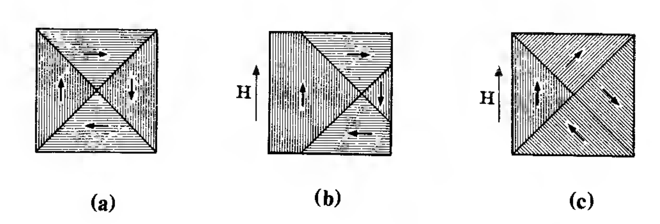
شكل 3-11 . تراكيب المناطق الفيرومغناطيسية : (a) بلورة احادية ، (b) نموذج متعدد البلورات . تمثل الأسهم إتجاه التمغنط .

عند العبور من منطقة مغناطيسية الى أخرى مجاورة لها ، فإن متجه العزم الذري m_0 يدور تدريجياً من أتجاهه الأصلي الى الاتجاه الجديد على مدى حوالي 100 ذرة (الشكل 4-11) . يطلق على هذه المنطقة الواقعة بين المنطقتين المغناطيسيتين اسم جدار المنطقة المغناطيسية «domain wall» . يظهر أن عزم البرم الذري في منطقة الجدار يقع تحت تأثير مجال جزيئي أقل بقليل مما يتعرض له عزم البرم الذري داخل أصل المنطقة المغناطيسية . إن هذه الملاحظة بحد ذاتها تلائم هيئة المنطقة المغناطيسية المنفردة . ومن جهة أخرى ، فإن عينة متكونة من منطقة مغناطيسية واحدة تتطلب بقاء مجال مغناطيسي خارجي كبير ، على حين تمتلك العينة المتكونة من مناطق مغناطيسية متعددة طاقة مغناطيسية مصاحبة لتركيب مجالها أقل مما عليه في حالة المنطقة المنفردة . وبهذه فإن التركيب المتكون من مناطق مغناطيسية متعددة يكون هو المفضل من وجهة نظر الطاقة .



شكـل 4-11 . تركيب منطقة الانتقال ، أو ”جدار بلوج“ بين منطقتين مغناطيسيتين لمادة فيرومغناطيسية .

مظاهر التمغنط العينية في المواد الفيرومغناطيسية تكون متعلقة بتغيرات هيئة المنطقة المغناطيسية . والزيادة في التمغنط الناتجة عن تأثير المجال المغناطيسي المؤثر يحدث بعمليتين مستقلتين : إما بزيادة حجم المناطق المغناطيسية التي يكون إتجاهها متفقاً مع إتجاه المجال الخارجي على حساب المناطق المغناطيسية التي لا تكون بأتجاه المجال (حركة جدار المنطقة المغناطيسية) ، أو بدوران إتجاه تمغنط المنطقة المغناطيسية نحو أتجاه المجال . العمليتان موضحتان تخطيطياً بالشكل (5-11) .



شكل 5-11 . تمغنط مادة فيرومغناطيسية : (a) غير متمغنطة ، (b) متمغنطة بحركة جدار المنطقة المغناطيسية ، (c) متمغنطة بدوران المنطقة المغناطيسية .

عند تسليط مجالات ضعيفة يتغير التمغنط أعتيادياً بطريقة حركة جدار المنطقة المغناطيسية . في المواد النقية تكون حركة الجدار والى مدى واسع قابلة للعكس عند منطقة المجال الضعيف . وفي المجالات الأقوى ينمو التمغنط بفضل حركة الجدار غير القابلة للعكس ، وبفضل دوران المناطق المغناطيسية . في هذه الظروف تبقى المادة متمغنطة عند زوال المجال المغناطيسي الخارجي .

أصبح اجراء الدراسة العملية للمناطق المغناطيسية ممكناً باستخدام الطريقة التي وضعت لأول مرة من قبل بيتر* . وتلخص الطريقة بأن يُذر مسحوق مغناطيسي دقيق على سطح العينة ، وينظر الى جسيمات المسحوق التي تتجمع على طول حدود المناطق المغناطيسية ، ويمكن مشاهدتها بواسطة المجهر . بهذه الطريقة يصبح بالإمكان تحسس حركة جدار المنطقة المغناطيسية الناتج عن تأثير المجال المغناطيسي المسلط . يعتمد حجم المناطق المغناطيسية بشكل كبير على نوع المواد ، وعلى ماضي العينة المغناطيسي ... وهكذا . إن القيم النموذجية لحجوم المناطق المغناطيسية تنحصر بين 10^{-6} و 10^{-2} من السنتمترات المكعبة .

6-11 الفيريت Ferrites

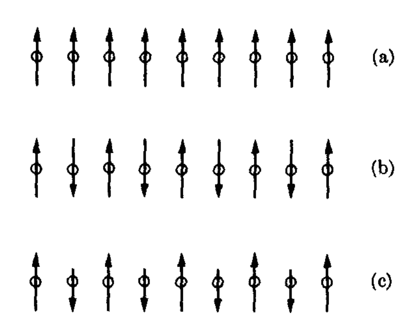
وفقاً للنظرية الفيرومغناطيسية لهايزنبيرك ، يكون هناك تغير في الطاقة الكهروستاتيكية مرافقاً للتغير الذي يحدث في البرم من وضع تراصف التوازي الى

* لدراسة مناقشة مختصرة للطريقة ، انظر ،

* F. H. Bitter, *Physical Review* **41,** 507 (1932).
L. F. Bates, *Modern Magnetism* (Cambridge University Press, 3rd ed., 1951), p. 457.

وضع التراصف المعاكس للتوازي للذرات المتجاورة . فإذا كان هذا التغير في الطاقة في صالح تراصف التوازي وفي الوقت نفسه ذا مقدار محسوس ، فإن المادة المكونة لهذه الذرات تكون فيرومغناطيسية . أما إذا كان التغير في الطاقة في صالح التراصف المعاكس للتوازي ، فإنه لا يزال بإمكاننا ايجاد تركيب برمي مرتب ، ولكن بصورة برم متناوب من ذرة الى ذرة خلال البلورة .

يطلق على تركيب برمي مرتب وذي صافي عزم مغناطيسي يساوي صفراً اسم لا فيرومغناطيس (الشكل 11-6b) . والتركيب البرمي المرتب الذي يحتوي على كلا المركبتين "برم اعلى" و "برم أسفل" ولكن ذا صافي عزم مغناطيسي لا يساوي صفراً في أحد هذين الاتجاهين هو من اكثر التراكيب البرمية شمولية . مثل هذه المادة يطلق عليها اسم فيريمغناطيس أو فيريت للسهولة . وأبسط مواد الفيريت ذات الأهمية المغناطيسية هي الاكاسيد المتمثلة بالصيغة الكيمياوية $MOFe_2O_3$ ، حيث يمثل M أيون عنصر ثنائي التكافؤ مثل Co و Ni و Mn و Cu و Mg و Zn و Cd أو حديد ثنائي التكافؤ "divalent iron" . تتبلور مواد الفيريت بتركيب بلوري معقد يعرف بتركيب اسبنيلي "spinel structure" . الأمثلة التقليدية لمواد الفيريت هي المعادن المغناطيسية (معادن أكسيد الحديد الاسود) والتي عرفت منذ قديم الزمان .



شكل **11-6** . تمثيل تخطيطي لبروم ذرية في تراكيب برمية مرتبة ، **(a)** فيرومغناطيسي ، **(b)** لا فيرومغناطيسي ، **(c)** فيريمغناطيسي .

لمواد الفيريت أهمية كبيرة في مجال التقنية بسبب كونها ضعيفة التوصيل للكهربائية ، اضافة الى كونها ذات تمغنط اشباعي كبير نسبياً . وبهذا يمكن استخدامها في تطبيقات التردد العالي حيث يكون لفقدان الطاقة الناتج عن

التيارات الدوامة في المواد الموصلة مشاكل خطيرة . هذا وأن المقاومة النوعية لمواد الفيريت تقع ضمن المدى من 1 الى 10000 أوم ـ متر . وللمقارنة فأن المقاومة النوعية الكهربائية للحديد تساوي تقريباً 10^{-7} أوم ـ متر .

مسائل

11-1 يُعرف مغنيطون بور بأنه عزم الالكترون المغناطيسي الذي يدور في "مدار بور" التقليدي لذرة الهيدروجين. هذا المدار هو مدار دائري ذو نصف قطر يساوي طول موجة دي بروي، حيث تقوم قوة كولوم التجاذبية بإكساب الالكترون تعجيلاً مركزياً، (أنظر مثلاً، كتاب: Sears and Zemansky, *University Physics*, Chapter 48, Addison-Wesley Publishing Co., Inc.).

برهن على أن:

$$1 \text{ Bohr magneton} = eh/4\pi m_e,$$

حيث تمثل m_e كتلة الالكترون و h يمثل ثابت بلانك.

11-2 يعدُّ مغنيطون بور الوحدة الطبيعية لقياس عزم الذرة المغناطيسي. احسب العزم المغناطيسي للذرة الواحدة، بوحدات مغنيطون بور للحديد وللنيكل وللكوبلت عند شروط التمغنط المشبع. استخدم المعلومات المعطاة في الجدول (10-2).

11-3 احسب شدة التأثير المتبادل بين اثنين من ثنائيات الأقطاب المغناطيسية الى نسبة شدة التأثير المتبادل بين اثنين من ثنائيات الأقطاب الكهربائية النموذجية، وبتعبير ادق احسب العزم الدوراني الذي يؤثر به أحد ثنائيي القطب على الآخر عندما يكون الثنائيان متعامدين وعلى بعد قدره انكستروم واحد، اعتبر كل ثنائي قطب مغناطيسي على أنه مساوٍ لمغنيطون بور واحد، وكل ثنائي قطب كهربائي على أنه مساوٍ لِـ (شحنة الالكترون × 0.1 أنكستروم). يتضح من نتيجة هذه الحسابات أن التأثير المغناطيسي المتبادل يكون أقل من التأثير الكهربائي المتبادل داخل المادة بعدد من الرتب (orders of magnitude).

11-4 احسب التأثرية الدايامغناطيسية للنيون عند شروط قياسية من درجة الحرارة والضغط ($0\,^{\circ}C$ و 1 atm.). وبفرض أن الاسهام آتٍ فقط من الألكترونات الخارجية الثمانية في كل ذرة وان متوسط نصف القطر يكون $R = 4.0 \times 10^{-9}$ cm.

11-5 يهبط التمغنط للمادة الفيرومغناطيسية الى الصفر عند درجة حرارة كوري. في الشكل (11-1) تمثل درجة حرارة كوري بالخط المستقيم المماس لدالة لانجفن عند نقطة الأصل. استخدم القيمة العملية لدرجة حرارة كوري للحديد لأيجاد γ للحديد.

11-6 تُعرف النسبة الجيرومغناطيسية (gyromagnetic ratio) لتوزيع تياري على أنها النسبة بين العزم المغناطيسي والزخم الزاوي. احسب النسبة الجيرومغناطيسية لكرة ذات كتلة M وشحنة Q تدور بسرعة زاوية قدرها ω حول محور يمر بمركز الكرة، مفترضاً ان الكتلة موزعة بصورة منتظمة خلال الكرة وأن الشحنة موزعة بصورة منتظمة على سطح الكرة.

الفصل الثاني عشر

الطاقة المغناطيسية
MAGNETIC ENERGY

يحتاج تكوين أي مجال مغناطيسي الى بذل طاقة ، وهذا يتبع بشكل مباشر قانون فرداي للحث . فاذا كانت ε_0 تمثل القوة الدافعة الكهربائية المؤثرة على دائرة كهربائية فإن التيار الذي يسري في الدائرة يمكن أن يعبر عنه بالمعادلة :

$$\varepsilon_0 + \varepsilon = IR, \tag{12-1}$$

حيث ε تمثل القوة الدافعة الكهربائية المحتثة و R هي مقاومة دائرة التيار . إن الشغل المنجز من قبل ε_0 لتحريك كمية $dq = Idt$ من الشحنة خلال الدائرة يكون :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0\, dq &= \varepsilon_0 I\, dt = -\varepsilon I\, dt + I^2R\, dt \\ &= I\, d\Phi + I^2R\, dt, \end{aligned} \tag{12-2}$$

إن الصيغة الاخيرة قد استخرجت بمساعدة قانون فرداي ، لاحظ المعادلة (1-9) ، حيث أن الحد I^2Rdt يمثل الطاقة الكهربائية المتحولة الى حرارة بشكل غير قابل للعكس خلال الدائرة الكهربائية . ولكن في حالات يكون فيها تغير الفيض يساوي صفراً فقط فإن هذا الحد سوف يمتص الشغل الداخل كلياً . وإن الحد الاضافي . $I\,d\Phi$، هو الشغل المنجز ضد القوة الدافعة الكهربائية المحتثة في الدائرة الكهربائية ، وهو ذلك الجزء من الشغل المنجز من قبل ε_0 الذي يعمل على تغيير بنية المجال المغناطيسي . وبتجاهل الحد $I^2R\,dt$ نكتب :

$$dW_b = I\, d\Phi, \tag{12-3}$$

حيث يشير الرمز السفلي b الى أن الشغل قد أنجز من قبل مصادر طاقة كهربائية خارجية (كالبطاريات على سبيل المثال)، وقد تكون الزيادة في الشغل (3-12) موجبة أو سالبة. فالزيادة تكون موجبة متى ماكان تغير الفيض $d\Phi$ خلال الدائرة الكهربائية في نفس اتجاه الفيض الناتج من قبل التيار I.

في الدائرة الكهربائية المستقرة الصلبة "rigid circuit" التي لا يحدث فيها فقدان في الطاقة عدا الفقدان الحراري لجول (مثلاً عدم وجود تخلف مغناطيسي)، يصبح الحد dW_b مساوياً لمقدار التغير في الطاقة المغناطيسية للدائرة. وسوف يناقش فقدان الطاقة بالتخلف المغناطيسي في بند لاحق (4-12)، ولكن حالياً سوف يقتصر أهتمامنا على الانظمة المغناطيسية القابلة للعكس.

12-1 الطاقة المغناطيسية لدائرة كهربائية مزدوجة.
Magnetic energy of coupled circuits

في هذا البند سوف نشتق صيغ جبرية للطاقة المغناطيسية لنظام دوائر التيار المتبادل التأثير. وبفرض وجود n من الدوائر الكهربائية، فأن الشغل الكهربائي المبذول ضد القوة الدافعة الكهربائية المحتثة، ووفقاً للمعادلة (3-12) يكون:

$$dW_b = \sum_{i=1}^{n} I_i\, d\Phi_i. \tag{12-4}$$

إن هذه الصيغة تمثل صيغة عامة تماماً، وانها سارية المفعول بشكل مستقل عن كيفية حدوث زيادات الفيض $d\Phi_i$. ومع ذلك، فإننا مهتمون بشكل خاص في الحالة حيث تنتج $d\Phi_i$ عن تغيرات التيار في الـ n من الدوائر الكهربائية ذاتها. ففي هذه الحالة تكون تغيرات الفيض مترابطة بشكل مباشر مع التغيرات في هذه التيارات:

$$d\Phi_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j}\, dI_j = \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\, dI_j. \tag{12-5}$$

فإذا كانت الدوائر صُلْبَة ومستقرة، آنذاك لا يوجد شغل ميكانيكي ملازم لتغيرات الفيض $d\Phi_i$، وان dW_b يساوي بالضبط التغير في الطاقة المغناطيسية dW للمنظومة. لاحظ هنا، بأننا حصرنا اهتمامنا بالدوائر الثابتة، وبهذا يمكننا حساب

الطاقة المغناطيسية كحد شغل مستقل . لاحقاً سوف نفرض تحرك الدوائر الكهربائية المختلفة واحدة بالنسبة للاخرى . ولكن في حينها لا يمكننا ان نُعَرّف dW بدلالة dW_b .

بتكامل المعادلة (12-4) ، يمكننا إيجاد الطاقة المغناطيسية W لمنظومة متكونة من n من الدوائر المستقرة الصُلْبَة ، على أن نأخذ حدود التكامل من موضع الفيض الصفري (الذي يتوافق مع جميع التيارات $I_i = 0$) الى المجموعة النهائية لقيم الفيض . لمجموعة من الدوائر الصُلْبَة الموجودة في أوساط مغناطيسية خطية . فإن Φ_i تكون متناسبة خطياً مع تيارات الدوائر الكهربائية ، وأن الطاقة المغناطيسية لا تعتمد على الكيفية التي أوصلت تلك التيارات الى قيمها النهائية . ولما كانت هذه الوضعية جديرة الاهمية ، فاننا سوف نحصر اهتمامنا بالدائرة الصُلْبَة ذات الصفة الخطية .

لما كانت الطاقة النهائية لا تعتمد على نمط تغير التيارات ، فبإمكاننا ان نختار خطة خاصة تمكننا بسهولة حساب W . وهذه الخطة تقتضي أن تصل كافة التيارات (ومن ثم كافة قيم الفيض) الى قيمها النهائية بشكل منسجم . وهذا يعني ان كافة التيارات (وكافة قيم الفيض كذلك) ينبغي ان تكون بنفس القيمة الجزئية من تياراتها النهائية عند أية لحظة زمنية . لنعبر عن هذا الجزء بالرمز α ، فإذا كانت القيم النهائية للتيارات تمثل بالرموز :

$$I_1^{(f)}, \quad I_2^{(f)}, \quad \ldots, \quad I_n^{(f)},$$

عندئذٍ ينتج :

$$I_i = \alpha I_i^{(f)};$$

علاوة على ذلك ، فإن :

$$d\Phi_i = \Phi_i^{(f)}\, d\alpha.$$

وبتكامل المعادلة (12-4) ينتج :

$$W = \sum_{i=1}^{n} I_i^{(f)} \Phi_i^{(f)} \int_0^1 \alpha\, d\alpha$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} I_i^{(f)} \Phi_i^{(f)}.$$

استعمل الرمز العلوي (f) لمجرد تحديد الكمية التي تبقى ثابتة على الرغم من تغير α . والآن نجد الفرصة ملائمة لاسقاط الرموز العلوية ونكتب الصيغة :

$$W = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} I_i \Phi_i \qquad \text{[دائرة صُلْبَة ، أوساط خطية]} \qquad (12\text{-}6)$$

وبمساعدة المعادلة (5-12) ، وبتكاملها بشكل مباشر لدائرة صُلْبَة ولنظام خطي ، يصبح بالامكان التعبير عن الطاقة المغناطيسية بالصيغة الآتية :

$$\begin{aligned} W &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}I_iI_j \\ &= \tfrac{1}{2}L_1I_1^2 + \tfrac{1}{2}L_2I_2^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}L_nI_n^2 \\ &+ M_{12}I_1I_2 + M_{13}I_1I_3 + \cdots + M_{1n}I_1I_n \\ &+ M_{23}I_2I_3 + \cdots + M_{n-1,n}I_{n-1}I_n \end{aligned} \qquad (12\text{-}7)$$

وهنا استعملنا النتائج والرموز الواردة في البندين 3-9 و 4-9 :

$$M_{ij} = M_{ji};\ M_{ii} \equiv L_i.$$

للدوائر الكهربائية المزدوجة ، فإن المعادلة الاخيرة تؤول الى :

$$W = \tfrac{1}{2}L_1I_1^2 + MI_1I_2 + \tfrac{1}{2}L_2I_2^2, \qquad (12\text{-}8)$$

حيث كتبنا M بدلاً عن M_{12} للتبسيط فقط . وقد يكون الحد MI_1I_2 موجباً أو سالباً ، ولكن ينبغي أن تكون الطاقة المغناطيسية الكلية W موجبة (أو صفراً) لأي زوج من قيم التيار I_1 و I_2 . وبجعل x تدل على النسبة I_1/I_2 ، نحصل على :

$$W = \tfrac{1}{2}I_2^2(L_1x^2 + 2Mx + L_2) \geq 0. \qquad (12\text{-}9)$$

قيمة x التي تجعل W في قيمتها الدنيا (أو القصوى) يمكن ايجادها بتفاضل W بالنسبة الى x وبجعل الناتج يساوي صفراً :

$$x = -\frac{M}{L_1}. \qquad (12\text{-}10)$$

تكون المشتقة الثانية للكمية W بالنسبة الى x موجبةً ، وهذا يعني ان المعادلة (10-12) تمثل شرطاً للقيمة الدنيا . لأي قيمة من قيم x فإن الطاقة المغناطيسية ($W \geq 0$) ، وعلى وجه التخصيص ، القيمة الدنيا للكمية W (المعرفة بـ $x = -M/L_1$) اما أن تكون اكبر من الصفر أو تساوي صفراً . وبهذا :

$$\frac{M^2}{L_1} - \frac{2M^2}{L_1} + L_2 \geq 0$$

أو

$$L_1L_2 \geq M^2, \qquad (12\text{-}11)$$

وقد ذُكر نص هذه النتيجة في البند (3-9) ولكن لم تبرهن في حينها .

2-12 كثافة الطاقة في المجال المغناطيسي
Energy density in the magnetic field

تمثل المعادلة (7-12) الطاقة المغناطيسية لمنظومة تيار بدلالة مَعْالِم «parameters» الدائرة الكهربائية : التيارات والحاثات . وبالتحديد فإن مثل هذه الصيغ مفيدة لأن هذه المعالم قابلة للقياس المباشر تجريبياً . ومن الجانب الآخر فإن الصيغة البديلة للطاقة المغناطيسية بدلالة متجهات المجال **B** و **H** تكون جديرة بالاهتمام لانها توضح كيفية خزن الطاقة في المجال المغناطيسي ذاته . وهذه الصورة عن كيفية خزن الطاقة يمكن توسيعها ، وكما انجز في الفصل الخامس عشر ، لتوضح كيفية انتقال الطاقة خلال المجال الكهرومغناطيسي في العمليات غير المستقرة .

افرض مجموعة من الدوائر الكهربائية الصُلَبْة الحاملة للتيار ، وبشرط أن لا يمتد أي منها الى مالا نهاية ، قد غمست جميعها في وسط مادي ذي خواص مغناطيسية خطية . أن طاقة هذه المنظومة تمثل بالمعادلة (6-12) . ومن المناسب في هذه المناقشة أن نفرض كل دائرة كهربائية متكونة من دورة كهربائية منفردة ، وبهذا يمكننا التعبير عن الفيض Φ_i بالصيغة الآتية :

$$\Phi_i = \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, da = \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i, \qquad (12\text{–}12)$$

حيث **A** يمثل متجه الجهد الموضعي «local vector potential» . وبتعويض هذه النتيجة في المعادلة (6-12) ينتج :

$$W = \tfrac{1}{2} \sum_i \oint_{C_i} I_i \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i. \qquad (12\text{–}13a)$$

نود أن نعيد صياغة المعادلة (12-13a) بحيث تصبح أكثر شمولية . دعنا نفرض بأن دوائر التيار غير محددة بشكل جيد ، وبدلاً من ذلك نعدُّ الدائرة الكهربائية على أنها مسار مغلق في وسط مادي (والذي اخترناه بأن يكون موصلاً) . ولجعل المعادلة (12-13a) تمثل هذه الوضعية بشكل تقريبي نختار عدداً كبيراً من الدوائر الكهربائية المتلامسة C_i . وباستبدال :

$$I_i\, d\mathbf{l}_i \rightarrow \mathbf{J}\, dv,$$

و

$$\int_V \longrightarrow \sum_i \oint_{C_i}:$$

ينتج الآتي :

$$W = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{A}\,dv. \tag{12–13b}$$

وبإجراء تحويلات اضافية مستخدمين معادلة المجال **curl H = J** والمتطابقة المتجهة (I–7) :

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{A}\times\mathbf{H}) = \mathbf{H}\cdot\mathbf{curl}\,\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{curl}\,\mathbf{H},$$

يمكننا كتابة المعادلة (12–13b) بالصيغة الآتية :

$$W = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{H}\cdot\mathbf{curl}\,\mathbf{A}\,dv - \frac{1}{2}\int_S \mathbf{A}\times\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\,da, \tag{12–14}$$

حيث **S** يمثل السطح الذي يحدد الحجم V . ولما كنا قد فرضنا أن أياً من "دوائر" التيار غير ممتدة الى مالانهاية ، فمن المناسب بسط حدود السطح **S** الى مسافات كبيرة جداً بحيث ان كافة أجزاء هذا السطح تكون بعيدة عن التيارات الكهربائية . وبالطبع فإن حجم المنظومة سيزداد وفقاً لذلك . ونجد الآن أن المتجه **H** يتضاءل بنفس سرعة تضاؤل $1/r^2$ على أقل تقدير ، حيث تمثل r المسافة من نقطة أصل قريبة من منتصف توزيع التيار الى نقطة مميزة على السطح **S** . وكذلك فإن **A** يتضاءل تبعاً لتضاؤل $1/r$ على أقل تقدير ، وان المساحة السطحية تتناسب مع r^2 . وهكذا فإن مساهمة التكامل السطحي في المعادلة (12–14) تتضاءل كتضاؤل $1/r$ أو أسرع من ذلك ، واذا أمتدت حدود S الى مالانهاية ، فإن هذه المساهمة تتلاشى .

بإسقاط التكامل السطحي من المعادلة (12–14) ، وبإمداد حدود الحجم ليشمل كل الفضاء ، وبما أن **B = curl A** ، نجد أن :

$$W = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\,dv, \tag{12–15}$$

هذا الناتج مشابه بالكامل الى صيغة الطاقة الكهروستاتيكية ، المتمثلة بالمعادلة (6–17) . وبما أن المعادلة (12–15) كانت قد اشتقت من المعادلة (12–6) فإنها تصبح مقتصرة على منظومات تحتوي على أوساط مادية ذات خواص خطية .

وباتباع المناقشة نفسها التي وردت في البند (3-6) نهتدي الى مفهوم كثافة الطاقة في المجال المغناطيسي :

$$w = \tfrac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}, \tag{12-16a}$$

وهذه النتيجة تختصر الى الصيغة الآتية :

$$w = \tfrac{1}{2}\mu H^2. \tag{12-16b}$$

في حالة المواد المغناطيسية الخطية المتساوية الخواص في كل الاتجاهات .

12-3 القوى والعزوم على الدوائر الصُلْبَة
Forces and torques on rigid circuits

لحد الآن أوضحنا بالتفصيل عدداً من الصيغ البديلة للطاقة المغناطيسية لمنظومة من دوائر التيار الكهربائي. هذه الصيغ معطاة بالمعادلات (12-6) و (12-7) و (12-15) . وسنوضح الآن كيفية حساب القوة أو العزم على احدى هذه الدوائر الكهربائية من معرفة الطاقة المغناطيسية .

لنفرض أن إحدى الدوائر الكهربائية تركت لتعمل ازاحة صُلْبَة قدرها $\mathbf{dr}$ نتيجة تأثير قوى مغناطيسية مؤثرة عليها ، وان كافة التيارات الكهربائية تبقى ثابتة . إن الشغل الميكانيكي المنجز من قبل المنظومة وتحت تلك الظروف يساوي :

$$dW_m = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{12-17}$$

ولكن قانون حفظ الطاقة يتطلب أن يكون :

$$dW + dW_m = dW_b, \tag{12-18}$$

حيث dW يمثل التغير في الطاقة المغناطيسية للمنظومة و dW_b يمثل الشغل المنجز من قبل مصادر طاقة خارجية تجاه القوة الدافعة الكهربائية المحتثة .

قبل أن نقدم صيغة تربط بين W والقوة المؤثرة على الدائرة الكهربائية ، فإنه من المطلوب حذف dW_b من المعادلة (12-18) . ويمكننا إجراء ذلك بسهولة لمنظومة الدوائر الكهربائية الصُلْبَة في أوساط مغناطيسية خطية . فإذا تغيرت الابعاد الهندسية للمنظومة على أن تبقى كافة التيارات الكهربائية ثابتة ، نحصل على الآتي وفقاً للمعادلة (12-6) :

$$dW = \frac{1}{2} \sum_i I_i \, d\Phi_i. \qquad (12\text{–}19)$$

ولكن ، من المعادلة (4-12) :

$$dW_b = \sum_i I_i \, d\Phi_i.$$

نجد :

$$dW_b = 2 \, dW. \qquad (12\text{–}20)$$

وبإستخدام هذه المعادلة لحذف dW_b من المعادلة (18-12) ، وبدمج الناتج مع المعادلة (17-12) نجد :

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

أو

$$\mathbf{F} = \mathbf{grad}\, W. \qquad (12\text{–}21)$$

إن القوة المؤثرة على الدائرة الكهربائية تمثل انحدار الطاقة المغناطيسية .

فإذا كانت الدائرة الكهربائية المدروسة مقيدة بحركة بحيث أنها تدور حول محور معين ، فإن المعادلة (17-12) يمكن استبدالها بالصيغة :

$$dW_m = \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} = \tau_1 \, d\theta_1 + \tau_2 \, d\theta_2 + \tau_3 \, d\theta_3,$$

حيث τ يمثل العزم المغناطيسي على الدائرة الكهربائية و $d\boldsymbol{\theta}$ يمثل الإزاحة الزاوية . وتحت هذه الظروف ، فإن :

$$\tau_1 = \frac{\partial W}{\partial \theta_1}, \qquad (12\text{–}22)$$

وهلم جرا .

وبالضبط كما في الحالة الكهروستاتيكية (التي نوقشت في البند 7-6) ، ولغرض استخدام طريقة الطاقة فمن الضروري التعبير عن W بصيغة تحليلية . وهذا يعني ، أنه ينبغي اعطاء صيغ الاعتماد المعين لِـ W على الاحداثيات المتغيرة (x، y، z، θ_1، θ_2، θ_3) . ومع ذلك ، فعند اجراء هذا الشيء تصبح طريقة الطاقة هي الاسلوب الفعال لحساب القوى والعزوم .

لتوضيح هذه الطريقة سوف ندرس مثالين . وهناك تمارين اضافية لهذه الطريقة معطاة في المسائل الموجودة في نهاية الفصل . في مثالنا الاول سوف نحسب القوة بين دائرتي تيارٍ صُلْبَتينْ . الطاقة المغناطيسية معطاة بالمعادلة (8-12) ، والقوة على الدائرة 2 تكون :

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{grad}_2\, W = I_1 I_2\, \mathbf{grad}_2\, M, \tag{12-23}$$

حيث ان الحاثة المتبادلة M يجب ان تكتب بحيث تبرز اعتمادها على المتجه $\mathbf{r}_2$. ومعادلة نيومان (المعادلة 35-9) تمثل هذا الاعتماد بوضوح ، وبهذا يمكننا ان نكتب الآتي :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1}\oint_{C_2} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)\, \mathbf{grad}_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1}\oint_{C_2} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3},\end{aligned} \tag{12-24}$$

هذه صيغة توضح جلياً التناظر المناسب ، ونعني به $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$. ومع ذلك فقد أوجدنا سابقاً صيغة للقوة بين دائرتين . لاحظ المعادلة (25-8) ، حيث تبدو لاول وهلة أنها تختلف عن المعادلة المشتقة منذ قليل . والحقيقة ان الصيغتين متماثلتان . ويمكن التحقق من صحة ذلك بسهولة ، بأخذ مفكوك الضرب الثلاثي للتكامل في المعادلة (25-8) على النحو الآتي :

$$d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] = d\mathbf{l}_1[d\mathbf{l}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2).$$

بعد تعويض المفكوك فان الحد الاخير في الجهة اليمنى للتكامل يتشابه مع المعادلة (24-12) . أما الحد الاول فيمكن ان يكتب بالصيغة الآتية :

$$\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} d\mathbf{l}_1 \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \tag{12-25}$$

والآن نجد ان المقدار $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. $d\mathbf{l}_2$ يمثل $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ مضروباً في مسقط $d\mathbf{l}_2$ على المتجه $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.لنرمز للمقدار $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ بالرمز r_{21}. وبذلك يكون مسقط $d\mathbf{l}_2$ مساوياً لـ dr_{21} . ويمكننا استخراج التكامل حول C_2 عند ثبوت $d\mathbf{l}_1$:

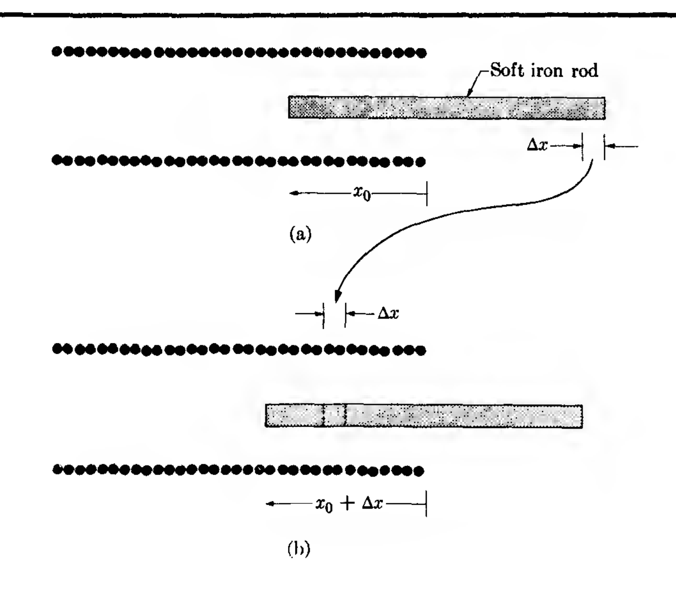
$$\oint_{C_2} \frac{dr_{21}}{r_{21}^2} = -\frac{1}{r_{21}}\Big|_a^a,$$

ولكون الدائرة الكهربائية كاملة ومغلقة فان غايتي التكامل العليا والسفلى متشابهتان . وبهذا فأن المعادلة (25-12) سوف تتلاشى ، ومن ثم فإن المعادلة (24-12) ستصبح مكافئة الى المعادلة (25-8) .

وكمثال ثانٍ ، ندرس ملفاً حلزونياً طويلاً ، عدد لفاته N وطوله l ويحمل تياراً قدره I ، ونضع فيه قضيباً حديدياً نحيفاً ، مساحة مقطعه A وذو نفوذية مغناطيسية قدرها μ على طول محور الملف الحلزوني . فاذا سحب القضيب الى

الخارج (الشكل 12-1a) على ان يبقى نصفه داخل الملف الحلزوني ، أحسب بشكل تقريبي القوة التي تعمل على سحبه وإعادته الى وضعه الاول .

الحل : ان تركيبة المجال المغناطيسي المرافقة مع هذا السؤال تكون معقدة الى حد كبير ، ولكن لحسن الحظ لسنا بحاجة لحساب الطاقة المغناطيسية للمنظومة بالشكل الكامل ، بل نحسب فرق الطاقة للموضعين الموضحين بالشكلين (12-1a) و (12-1b) ليس غير . ان تركيبة المجال الابتدائي (الناشيء عن التيارات) يكون



الشكل 12-1. القوة على قضيب حديدي ادخل في ملف حلزوني ، (بطريقة الطاقة)

منتظماً نسبياً داخل الملف الحلزوني . اما المجال المرافق للقضيب الحديدي الممغنط فيكون معقداً ، ولكنه يتحرك على طول القضيب . إن الفرق الرئيس بين الوضعين (a) و (b) هو أن الطول Δx عند النهاية اليمنى البعيدة للقضيب (خارج منطقة المجال) ينتقل بشكل فعال الى منطقة المجال المنتظم داخل الملف الحلزوني ، عند موقع وراء نطاق تأثير ازالة المغناطيسية لقطب المغناطيس . وبهذا ينتج ،

$$W(x_0 + \Delta x) \approx W(x_0) + \tfrac{1}{2}\int_{A\,\Delta x} (\mu - \mu_0) H^2\, dv$$
$$= W(x_0) + \tfrac{1}{2}(\mu - \mu_0)\frac{N^2 I^2}{l^2} A\, \Delta x,$$

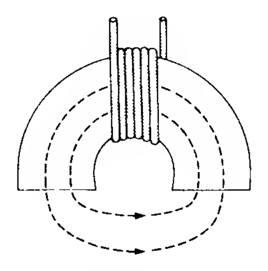
و

$$F_x \approx \tfrac{1}{2}(\mu - \mu_0)\frac{N^2 I^2 A}{l^2}. \qquad (12\text{–}26)$$

12-4 الفقدان الناجم عن التخلف المغناطيسي **Hysteresis loss**

لقد حُددت مناقشاتنا في البنود السابقة بالمنظومات المغناطيسية القابلة للعكس «reversible» ، وفي معظم الحالات بالأنظمة ذات المواصفات الخطية . والآن سنناقش تغيرات الطاقة في الأنظمة التي تحتوي على مواد ممغنطة طبيعياً ، أي أن التخلف المغناطيسي يمثل القاعدة البارزة في مثل هذه الأنظمة . لندرس دائرة كهربائية ، على شكل ملف ، عدد لفاته تساوي N ومتقاربة فيما بينها والتي تحيط بقطعة معدنية من مادة فيرومغناطيسية (الشكل 2-12) . وبربط الملف بمصدر طاقة كهربائية خارجية ، فإن الشغل المنجز ضد القوة الدافعة الكهربائية المحتثة في الملف سيمثل في المعادلة (3-12) . ومع ذلك ، ففي المعادلة (3-12) يمثل تغير الفيض المغناطيسي dΦ التغير الكلي للفيض المغناطيسي خلال الدائرة الكهربائية . ومن المناسب في هذا المثال جعل الرمز dΦ يمثل التغير في الفيض المغناطيسي خلال لفة واحدة من الملف . واذا فرضنا بأنه يقطع كل لفة من لفات الملف نفس المقدار من الفيض ، لنتج ،

$$\delta W_b = NI\, \delta\Phi. \qquad (12\text{–}3a)$$



الشكل 2-12 نموذج فيرومغناطيسي يشكل جزءاً من دائرة مغناطيسية

لندرس النموذج الفيرومغناطيسي على اعتباره جزءاً مكوناً لدائرة مغناطيسية . عندئذ يصبح من الممكن احلال $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ بدلاً عن NI حول مسار نموذجي للفيض المغناطيسي . والمعادلة (12–3a) تصبح* :

$$\delta W_b = \oint \delta\Phi\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint A \; \delta B\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l},$$

حيث A تمثل مساحة مقطع الدائرة المغناطيسية المناسبة لمسافة محددة طولها dl . بما أن dl مماسة دائماً الى مسار الفيض ، فإن المعادلة السابقة يمكن كتابتها بالشكل الآتي :

$$\delta W_b = \oint A \; \delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dl = \int_V \delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dv, \qquad (12\text{–}27)$$

حيث V يمثل حجم الدائرة المغناطيسية ، أو بمعنى آخر ، يمثل منطقة الموقع التي تكون فيها قيمة المجال المغناطيسي مختلفة عن الصفر .

فإذا كانت المواد الفيرومغناطيسية في المنظومة تظهر خواص مغناطيسية قابلة للعكس ، فإن المعادلة (12–27) يمكن استخدامها لايجاد الطاقة المغناطيسية للمنظومة بتكاملها من $B = 0$ الى قيمة B النهائية . لمادة ذات مواصفات خطية فإن الطاقة التي ستحصل عليها المنظومة ستكون مماثلة الى تلك الطاقة المتمثلة بالمعادلة (12–15) . ولكن المعادلة (12–27) تمثل صيغة شاملة اكثر من المعادلة الاخرى ، كما انها تتنبأ بصورة مضبوطة عن مقدار الشغل المنجز على المنظومة المغناطيسية حتى في حالة وجود التخلف المغناطيسي .

وحسب المعادلة (12–27) فإن التغير في تركيبة المجال المغناطيسي سوف يدل ضمناً على الشغل الداخل :

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \qquad (12\text{–}28)$$

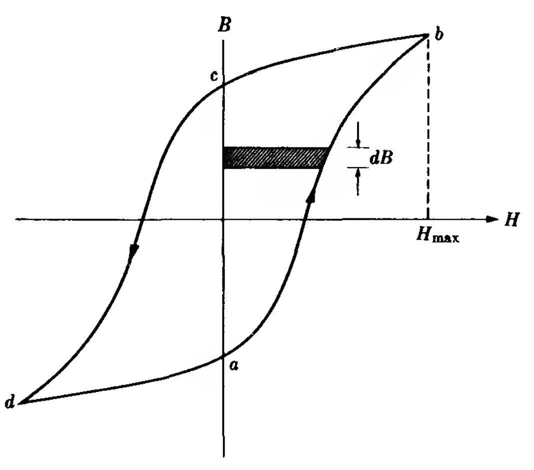
* من الممكن وضع التحليل المقدم هنا بأسس دقيقة جداً الى حد ما ، بأن تستبدل الدائرة المغناطيسية بعدد كبير من مسارات فيض مغناطيسي ذي اطوال مختلفة (دوائر مغناطيسية متوازية) وبهذا ستصبح المعادلة (12–3a) بالصيغة الآتية :

$$\delta W_b = NI \sum_i \delta\Phi_j = \sum_i \oint_j \delta\Phi_j \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}_j,$$

حيث $\delta\Phi_j$ يمثل تغير الفيض المرافق لواحدة من تلك المسارات . وان النتيجة النهائية ، المعادلة (12–27) ، تكون غير متغيرة .

المرافق لكل وحدة حجم من المادة المغناطيسية (أو الفراغ) في المنظومة . ومن الحالات الجديرة بالاهتمام هي حالة المادة التي تقع تحت تأثير متكرر بأنتظام ، كما في حالة احاطة ملف حلزوني لعينة مادية وامرار تيار متناوب فيه . إن شدة المجال المغناطيسي H (في نقطة نموذجية من العينة) وخلال دورة واحدة ، تبدأ من الصفر وتزداد الى القيمة القصوى $H_{max.}$ ، ثم تتناقص الى $-H_{max.}$ ، وبعدها تعود الى الصفر . وكذلك فإن الحث المغناطيسي B يظهر تغيرات مماثلة ، ولكنه في حالة وجود مادة فيرومغناطيسية نموذجية فانه يتخلف وراء H . وبالتالي يظهر شكل منحني التخلف المغناطيسي (الشكل 3-12) . الشغل الداخل (لوحدة الحجم) يتطلب تغير الحث المغناطيسي من نقطة a الى نقطة b على منحني التخلف المغناطيسي ،

$$(w_b)_{ab} = \int_a^b H\, dB,$$



شكل 3-12 الشغل المنجز لوحدة الحجم لدورة مادة فيرومغناطيسية .

وانه بالضبط يمثل المساحة المحصورة بين جزء منحني التخلف ab والاحداثي B- . ولكون كل من H و dB موجباً فإن مقدار الشغل السابق سيكون موجباً . والجزء $(w_b)_{bc}$ من الشغل يمثل كذلك المساحة المحصورة بين الجزء المناسب من المنحني (bc) والاحداثي B- ، ولكن يجب أن يؤخذ سالباً لأن H و dB لهما

اشارتان متعاكستان . ويمكننا اتباع المناقشة السابقة نفسها لقيم $(w_b)_{cd}$ و $(w_b)_{da}$. وبهذا ، فإن الشغل المطلوب لوحدة الحجم لعمل دارة «loop» واحدة حول منحني التخلف المغناطيسي تكون :

$$w_b = \oint H\,dB, \tag{12–29}$$

والتي تمثل المساحة المحصورة في دارة التخلف المغناطيسي .

عند نهاية دورة واحدة كاملة ، تكون الحالة المغناطيسية للمادة على حالتها الاولى عند بدء الدورة . وبهذا فإن ''الطاقة المغناطيسية'' للمادة هي عينها . ومن ثم ، فمن الواضح بأن المعادلة (12–29) تمثل الطاقة المفقودة . وتظهر هذه الطاقة المفقودة كحرارة تنتج خلال التغيرات غير القابلة للعكس في تركيب المنطقة المغناطيسية للمادة . ان الفقدان في الطاقة الناجم من التخلف المغناطيسي عامل مهم في الدوائر الكهربائية المعرضة لفعالية التيار المتناوب . والمعادلة (12–29) تمثل الطاقة المفقودة لوحدة الحجم لدورة واحدة ، وبهذا فإن الطاقة المفقودة لوحدة الزمن تتناسب طردياً مع تردد التيار المتناوب .

طبقاً للمعادلة (12–28) فإن الشغل اللازم لتغيير الحث المغناطيسي في وحدة الحجم من المادة تكون :

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \mu_0 H\,dH + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}. \tag{12–28a}$$

من المناسب في بعض الأحيان أن نعدَّ الحد $\mu_0 H\,dH$ على أنه الشغل المنجز على الفراغ بغض النظر عن وجود أو عدم وجود المادة المغناطيسية . ومن ثم ، من وجهة النظر هذه . فأن الحد $\mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$ يمثل الشغل النوعي المنجز على المادة . هذا هو الأسلوب الذي تتناوله إعتيادياً كتب الثرموداينميك المنهجية ، وإنه يشكل الأسس لمناقشة عمليات مثل ''التبريد المغناطيسي'' .

بما أن تكامل الكمية HdH يتلاشى لدورة كاملة ، فإن المعادلة (12–29) تكافيء الصيغة الآتية :

$$w_b = \mu_0 \oint H\,dM. \tag{12–29a}$$

مسائل

12-1 وضعت دائرة تيار كهربائي في مجال مغناطيسي معلوم . القوة المغناطيسية المؤثرة على كل عنصر من عناصر الدائرة dl تعطى بالعلاقة $I\,d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$. فإذا تركت الدائرة لتتحرك تحت تأثير القوى المغناطيسية ، بحيث يزاح عنصر نموذجي من الدائرة بكمية قدرها $\delta \mathbf{r}$ وبنفس الوقت يبقى التيار I ثابتاً ، وضح بطريقة الحساب المباشر أن الشغل الميكانيكي المنجز من قبل الدائرة يكون $dW_m = I\,d\Phi$، حيث $d\Phi$ تمثل الفيض الإضافي خلال الدائرة .

12-2 مجموعة من دوائر كهربائية متبادلة التأثير وضعت في وسط مغناطيسي خطي . بقيت كافة الدوائر في حالة مستقرة ماعدا الدائرة رقم 1 التي تركت تتحرك ، فإذا علمت أن قيم كافة التيارات بقيت ثابتة وضح من خلال دمج المعادلات (4-12) و (6-12) و (18-12) أن الشغل الميكانيكي الذي تنجزه الدائرة المتحركة يكون :

$$dW_m = I_1\,d\Phi_1,$$

حيث أن $d\Phi_1$ يمثل التغير في الفيض خلال الدائرة رقم 1 .

12-3 افرض وجود دائرتي تيار متبادلتي التأثير . تميز هاتان الدائرتان بالمحاثات :

$$L_1 = \beta I_1^s \text{ و } M_{12} = M_{21} = \beta I_1^{s/2} I_2^{s/2}, \text{ و } L_2 = \beta I_2^s,$$

إذ أن الرمزين β و s يمثلان مقداراً ثابتاً . هذه المنظومة تعدُّ منظومة مغناطيسية قابلة للعكس ولكنها ليست خطية . احسب الطاقة المغناطيسية للمنظومة بدلالة التيارات النهائية $I_1^{(f)}$ و $I_2^{(f)}$ بطريقتين : أولاً بجلب التيارات الى قيمها النهائية بشكل متزامن ، وثانياً : بجلب I_1 الى قيمته النهائية مع الحفاظ على قيمة التيار I_2 مساوية للصفر ، ومن ثم تغير قيمة I_2 .

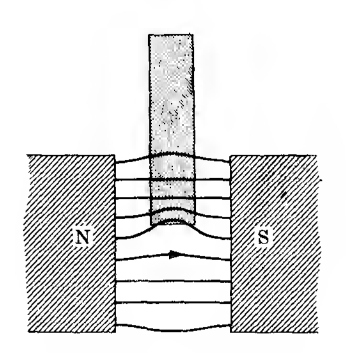
12-4 . دائرة كهربائية على شكل لفة دائرية مصنوعة من سلك نصف قطرها يساوي b وضعت في مركز لفة كبيرة نصف قطرها يساوي a ، بحيث ان b<<a. الدائرة الصغيرة مثبتة بحيث يمكنها الدوران بحرية حول أحد أقطارها ، ويقع هذا القطر في مستوي الدائرة الكبيرة . تحمل الدائرتان تيارين مستمرين قيمتها I_b و I_a على الترتيب . فإذا كانت الزاوية المحصورة بين العمودين المقامين على الدائرتين تساوي θ ، احسب العزم المؤثر على الدائرة المتحركة . في أي اتجاه يكون هذا العزم ، عندما يدور التياران I_b و I_a بنفس الاتجاه .

*12-5 مغناطيس كهربائي على شكل حرف U طوله يساوي 1 ، المسافة بين قطبيه تساوي d ، يمتلك نفوذية قدرها μ ومساحة مقطع مربعة تساوي A . يحيط

بهذا المغناطيس سلك يحمل تياراً قدره I ويعمل عدداً من اللفات قدره N . أحسب القوة التي يمسك بها المغناطيس قضيباً مصنوعاً من المادة نفسها وذا مساحة مقطع مساوية لمقطع المغناطيس بحيث يوضع القضيب مقابل قطبيه .

12-6 مغناطيس دائمي ذو تمغنط ثابت ، ودائرة كهربائية متصلة ببطارية يشكلان منظومة معزولة . سمح للدائرة أن تتحرك بالنسبة للمغناطيس على أن يبقى تيار الدائرة I ثابتاً . فاذا علم أن الشغل الميكانيكي المنجز من قبل الدائرة قد أعطي في المسألة (12-1) ، ماالاستنتاج الذي يمكنك إستنباطه حول التغير في الطاقة المغناطيسية لهذه المنظومة ؟

12-7 مجال الحث المغناطيسي بين قطبي مغناطيس كهربائي يكون متناظراً نسبياً وذا قيمة ثابتة قدرها $\mathbf{B_0}$. وضع قضيب من مادة پارامغناطيسية في هذا المجال كما هو مبين في الشكل (12-4) وأجبر على حركة عمودية فيه . فاذا كانت قابلية التمغنط لمادة القضيب χ_m ومساحة مقطعه تساوي A ، (أ) أحسب القوة المؤثرة على القضيب و (ب) أوجد القيمة العددية للقوة اذا علمت أن مادة القضيب هي التيتانيوم ، وأن $A = 1\,cm^2$ و $B_0 = 0.25\,w/m^2$.



شكل 12-4 . قضيب من مادة بارا مغناطيسية ادخل بين قطبي المغناطيس .

* 12-8 القوة المؤثرة على دائرة تيار في مجال مغناطيسي مفترض تساوي :

$$\mathbf{F} = I\,\nabla\Phi$$

حسب نتيجة المسألة (12-1) . فاذا كانت الدائرة صغيرة جداً ، فان المجال المغناطيسي **B** يمكن عدّه مقداراً ثابتاً على السطح المحدد بالدائرة . وفضلاً عن ذلك ، فان الدائرة نفسها قد توصف بدلالة عزم ثنائي قطبها المنغاطيسي **m** . وضح

بانه ، عندما لايملك المجال المغناطيسي المفروض مصادراً (أي ان كلاً من $\mathbf{J}$ و $\mathbf{J}_M$ يساوي صفراً) عند موقع ثنائي القطب ، فان القوة المؤثرة على ثنائي القطب تصبح :

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B}.$$

12-9 دائرة صُلْبَة مكونة من دارة واحدة موضوعة في مجال حث مغناطيسي معطى بالعلاقة :

$$B = K\mathbf{r}/r^3.$$

وضح بأن القوة المؤثرة على الدائرة تساوي :

$$\mathbf{F} = KI\nabla\Omega,$$

حيث Ω تمثل الزاوية المجسمة التي تكونها الدائرة عند مركز المجال ، و I يمثل التيار المار في الدائرة .

12-10 يقع مركز دائرة كهربائية مستوية ذات شكل دائري نصف قطره R على الاحداثي x وعند مسافة قدرها x عن نقطة الاصل . تحمل الدائرة الكهربائية تياراً قدره I ، ونقاط العمود الموجب تكون في اتجاه (x−) . أوجد القوة المؤثرة على الدائرة الكهربائية من قبل مجال حث شعاعي متباعد عن نقطة الاصل معطى بالعلاقة :

$$\mathbf{B} = K\mathbf{r}/r^3.$$

12-11 خمّن المساحات المحصورة بين منحني تخلف مغناطيسي (لاحظ الشكل 10-8) ، وأحسب القدرة المفقودة لوحدة الحجم الناتجة عن التخلف المغناطيسي في هذه المواد عند تردد مقداره 60 cycles/ sec .

12-12 لب مولد مصنوع من الحديد ، متوسط دارة التخلف المغناطيسي عند شروط التشغيل هي $2000\ joules/\ m^3$. اللب ذو شكل اسطواني طوله يساوي 0.4 m وقطره يساوي 0.15 m . فاذا دار اللب بسرعة دورانية مقدارها 1800 rpm ، أحسب المعدل الزمني لتولد الحرارة فيه .

12-13 وضعت دائرة تيار كهربائية في مجال مغناطيسي معين . وعندما تتحرك هذه الدائرة فانها تنجز شغلاً ميكانيكياً هو كما معطى بالسؤال (12-1) . أفرض الآن ان الدائرة الكهربائية هي دائرة ذرية ، وأن التيار الذري يعد مقداراً ثابتاً حسب مباديء الكم (لاحظ بأننا أهملنا التغير القليل في التيار والناتج عن الدايا مغناطيسية) . ما التغير في الطاقة المغناطيسية للدائرة الكهربائية ؟ نتيجة هذا السؤال تمثل الأساس لحسابات طاقة ثنائي القطب المغناطيسي في البند (3-11) .

الفصل الثالث عشر

التيارات بطيئة التغير
SLOWLY VARYING CURRENTS

13-1 مقدمة Introduction

سبق أن تعرفنا على مفاهيم الدائرة الكهربائية في الفصل السابع ، وكذلك تم تحليل تيارات تلك الدوائر بفرض أنها هُيجت بتأثير قوى دافعة كهربائية ثابتة . وأما في هذا الفصل فسوف يتم التوسع في دراسة هذه المفاهيم لتشمل القوى الدافعة الكهربائية بطيئة التغير ، والتيارات بطيئة التغير الناتجة عنها . ولفهم القصد من عبارة "بطيئة التغير" بوضوح ، ينبغي استخدام معادلات ماكسويل* . ومع ذلك ، فإن الافكار والمفاهيم العامة يمكننا فهمها بدون الدخول تفصيلياً في تلك المعادلات .

يميز سلوك الدوائر الكهربائية التي تمتلك قوة دافعة كهربائية متغيرة جيبياً ، وتحتوي على عناصر خطية (وهي اساس نظرية الدوائر الكهربائية الابتدائية) بالتردد ω † . إن مقدار طول الموجة الكهرومغناطيسية عند هذا التردد في الفضاء الحر يكون :

$$\lambda = 2\pi c/\omega,$$

* تدرس معادلات ماكسويل بتفصيل اكثر في الفصل الخامس‌عشر . ومع ذلك فأنه من المفيد ربط المادة العلمية المقدمة في الخامس‌عشر مع تلك التي ستقدم في هذا الفصل .

† الكمية ω تساوي 2π مضروبة في التردد ، ويطلق عليها احياناً بالتردد الزاوي . إن استخدام ω بدلاً من $2\pi f$ ذو فائدة اعتبارية في عدد من فروع الفيزياء . وبالتحديد ، فانها تختزل تكرار 2π من معادلات الدائرة الكهربائية في المناقشة التي نحن بصددها .

حيث c يمثل سرعة الضوء . ولكي يكون التيار في الدائرة الكهربائية بطيء التغير يجب وضع تقييد رئيس وهو أن تكون الدائرة الكهربائية غير مشعة لقدر محسوس من القدرة . ومن الممكن جعل هذا التقييد متفقاً مع متطلبات البعد الخطي الاقصى للمنظومة (وليكن L) بحيث يكون اصغر بكثير من الطول الموجي في الفضاء الحر المرافق لتردد السّوق "driving frequency" ، حيث

$$L \ll \frac{2\pi c}{\omega} \quad \text{أو} \quad \omega \ll \frac{2\pi c}{L}. \qquad \textbf{(13-1)}$$

فإذا تحقق هذا الشرط ، فإن لكل عنصر من الطول dl من الدائرة الكهربائية يحمل تياراً مقداره I هنالك ، وعلى بعد اقل بكثير من طول موجي واحد ، عنصر تفاضلي مناظر قدره $-\mathbf{dl}$ يحمل القيمة نفسها من التيار . وهذا مايؤمن بشكل واضح اختزال المجالات الناتجة عن هذه العناصر الطولية ولكافة الاتجاهات على مسافات بحدود عدة اطوال موجية . ولمعرفة التقيدات أو الشروط العملية المفروضة في المعادلة (13-1) ، عُدَّتْ $L \sim \lambda/10$ للبعد الخطي الأقصى للدائرة الكهربائية في الجدول (13-1) . إن الترددات المختارة لهذا الغرض هي تردد خط القدرة الكهربائية والتردد الراديوي الواطيء (حزمة البث الاذاعي) والتردد الراديوي العالي وتردد الموجة المايكروية . انه من الواضح امكانية بناء دوائر كهربائية للترددات الثلاثة الأولى وبحدود المسافات الموضحة في الجدول ، أما بالنسبة للتردد الأخير فإن الدائرة الكهربائية ينبغي أن تبنى داخل مكعب طول ضلعه حوالي عشر الأنج . وينبغي كذلك ملاحظة أن الطول الموجي وأبعاد الدائرة الكهربائية عند تردد مقداره 30 مليون دورة في الثانية (30Mc) ستكون بأبعاد المختبر وسعته ، فلذلك يجب أخذ الحذر عند تطبيق النظرية الاعتيادية المألوفة للدائرة الكهربائية عند هذا التردد والترددات الاعلى . ولغرض الموازنة أو المقارنة في هذا الفصل سوف نفرض تحقق شرط التغير البطيء وبدون الخوض في تفاصيل لا تجدي .

جدول 13-1

f, cycles/sec	ω, rad/sec	λ, m	L, m
60	376	5×10^6	5×10^5 (250 mi)
10^6	6.28×10^6	300	30
30×10^6	1.88×10^8	10	1
10^{10}	6.28×10^{10}	0.03	[illegible]

13-2 سلوكية الحالة العابرة والحالة المستمرة :
Transient and steady-state behavior

إذا ربطت شبكة كهربائية ذات عناصر غير فعالة بشكل مفاجيء الى مصدر أو مصادر لقوى دافعة كهربائية فستنمو تيارات كهربائية خلالها . وبصرف النظر عن طبيعة القوى الدافعة الكهربائية المؤثرة ، فإن التغير الابتدائي للتيارات مع الزمن لا تكون بصورة دورية . ومن ناحية ثانية ، فإذا تغيرت القوى الدافعة الكهربائية دورياً مع الزمن فبعد زمن طويل من تأثير القوى الدافعة الكهربائية تلك تتغير التيارات مع الزمن بصورة دورية أيضاً . (في الحقيقة إنها ستكون متغيرة دورياً فقط وبشكل تام بعد زمن يُعدُّ لا نهائياً ، ومع ذلك ، فإن الحصول التقريبي للدورية يمكن احرازه بالانتظار لفترة زمنية طويلة كافية) . إنه من المناسب مناقشة سلوكية التيارات في طورين ، نسبة الى أي من السلوكين اكثر اهمية الدورية أو اللادورية . يشار الى السلوكية الدورية بسلوكية الحالة المستمرة في حين يشـــار للســـلوكية اللادورية بالسلوكية العابرة . وتتحكم بكلتا الحالتين نفس المعادلات التكاملية ــ التفاضلية الأساسية . ومع ذلك ، فإن الطرق الأولية المستعملة في حلها تختلف جذرياً في الحالتين ، علماً بأن التحليل الرياضي المقدم هنا سوف ينحصر بالتحليل العابر الأولي (التهيج أولاً بالقوى الدافعة الكهربائية الثابتة) ، وبتحليل الحالة المستمرة للتهيجات الجيبية . ولأجل التوسع في الموضوع نقترح على القاريء الرجوع الى كتب المؤلفين جويلّمين وبود* والكتب الأخرى المشابهة .

13-3 قانونا كيرتشوف C Kirchhoff's laws

سبق أن دُرست قوانين كيرتشوف لدوائر التيار المستمر في الفصل السابع ، وهنا يجب تعميم تلك القوانين لتشمل التيارات بطيئة التغير . ومما ينبغي ملاحظته في التعميم الاول هو أنه لا تنحصر عناصر الدائرة الكهربائية على المقاومات فحسب وانما تشمل اضافة لها عنصر المتسعات والمحاثات ايضاً. ولكل عنصر فرق جهد بين طرفيه يجب أن يدخل ضمن قانون كيرتشوف للدائرة الكهربائية المغلقة . والتسمية (هبوط IR) سوف لا تفي بالغرض لكل هذه العناصر ، لذلك فإن التسمية « الجهد

* E. A. Guillemin, *Communication Networks*, 2 vols., John Wiley & Sons, New York, (1931 and 1935), and H. W. Bode, *Network Analysis and Feedback Ampli- Design*, D Van Nostrand Co., Princeton, N.J. (1945).

المضاد counter voltage » سوف تستخدم للدلالة على فرق الجهد بين طرفي العناصر الكهربائية غير الفعالة . والتعميم الآخر هو ملاحظة أن قانونا كيرتشوف ينبغي تطبيقها عند كل لحظة زمنية معينة ، أي أنه يجب تطبيقها على القيم الآنية للتيارات والقوى الدافعة الكهربائية والجهود المضادة . وينص قانونا كيرتشوف على الآتي :

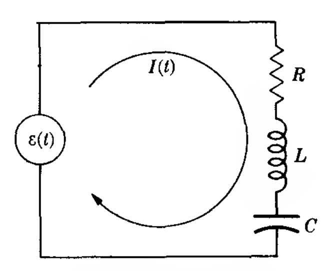
أولاً ـ المجموع الجبري للقوى الدافعة الكهربائية في الدائرة الكهربائية المغلقة تساوي المجموع الجبري للجهود المضادة الآنية في الدائرة الكهربائية .

ثانياً ـ المجموع الجبري للتيارات الآنية المنسابة نحو نقطة التفرع تساوي صفراً .

معنى القانون الثاني في أعلاه واضح جداً ، حيث أن التيارات المنسابة نحو نقطة التفرع تُعد موجبة والتيارات المنسابة بعكس هذا الاتجاه تُعد سالبة . ويمكن الاستنتاج من القانون أيضاً بأن كافة التيارات الكهربائية الداخلة لنقطة التفرع يجب ان تخرج منها . والقانون الأول يمثل أساساً قانون حفظ الطاقة . وتكتنفه بعض الصعوبات في تحديد إتجاه الاشارة . إن اتجاه اصطلاح الإشارة الذي سوف نلتزم به يمكن توضيحه بشكل جيد بدلالة الشبكة الكهربائية البسيطة المغلقة ، كما هو موضح في الشكل (1-13) . في هذه الدائرة ، ربط مصدر القوة الدافعة الكهربائية $\varepsilon(t)$ على التوالي مع المقاومة R والحاثة L والمتسعة C . السهم المؤشر بـ I(t) افترض بصورة كيفية ليمثل الاتجاه الموجب للتيار الكهربائي . وبدلالة هذا الاتجاه تحدد كافة الاشارات . القوة الدافعة الكهربائية $\varepsilon(t)$ تكون موجبة اذا حاولت جعل التيار الكهربائي ينساب بالاتجاه المفروض أي إذا كان الطرف الأعلى للمصدر موجباً (الشكل 1-13) نسبة الى الطرف الأسفل . وكما في دوائر التيار المستمر فإن IR يمثل جهد المقاومة المضاد . فإذا كان (dI / dt) موجباً ، فإن قوة دافعة كهربائية محتثة ستظهر في الحث والتي تسبب مرور تيار كهربائي معاكس في الاتجاه للتيار المفروض I ، أي أن الطرف الأعلى للمحث L يجب ان يكون موجباً نسبة الى طرفه الأسفل . وبما أن هذا الاتجاه هو نفس أتجاه IR نسبة الى اتجاه التيار I ، فإن الجهد المضاد يكون L(dI/ dt) * . إن الجهد السعوي المضاد يعتمد على الشحنة الموجودة على المتسعة ، وقد يكون موجباً أو سالباً معتمداً على ما إذا اعتبرنا اللوح الاعلى ام اللوح الاسفل مشحون بالشحنة الموجبة . وهذه الصعوبة يمكن تجاوزها بكتابة :

$$Q = \int_{t_0}^{t} I(t)\, dt, \tag{13-2}$$

* من المفيد ملاحظة أن القوة الدافعة الكهربائية المحتثة كتبت بصيغة -L(dI/ dt) ، ومع ذلك ، فإنها قوة دافعة كهربائية ، وانها اعتيادياً تكتب في الطرف الآخر للمعادلة ، طرف الجهود المضادة . وبهذا لا يوجد تناقض بكتابتها +L(dI / dt) للجهد المضاد .



شكل 13-1 . دائرة متوالية لعناصر الدائرة الكهربائية

حيث اختيرت t_0 بحيث $Q(t_0)$ تساوي صفراً . وبهذا الاختيار لـ Q ، فإن القيمة الموجبة لـ Q تجعل الطرف العلوي (اللوح العلوي) للمتسعة موجباً ، وبهذا ينتج الجهد السعوي المضاد $+Q/C$. إن قانون القوة الدافعة الكهربائية لكيرتشوف للدائرة الكهربائية المتمثلة بالشكل (13-1) ، ومن ثم لأي دائرة كهربائية مغلقة ، يصبح :

$$\varepsilon(t) = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I\,dt, \tag{13-3}$$

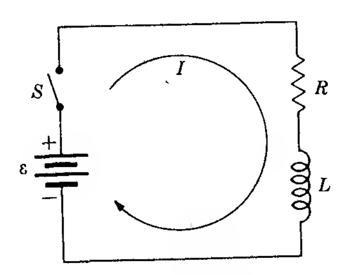
والتي تمثل المعادلة التكاملية ـ التفاضلية الأساسية لنظرية الدائرة الكهربائية .

13-4 السلوكية العابرة الاولية Elementary transient behavior

السلوكية العابرة الوحيدة التي سوف تدرس هنا هي السلوكية المرافقة للتأثير المفاجيء لقوة دافعة كهربائية ثابتة على شبكة كهربائية مكونة من مقاومات ومتسعات ومحاثات . وأول مثال نأخذه هو دائرة L-R البسيطة الموضحة في الشكل (13-2) .
تصبح المعادلة (13-3) ، بعد غلق المفتاح S كالآتي :

$$\varepsilon = RI + L\frac{dI}{dt} \tag{13-4}$$

حل المعادلة في أعلاه قبل غلق المفتاح يكون اعتيادياً ، وذلك بأن يجعل التيار I مساوياً للصفر . المعادلة (13-4) معادلة خطية تفاضلية من الدرجة الاولى ذات



شكل 2-13 . الاستجابة العابرة لدائرة L-R . مخطط الدائرة الكهربائية .

معاملات ثابتة ، حيث يمكن حلها بدلالة ثابت كيفي واحد .
الحل هو :

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} - Ke^{-tR/L}, \tag{13-5}$$

حيث أن K الثابت الكيفي . ولما كانت الدائرة الكهربائية تحتوي على محث يمنع أي تغيير مفاجيء في التيار ، فإن التيار الكهربائي عند لحظة غلق المفتاح يجب ان يكون مساوياً للتيار في اللحظة قبل غلقه ، أي يساوي صفراً . فإذا غلق المفتاح في اللحظة $t = t_0$ ، فهذا يتطلب أن يكون :

$$\frac{\varepsilon}{R} - Ke^{-t_0R/L} = 0 \tag{13-6}$$

أو

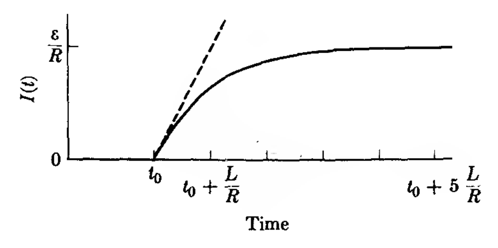
$$K = \frac{\varepsilon}{R} e^{t_0R/L}. \tag{13-7}$$

وعندئذٍ يصبح الحل الكامل كالآتي :

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}[1 - e^{(t_0-t)R/L}], \tag{13-8}$$

والموضح في الشكل البياني (3-13) . هنالك عدة حقائق سهلة ومفيدة يمكن استنتاجها من المعادلة (8-13) والشكل البياني (3-13) ، أولها ، ان النسبة L/R ذات بعد زمني (أي ذات وحدة زمن) ، وتسمى ثابت الزمن ، ولما كانت $1/e \cong 0.368$, فان ثابت الزمن هو الزمن اللازم ليزداد التيار الكهربائي من الصفر الى 0.632 من قيمته النهائية وهي ε/R . وفي خلال زمن مقداره خمسة

أمثال ثابت الزمن فان قيمة التيار ستصل الى 0.993 من قيمته النهائية ، والتي تكافيء حوالي 99% من القيمة النهائية . ان الانحدار الابتدائي dI / dt للمنحني البياني (الشكل 3-13) يمثل التيار النهائي ε/R مقسوماً على ثابت الزمن L/R ، وهذا يعني ، أن التيار إذا استمر بالزيادة بهذه النسبة فإن قيمته ستصل الى القيمة النهائية خلال زمن مقداره ثابت الزمن . وفائدة هذه الحقائق تتجلى في تقدير الدالة الأسية التي تتضمنها المسائل البسيطة للتيارات العابرة بدقة كبيرة وبكل بساطة من خلال رسم منحني أسي قياسي . ويمكن دراسة عدة جوانب أخرى لدائرة المقاومة ــ المحث ، وكذلك يمكن تطبيق المعالجة السابقة على دوائر ذات مقاومة ــ متسعة . وقد كرس قسم من المسائل في نهاية الفصل لتحقيق هذا الهدف .



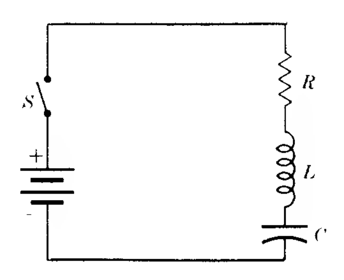
شكل **3-13** . الاستجابة العابرة لدائرة **L-R** .

وكمثال ثاني نأخذ دائرة توالي R-L-C وقد ربطت بشكل مفاجيء بقوة دافعة كهربائية ثابتة ε ، كما هو موضح في الشكل (4-13) . المعادلة الرياضية الملائمة بعد غلق المفتاح هي :

$$\varepsilon = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I(t)\,dt, \qquad (13\text{-}9)$$

حيث يمثل t_0 الزمن عندما تكون شحنة المتسعة تساوي صفرا . ولزيادة التبسيط نفرض ان المتسعة كانت في بداية الامر غير مشحونة وأن المفتاح غلق عند الزمن $t = t_0$. المعادلة (9-13) نوعاً ما غير مألوفة ، ومع ذلك ، بالتفاضل البسيط للمعادلة ولمرة واحدة بالنسبة للزمن . نحصل على

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{I}{C}, \qquad (13\text{-}10)$$



شكل 13-4 . الاستجابة العابرة لدائرة R-L-C . مخطط الدائرة الكهربائية .

والتي تمثل معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية ذات معاملات ثابتة . الاسلوب المستخدم لحل مثل هذه المعادلة معروف جيداً ، ففي هذه الحالة يكون لدينا :

$$d\mathcal{E}/dt = 0,$$

وبهذا يصبح الحل كالآتي* :

$$I = \left\{A \exp\left[j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t\right] + B \exp\left[-j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t\right]\right\} \exp\left[-\frac{Rt}{2L}\right] \tag{13-11}$$

شريطة أن لا يكون أي من L أو C يساوي صفراً . فاذا تلاشى أي منها فستظهر نتيجة غير محددة في المعادلة (13-11) . ومع ذلك ، يمكننا حل المعادلة (13-10) لقيمة L = 0 ، والحقيقة ان الحل يكون أبسط مما هو عليه للمعادلة (13-11) . اضافة لذلك ، فان حالة C = 0 تناظر حالة الدائرة المفتوحة .

ولتكملة مناقشة هذه النقطة ، فيما اذا كانت $C = \infty$ والتي تناظر حالة دائرة القُصر "short-circuiting" عبر المتسعة ، فإن المعادلة (13-11) تختصر الى المعادلة (13-5) مع ثابتين كيفيين يمكن ايجادهما بعد تعويض شروط الحدود . وهذا بالطبع يعكس حقيقة ضياع كل ماكان معروفاً عن $\mathcal{E}$ عند الانتقال من المعادلة (13-9) الى المعادلة (13-10) .

* يمثل j هنا وحدة العدد التخيلي ، وهو

$$j \equiv \sqrt{-1}.$$

والآن نعود الى حل المعادلة (13-11) ، حيث ينبغي ايجاد قيم الثوابت A و B . لجعل قيمة التيار الكهربائي قيمة حقيقية ، فإن الثابت B يجب أن يكون مترافق مركب للثابت A . وبما أن المفتاح اغلق عند الزمن $t = t_0$ ، فإن من الملائم قياس الزمن من اللحظة $t = t_0$ وذلك باستبدال t بـ $(t - t_0)$. اضافة الى ذلك ، فإن قيمة التيار الكهربائي يجب أن يكون صفراً عند الزمن $t = t_0$ ، وهذا يعني وجوب اتحاد الحدين الخياليين الأسيين لنحصل على دالة جيبية . إن هذه الملاحظات تؤدي الى الآتي :

$$I(t) = De^{-R(t-t_0)/2L} \sin\left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,(t - t_0)\right], \qquad (13\text{-}12)$$

حيث D يمثل ثابتاً حقيقياً مفرداً ينبغي ايجاده . ويمكننا إنجاز ذلك بملاحظة ان كلاً من Q و I يساوي صفراً عند الزمن $t = t_0$، وكذلك أن :

$$\varepsilon = L\frac{dI}{dt}\bigg|_{t=t_0}. \qquad (13\text{-}13)$$

وباستخدام الشرط الاول نجد :

$$D = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}}. \qquad (13\text{-}14)$$

والان يصبح الحل كاملاً وعند ذلك يتذبذب التيار الكهربائي بتردد مقداره :

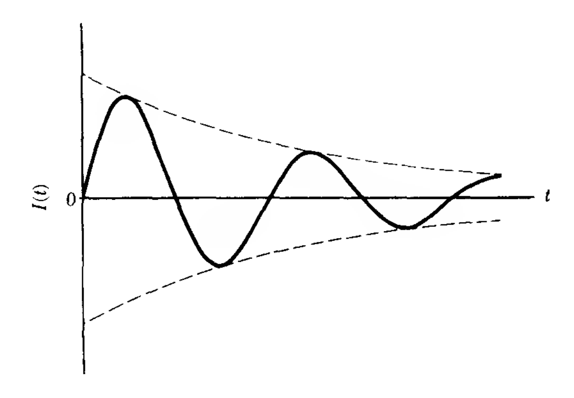
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}},$$

وبإزاحة تتناقص مع الزمن حسب الكمية :

$$De^{-R(t-t_0)/2L}.$$

وهذه الحالة موضحة بالشكل (13-5) .

وبهذا يكتمل تحليل الحالة العابرة الأولية . وسيكرس باقي الفصل لدراسة الدوائر الكهربائية المتهيجة بواسطة القوى الدافعة الكهربائية الجيبية في حالة الاستقرار ، أي بعد فترة طويلة نسبياً من بدء تأثير التهيج . لكي نضمن امكانية أهمال الحالة العابرة .



شكل 5-13 . الاستجابة العابرة لدائرة R-L-C .

5-13 سلوكية الحالة المستمرة لدائرة توالي بسيطة
Steady-state behavior of a simple series circuit

سندرس الآن ، سلوكية الدائرة الكهربائية المبينة في الشكل (1-13) الواقعة تحت تأثير فولتية الاثارة الآتية :

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \tag{13-15}$$

وبكل بساطة نعوض عن $\mathcal{E}(t)$ في المعادلة (1-13) أو (10-13) ، ونحل المعادلة الناتجة . ومن ناحية ثـانية ، فالملاحظ أن $\mathcal{E}_0 \cos \omega t$ يمثل الجزء الحقيقي من $\mathcal{E}_0 e^{j\omega t}$. فإذا اثرت على الدائرة الكهربائية فولتية مركبة وهمية $\mathcal{E}_1 + j\mathcal{E}_2$ فان التيار الكهربائي الناتج سيكون مركباً بالطبع $I_1 + jI_2$ (يفترض هنا أن تكون الكميات $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2,$ ، I_1 ، I_2 حقيقية) . وبتعويض هذه القيم الوهمية في المعادلة (10-13) ، ينتج لنا :

$$\frac{d\mathcal{E}_1}{dt} + j\frac{d\mathcal{E}_2}{dt} = \left(L\frac{d^2I_1}{dt^2} + R\frac{dI_1}{dt} + \frac{I_1}{C}\right) + j\left(L\frac{d^2I_2}{dt^2} + R\frac{dI_2}{dt} + \frac{I_2}{C}\right) \tag{13-16}$$

الطريق الوحيد لتحقق هذه المعادلة هو بتساوي الأجزاء الحقيقية لطرفيها الأيمن والايسر وكذلك بتساوي الاجزاء الخيالية لطرفيها الايمن والايسر . وهكذا فإن I_1 يحقق المعادلة (10-13) مع $d\mathcal{E}_1/dt$ من الطرف الأيسر و I_2 يحقق المعادلة

(13-10) مع $d\mathcal{E}_2/dt$ من الطرف الايسر كذلك . وهذا يعني اذا كانت $\mathcal{E}(t)$ تمثل الجزء الحقيقي لدالة مركبة فإنه من الملائم ، لحل المعادلة (13-10) ، استخدام الدالة المركبة لـ $\mathcal{E}(t)$ ومن ثم إيجاد التيار الفيزيائي وذلك بأخذ الجزء الحقيقي للحل المركب . إنه من المناسب استعمال $\mathcal{E}_0 e^{j\omega t}$ لفولتية الإثارة $\mathcal{E}_0 \cos \omega t$، ومن ثم أخذ الجزء الحقيقي للحل للتعبير عن التيار الفيزيائي . وفي بعض الحالات من الأجدر استعمال $e^{j(\omega t+\varphi)}$ لاجل ايجاد الاستجابة لـ $\cos(\omega t + \varphi)$.

فإذا استعمل $\mathcal{E}_0 e^{j\omega t}$ في المعادلة (13-10) ، فإن التيار الكهربائي سيكون $I_0 e^{j\omega t}$، حيث I_0 يمثل ثابتاً مركباً «complex constant» . وبالتعويض المباشر ينتج :

$$j\omega \mathcal{E}_0 e^{j\omega t} = \left[-\omega^2 L + j\omega R + \frac{1}{C}\right] I_0 e^{j\omega t}. \tag{13-17}$$

وبالقسمة على $j\omega$ ، نحصل على :

$$\mathcal{E}_0 e^{j\omega t} = \left[R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right] I_0 e^{j\omega t}, \tag{13-18}$$

والتي يمكن تمثيلها بالصيغة الآتية :

$$\mathcal{E}_0 e^{j\omega t} = Z I_0 e^{j\omega t} \tag{13-19}$$

حيث :

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}, \tag{13-20a}$$

أو

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \tag{13-20b}$$

ممانعة الدائرة الكهربائية Z تتكون من جزأين : الجزء الحقيقي أو المقاومة (R) والجزء الخيالي أو الرادة (X) . والرادة بدورها تنقسم الى رادة حثية $X_L = \omega L$ ورادة سعوية $X_C = -1/\omega C$. . وحقيقة أن الممانعة مركبة تعني بأن التيار الكهربائي لا يكون بنفس الطور مع القوة الدافعة الكهربائية المؤثرة . وفي بعض الأحيان من المناسب كتابة الممانعة بالصيغة القطبية :

$$Z = |Z| e^{j\theta}, \tag{13-21}$$

حيث

$$|Z| = [R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]^{1/2} \tag{13-22}$$

و

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right). \tag{13-23}$$

وباستعمال هذه الصيغة للممانعة ، فإن التيار الكهربائي المركب يمكن كتابته بالصيغة الآتية :

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} e^{j(\omega t - \theta)}, \tag{13-24a}$$

والتيار الفيزيائي يمثل بالصيغة الآتية :

$$\frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} \cos(\omega t - \theta). \tag{13-24b}$$

فإذا كانت θ أكبر من الصفر فإن التيار الكهربائي سيصل الى طور معين بوقت متأخر عن الفولتية ، وعندئذ يقال إن التيار يتخلف عن الفولتية وبعكس ذلك يسبق التيار الفولتية . وبهذه الصورة تكتمل دراسة دائرة التوالي البسيطة .

13-6 توصيل التوالي والتوزاي للممانعات
Series and parallel connection of impedances

إذا ربطت ممانعتان على التوالي ، فإن التيار الكهربائي نفسه سيسري خلالها وإن الفولتية* عبر كل من الممانعتين تصبح $V_1 = Z_1 I$ و $V_2 = Z_2 I$ ، والفولتية عبر المجموعة تكون $V_1 + V_2 = (Z_1 + Z_2) I$. وانه من الجلي أن توصل الممانعات على التوالي يضيف الممانعات ، بحيث :

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots \quad \text{(ربط التوالي)} \tag{13-25}$$

ومن المهم ملاحظة أن الممانعات تجمع كأعداد مركبة . فإذا كان $Z_1 = R_1 + jX_1$ و $Z_2 = R_2 + jX_2$ ، فإن :

$$Z = Z_1 + Z_2 = (R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2). \tag{13-26}$$

وبالصيغة القطبية:

$$Z = |Z|e^{j\theta}, \qquad |Z| = [(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2]^{1/2},$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{X_1 + X_2}{R_1 + R_2}. \tag{13-27}$$

* هنا وفي البنود اللاحقة من الفصل سوف نستخدم العلامة V بدلاً عن ΔU لفرق الجهد عبر العنصر الكهربائي أو مجموعة العناصر الكهربائية .

لاحظ أن مقدار Z يساوي حاصل جمع المقدارين Z_1 و Z_2 .

واذا ربطت الممانعات على التوازي ، فإن الفولتية نفسها ستظهر عبر كل منها ، وان التيارات الكهربائية ستمثل بالصيغ الآتية :

$$I_1 = V/Z_1,\ I_2 = V/Z_2, \text{ etc.}$$

وأن التيار الكلي سيكون :

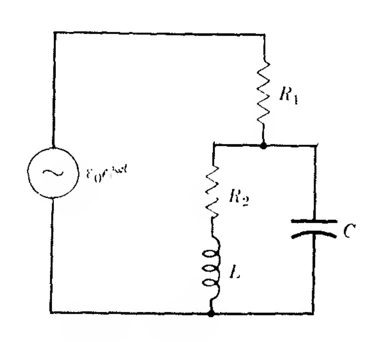
$$I = I_1 + I_2 + \cdots = \frac{V}{Z_1} + \frac{V}{Z_2} + \cdots = V\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots\right),$$

و بذلك فإنه من الواضح أن :

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots \qquad \text{(ربط التوازي)} \qquad (13\text{-}28)$$

وهنا أيضاً ، فإن عملية الجمع ستتضمن جمع أعداد مركبة .

المعادلتان (25-13) و (28-13) توفر لنا الأساس لحل مسائل تشتمل على ترتيب للمانعات بشكل اكثر تعقيداً مع بقاء قوة دافعة كهربائية واحدة . وكمثال على ذلك ، نأخذ الدائرة الكهربائية المتمثلة بالشكل (6-13) . المانعة تتكون من مقاومة مربوطة على التوالي مع مجموعة متوازية متكونة من متسعة ومحث . والمانعة الكلية للدائرة تمثل بالمعادلة الآتية :



شكل 6-13 . دائرة a. c. نموذجية

$$Z = R_1 + \frac{1}{\dfrac{1}{R_2 + j\omega L} + \dfrac{1}{1/j\omega C}}. \qquad (13\text{–}29)$$

أو

$$Z = R_1 + \frac{R_2 + j\omega L}{1 + j\omega C(R_2 + j\omega L)} \qquad (13\text{–}30)$$

أو

$$Z = R_1 + \frac{(R_2 + j\omega L)[(1 - \omega^2 LC) - j\omega R_2 C]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R_2^2 C^2}. \qquad (13\text{–}31)$$

بقي شيء واحد مهم فقط هو فصل الأجزاء الحقيقية في هذه المعادلة عن الأجزاء الخيالية ، لذا :

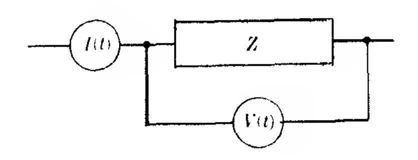
$$Z = R_1 + \frac{R_2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R_2^2 C^2} + j\frac{\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega R_2^2 C}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R_2^2 C^2}. \qquad (13\text{–}32)$$

وبعد إيجاد Z يصبح بإمكاننا تعيين التيار الكهربائي بقسمة $\varepsilon_0 e^{j\omega t}$ على Z . وسوف تستكمل دراسة هذه الدائرة الكهربائية لاحقاً في سياق دراسة ظاهرة الرنين .

13-7 القدرة وعوامل القدرة Power and power factors

يمكن حساب القدرة المجهزة للمقاومة بضرب فرق الجهد بين طرفي المقاومة في التيار الكهربائي المار عبرها . ولكن في الحالة العامة ، كما في حالة المانعة المبينة بالشكل (13-7) ، يتطلب ذلك أسلوباً معقداً بعض الشيء . فاذا كانت V(t) و I(t) تمثلان الفولتية المركبة «complex voltage» والتيار المركب ، «complex current» ، كما مر سابقاً ، فإن القدرة الآنية تكون .

$$P_{\text{inst}} = \text{Re}\, I(t)\, \text{Re}\, V(t). \qquad (13\text{–}33)$$



شكل 13-7 . قياس القدرة

إلا أن متوسط القدرة تمثل الكمية الاكثر أهمية ، وقد يتضمن ذلك المعدل لزمن ذبذبة واحدة كاملة أو لزمن طويل جداً (زمن عدة ذبذبات) . في البند (5-16) أوضحنا أن :

$$\overline{\mathrm{Re}\,(I_0 e^{j\omega t})\,\mathrm{Re}\,(V_0 e^{j\omega t})} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(I_0^* V_0), \qquad (13\text{–}34)$$

حيث أن I_0^* يمثل المترافق المركب لـ I_0 . فاذا أختيرت الاطوار بحيث V_0 يكون مقداراً حقيقياً و $Z = |Z|e^{j\theta}$، فان

$$\overline{P} = \overline{\mathrm{Re}\,I(t)\,\mathrm{Re}\,V(t)} = \tfrac{1}{2}|I_0|\,|V_0|\cos\theta. \qquad (13\text{–}35)$$

المعامل نصف في المعادلة (35-13) يمثل حقيقة أن متوسط الكمية $\sin^2\omega t$ أو $\cos^2\omega t$ هو نصف . كما أن جيب تمام الزاوية θ يمثل معاملاً مهماً آخراً ، إنه يعبر عن حقيقة أن التيار الكهربائي والفولتية لا يكونان في طور واحد . وكثيراً ما يطلق على $\cos\theta$ عامل القدرة للدائرة الكهربائية المتناوبة .

وملاحظة أخيرة ، لقد أشرنا ان القيم الفعالة للفولتية وللتيار كثيراً ماتعرف بالصيغ الآتية :

$$V_{\mathrm{eff}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,|V_0|, \qquad I_{\mathrm{eff}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,|I_0|. \qquad (13\text{–}36)$$

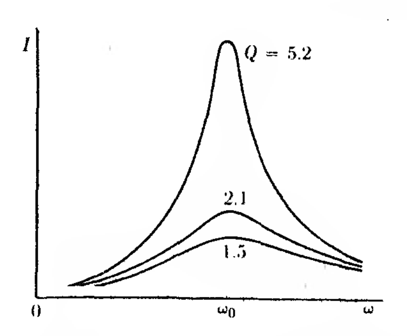
ان أهمية هذه التعاريف يمكن الاستدلال عليها بأنه لو أثرنا على مقاومة بفرق جهد مقداره V_{eff} فانها تبدد المقدار نفسه من القدرة كما لو سلطت عليها فولتية ثابتة لها القيمة نفسها . إن مفهوم القيم الفعالة شائع الاستعمال . فعندما نقول خطوط القوة الكهربائية للتيار المتناوب ذات 115 فولت فاننا نعني ان هذه الخطوط ذات فولتية فعالة قدرها 115 فولت .

13-8 الرنين Resonance

تبين المعادلة (22-13) أن ممانعة دائرة L-R-C المتوالية البسيطة تكون دالة للتردد ، وأن قيمتها الدنيا تكون عند : $\omega^2 = \omega_0^2 \equiv 1/LC$. وعند هذا التردد تصبح ممانعة الدائرة الكهربائية مساوية للمقاومة R . وزاوية الطور تساوي صفراً . كما أن التيار الكهربائي يكون في قيمته القصوى وبمقدار $\mathcal{E}_0/R$. وأن ظاهرة الرنين هذه تشبه الى حد كبير تلك التي تلاحظ في المتذبذبات الميكانيكية

ذات الحركة المتضاءلة الاضطرارية «force-damped oscillators» وبرسم منحني بياني للتيار الكهربائي كدالة للتردد . نحصل على المنحني المبين بالشكل (13-8) . وفيه عدد من منحنيات جميعها بالاساس أخذت لنفس قيم الحث والمتسعة ، في حين تختلف قيم المقاومة من منحنٍ لآخر . نرى بوضوح أن المنحني سيكون ذو قمة أكثر حدة عند استخدام مقاومة صغيرة منه عند استخدام مقاومة كبيرة . ستنخفض قيمة التيار الكهربائي الى $\sqrt{2}/2$ من قيمته القصوى عند تردد معين حين تكون قيمة ممانعة الدائرة الكهربائية $\sqrt{2}$ مضروبة في قيمة R ، أو عندما :

$$\left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right| = R. \qquad (13\text{-}37)$$



شكل 13-8 . منحنيات الرنين لدائرة R-L-C البسيطة

عند قيم تردد ω ليست بعيدة عن قيمة ω_0 ، ويمكننا ايجاد قمم حادة نسبياً . وعندها نكتب $\omega = \omega_0 + \Delta\omega,$ ، ونجد

$$\left|\omega_0 L + \Delta\omega L - \frac{1}{\omega_0 C}\,\frac{1}{1 + \Delta\omega/\omega_0}\right| = R. \qquad (13\text{-}38)$$

وبأستخدام المتطابقة الآتية :

$$\omega_0^2 = 1/LC \quad \text{و} \quad (1 + \Delta\omega/\omega_0)^{-1} \cong 1 - \Delta\omega/\omega_0$$

نحصل على :

$$2|\Delta\omega|L = R$$

أو

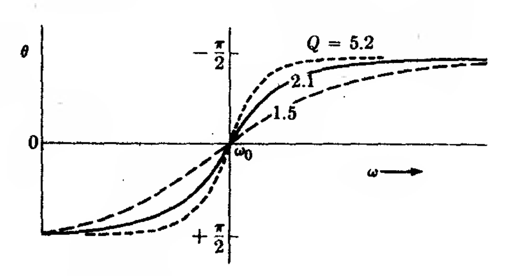
$$\frac{2|\Delta\omega|}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L}. \qquad (13\text{-}39)$$

الكمية

$$Q = \omega_0 L/R \quad \text{أو} \quad Q = \frac{\omega_0}{2|\Delta\omega|} \tag{13-40}$$

تصف حدة الرنين وتسمى العامل Q للدائرة الكهربائية . وللإستخدامات الأولية ، فإن Q تفترض خاصية للمحاثة فقط ، حيث ان معظم المقاومات المتصلة على التوالي مع المجالات لا سبيل لتجنبها لانها ملازمة للفات السلك المكون للمحث . ومن جهة أخرى ، فإن الدراسة الاكثر دقة تظهر أن الضياع في المتسعة يجب أن يؤخذ بنظر الاعتبار عند حساب مقدار Q ايضاً . المنحنيات البيانية الموضحة بالشكل (8-13) مؤشر عليها بقيم Q المناسبة .

عندما يتغير تردد السوق ، فإن طور التيار الكهربائي سوف يتغير إضافة الى التغير في قيمة Q . الشكل (9-13) يبين التغير في الطور ولنفس قيم Q المستعملة في الشكل (8-13) . لتردد دون تردد الرنين ω_0 ، فإن زاوية طور دالة الممانعة تكون سالبة ، وبذلك فإن طور التيار الكهربائي يكون موجباً ، والتيار يتقدم الفولتية . ولتردد اعلى من تردد الرنين ينتج العكس حيث يتخلف التيار عن الفولتية .



شكل 9-13 . زاوية طور الممانعة لدائرة توالي **R-L-C** نموذجية

الذي يثير الانتباه ، وجود دوائر الرنين للتردد الراديوي في أجهزة الاتصالات وان تلك الدوائر عبارة عن دوائر التوالي الرنينية على الرغم مما يبدو عليها ظاهرياً طابع دوائر التوازي . وفي ابسط حالة يظهر هذا الشيء بسبب أن قدرة السوق تكون مزدوجة حثياً في L وبهذا تظهر كقوة دافعة كهربائية متصلة على التوالي مع L .

لا يقتصر الرنين على دوائر التوالي كما نوقش قبل قليل ، وقد تظهر دوائر التوازي خواص رنينية كذلك . الدائرة المبينة في الشكل (6-13) تظهر مثل هذه الصفة. على ان تعريف الرنين لدائرة التوازي الرنينية ليس بالبساطة التي ظهرت في دائرة التوالي حيث هناك احتمالات ثلاثة هي :

أولاً : $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$، ثانياً : التردد الذي عنده تكون المانعة [المتمثلة بالمعادلة(31-13)] في قيمتها القصوى ، ثالثا : التردد الذي عنده يكون عامل القدرة يساوي واحداً . وكل من هذه الاختيارات الثلاثة تعطي قيمة مختلفة للتردد ، ومع ذلك ، فإن هذه الاحتمالات تعطي قيماً متساوية تقريباً للتردد للدوائر ذات قيمة كبيرة لعامل القدرة . الى حد بعيد ، فإن الاختيار الاول ذو فائدة عملية كبيرة وذلك لأنه يجعل العديد من نتائج رنين التوالي ذات تطبيق مباشر لحالة رنين التوازي . وباستخدام المعادلة (31-13) يمكننا ايجاد نتيجة مهمة وذلك بحساب قيمة Z ، وبالتعويض عن : $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. و $R_1 = 0$. النتيجة هي :

$$Z = \omega_0 L\left[\frac{\omega_0 L}{R} - j\right], \qquad (\omega = \omega_0). \tag{13-41}$$

لدائرة ذات قيمة كبيرة لعامل القدرة فإن j يمكن أهماله ، وتصبح المانعة عند الرنين تساوي Q مضروباً في الرادة الحثية عند الرنين .

ويمكننا متابعة موضوع دوائر الرنين بتفصيل اكثر ، ولكننا لا نجد وجود مبرر لذلك هنا ، وبنفس الوقت فإن بعض التمارين في نهاية الفصل ستكمل تفصيلات هذا البند . ويجد القاريء المهتم بالموضوع شرحاً تفصيلاً شاملاً في كتاب من وضع ترمان* .

9-13 المحاثات المتبادلة في دوائر التيار المتناوب
Mutual inductances in a-c circuits

حل تمارين دائرة التيار المتناوب التي تشتمل على محاثات متبادلة تظهر شيئاً من الصعوبة في تحديد الاشارة الصحيحة للمحاثة المتبادلة . ويمكن حل هذه الصعوبة بيسر حيث إن الإشارة التي سترافق المحاثة المتبادلة تعتمد على اتجاه التيار

* Terman, *Radio Engineers Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1943.

المفروض في الدائرتين الكهربائيتين المعنيتين وتعتمد كذلك على الأسلوب المتخذ في ربط لفات المحاثات . سيتخذ الرمز M_{ij} للدلالة على المحاثة المتبادلة النقية بين الدائرتين .

لقد بينا في الفصل التاسع بأن قيمة القوة الدافعة الكهربائية في لفات المحاثة الثانية والناتجة عن تغير التيار الكهربائي في لفات المحاثة الأولى تمثل بالصيغة الآتية :

$$\mathcal{E}_2 = M_{21} \frac{dI_1}{dt}. \tag{13-42}$$

وللتيارات الجيبية نستخدم الرموز المركبة لنحصل على :

$$\mathcal{E}_2 = j\omega M_{21} I_{10} e^{j\omega t} \tag{13-43}$$

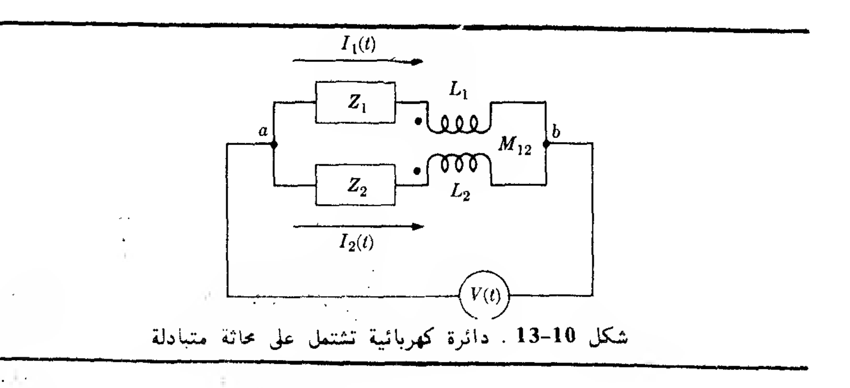
أو

$$\mathcal{E}_2 = j\omega M_{21} I_1. \tag{13-44}$$

وفيما سيعقب سيعدُّ الرمز M_{21} كمية موجبة ، وعند ذلك ستظهر إشارة $\mathcal{E}_2$ بشكل جلي . وبكلمات أخرى . ستستبدل M_{21} بالرمز $\pm M_{21}$ في المعادلة (13-44) حيث أن M_{21} كمية موجبة .

ولتوضيح الأسلوب المستخدم لتحديد الاشارات ، ندرس الآن الدائرة الموضحة في الشكل (13-10) ، حيث تظهر الممانعات Z_1 و Z_2 وقد دمجتا بمحاثة متبادلة وربطتا بمصدر ذي قوة دافعة كهربائية قيمتها

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{j\omega t}$$



شكل 13-10 . دائرة كهربائية تشتمل على محاثة متبادلة

ويستدل على المحاثة المتبادلة بالرمز M_{21} وتؤخذ كمقدار موجب . وتدل النقاط السوداء المبينة في الشكل على نهايتي الملفين اللذين يعدان موجبين في نفس الوقت . فإذا أُثر على الملف الأسفل بتيار جيبي فإن ذلك سيجعل الطرف الأيسر للملف موجباً عند زمن معين وليكن t_1 ، ومن ثم فإن الفولتية المحتثة في الملف الأعلى ستجعل الطرف الأيسر للملف الأعلى موجباً عند الزمن t_1 . وانسجاماً مع قانون كيرتشوف ، فإن المعادلة الرياضية للفرع الأعلى تكون :

$$Z_1 I_1 + j\omega L_1 I_1 + j\omega M_{12} I_2 = \varepsilon. \qquad (13\text{–}45)$$

حيث استعملت علامة الزائد مع المحاثة المتبادلة وذلك لأن التيار الموجب I_2 يعطي فولتية في الفرع الأعلى بنفس اتجاه هبوط الفولتية في المقاومة $(I_1 R)$. المعادلة الثانية تكون

$$j\omega M_{12} I_1 + Z_2 I_2 + j\omega L_2 I_2 = \varepsilon, \qquad (13\text{–}46)$$

حيث أعتبرت $M_{12} = M_{21}$ بسبب التناظر بين الملفين .

ويمكننا تحديد الإشارة على ضوء الأُسس نفسها التي مرت سابقاً ، ويمكن التحقق من ذلك بملاحظة أن M_{12} ينبغي أن تظهر في معادلة الفرع الأول وبنفس اشارة M_{21} في معادلة الفرع الثاني . الحل الآني للمعادلاتين (13-45) و (13-46) بإستخدام الطرق الاعتيادية يؤدي الى :

$$I_1 = \varepsilon \frac{Z_2 + j\omega L_2 - j\omega M_{12}}{(Z_1 + j\omega L_1)(Z_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M_{12}^2};$$
$$I_2 = \varepsilon \frac{Z_1 + j\omega L_1 - j\omega M_{12}}{(Z_1 + j\omega L_1)(Z_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M_{12}^2}. \qquad (13\text{–}47)$$

وبتوحيد المعادلتين نجد التيار الكلي $I_2 + I_1$:

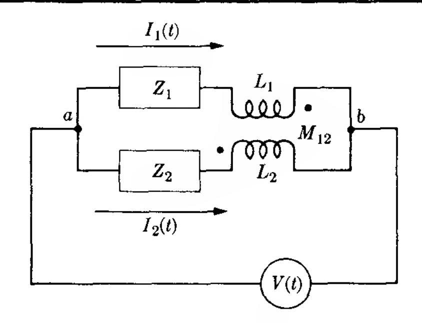
$$I = I_1 + I_2 = \varepsilon \frac{Z_1 + j\omega L_1 + Z_2 + j\omega L_2 - 2j\omega M_{12}}{(Z_1 + j\omega L_1)(Z_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M_{21}^2}. \qquad (13\text{–}48)$$

إن معامل ε في الطرف الايمن من المعادلة عبارة عن مقلوب الممانعة المتصلة بالمصدر الكهربائي ، أو صافي الممانعة بين النقطتين a و b [لاحظ الدائرة الكهربائية المبينة بالشكل (13-10)] . فإذا كان M_{12} يساوي صفراً فإنه من الجلي أن الممانعة

الكلية تساوي ناتج جمع التوازي لمانعات الفرعين . للربط المبين بالشكل تزداد المانعة كلما زادت M_{12} .

الشكل (11 ـ 13) يبين الدائرة الناتجة عن تبادل ربط أسلاك التوصيل لواحد من ملفات الحاثة المتبادلة . لاحظ أن الفرق الوحيد بين الدائرتين الكهربائيتين السابقتين هو أن النقطة السوداء قد تحركت من النهاية اليسرى للملف الأعلى الى نهايته اليمنى . ونتيجة لهذا التغير ينبغي تبديل اشارة الحد M_{12} في المعادلاتين (45-13) و (46-13) ، وعندئذ نحصل على :

$$\left.\begin{aligned}(Z_1 + j\omega L_1)I_1 - j\omega M_{12}I_2 &= \mathcal{E},\\ -j\omega M_{12}I_1 + (Z_2 + j\omega L_2)I_2 &= \mathcal{E}.\end{aligned}\right\} \qquad (13\text{–}49,$$



شكل **13-11** . الدائرة الناتجة عن عكس اشارة الحاثة المتبادلة للدائرة المتمثلة بالشكل **(13-10)** .

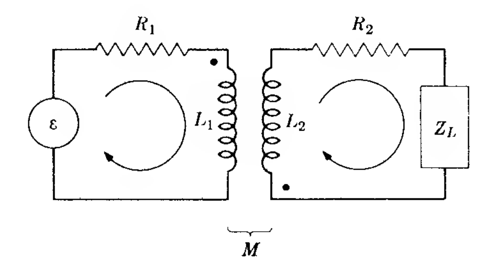
وبسهولة يمكن ايجاد التيارين I_1 و I_2 ، ومن ثم استخراج المانعة :

$$Z_{ab} = \frac{(Z_1 + j\omega L_1)(Z_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M_{12}^2}{Z_1 + j\omega L_1 + Z_2 + j\omega L_2 + 2j\omega M_{12}}, \qquad (13\text{–}50)$$

عندما تكون الحاثة المتبادلة صفراً فإن المانعة تكون مساوية للحالة السابقة . العلاقة بين Z_{ab} لقيمة محددة لـ M_{12} و Z_{ab} لقيمة M_{12} المساوية للصفر تعتمد على طبيعة المَعْلم «parameter» وبطريقة معقدة نوعاً ما . ولكننا سنذكر هنا أن Z_{ab} قد تكون اكبر أو أصغر من Z_{ab} لقيمة M_{12} المساوية للصفر .

يمثل الشكل (13-12) الدائرة الأساسية لمعظم أجهزة المحاثة المتبادلة الشائعة أو المحولة . R_1 و R_2 يمثلان مقاومتي الملف الابتدائي والملف الثانوي . L_1 و L_2 يمثلان المحاثات الذاتية لها ، و M يمثل المحاثة المتبادلة (الموجبة) بينهما . Z_L تمثل رادة الحمل المربوط الى الملف الثانوي و $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{j\omega t}$ تمثل الفولتية عبر طرفي الملف الابتدائي . فإذا فرضنا التيارين $I_1 e^{j\omega t}$ و $I_2 e^{j\omega t}$ المبينين في الشكل هما بالاتجاهات المبينة ، فإن قانون الفولتية ليكرتشوف يتطلب تحقق المعادلات الآتية :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= I_1R_1 + j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2, \\ &\text{و} \\ 0 &= I_2R_2 + j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1 + I_2 Z_L, \end{aligned}\right\} \qquad (13\text{-}51)$$



شكل **13-12** . المحولة

وبحل هذه المعادلات نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{Z_L + R_2 + j\omega L_2}{(R_1 + j\omega L_1)(Z_L + R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}\,\mathcal{E}_0, \\ &\text{و} \\ I_2 &= \frac{-j\omega M}{(R_1 + j\omega L_1)(Z_L + R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}\,\mathcal{E}_0. \end{aligned}\right\} \qquad (13\text{-}52)$$

إن هذه المعادلات المركبة نسبياً تقدم الحل التام للدائرة الكهربائية المبينة بالشكل (13-12) .

لاستخدامات عديدة يكون من الأفضل الأخذ بعين الاعتبار المحولة المثالية ، حيث تتحقق المعادلتان الآتيتان :

$$V_L = a\mathcal{E}_0, \qquad I_2 = -\frac{I_1}{a}, \tag{13-53}$$

إذ إن a ثابت لايعتمد على التردد و V_L تمثل الفولتية عبر Z_L ، وإن كافة الكميات الأخرى مبينة بالشكل (13-12) . الشرط اللازم تحققه لضمان صحة المعادلة الثانية من العلاقة (13-53) هو

$$\frac{Z_L + R_2 + j\omega L_2}{j\omega M} = a, \tag{13-54}$$

وهذا الشرط بدوره يتحقق فيما اذا كان

$$\omega L_2 \gg |Z_L + R_2|.$$

ويمكننا إيجاد الشروط المماثلة التي تضمن صحة العلاقة

$$V_L/\mathcal{E}_0 = a.^*$$

إن هذه الشروط تمثل كميات مركبة ، لا يمكن تحقيقها بسهولة . ومن ناحية أخرى ، قد توجد محولات عملية تحقق هذه الشروط خلال مدى واسع نسبياً للتردد . لهذه الأجهزة تصح المعادلات الآتية :

$$I_2 = -\frac{I_1}{a}, \qquad V_L = a\mathcal{E}_0,$$

و

$$\frac{\mathcal{E}_0}{I_1} = -\frac{V_L}{a^2 I_2} = \frac{Z_L}{a^2}. \tag{13-55}$$

تبين العلاقة الأخيرة (13-55) أن المحولة تعمل كمحولة ممانعة كذلك وبنسبة تحويل مقدارها a^{-2} . وترك للقارىء كتمرين ليبين أن $a = N_2/N_1$ لزوجين متقاربين من الملفات ، أي أن a تمثل النسبة بين عدد لفات الملف الثانوي الى عدد لفات الملف الابتدائي .

13-10 معادلات الشبكة والعقدة Mesh and nodal equations

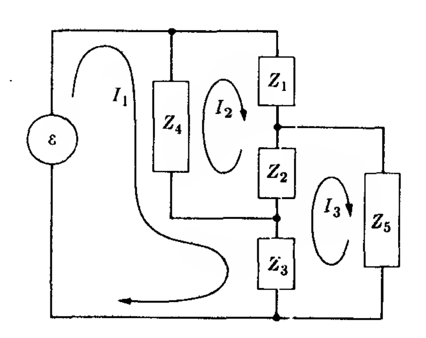
من الممكن تحليل دوائر التيار المتناوب الأكثر تعقيداً بطريقتين ، الاولى تستند الى قانون الفولتية لكيرتشوف وتسمى بتحليل الشبكة والطريقة الثانية تستند الى

* يمكن إيجاد التفاصيل في Guillemin, *loc. cit.*, Chapter VIII.

قانون التيار لكيرتشوف وتسمى بتحليل العقدة . ولكل من الطريقتين ميزاتها الحسنة والسيئة . ولما كان اختيار الطريقة الملائمة يبسط كثيراً بعض المسائل ، ففي هذا البند سوف ندرس الطريقتين معاً .

الخطوة الاولى لتطبيق تحليل الشبكة هي تحديد الشبكات ، ويمكن انجاز ذلك بفرض تيارات دارة مغلقة بحيث إن تياراً واحداً على الاقل سيسري خلال كل عنصر من عناصر الدائرة . وكمثال على ذلك ، في الدائرة الكهربائية المبينة بالشكل (13-13) ثلاث شبيكات وقد اشرت عليها التيارات I_1 و I_2 و I_3 كتيارات دارة مغلقة . وهذا بالطبع ليس الاختيار الممكن الوحيد حيث توجد اختيارات أخرى ممكنة ومفيدة . وبتطبيق قانون الفولتية لكيرتشوف على كل دارة في هذه الشبيكات نجد :

$$\begin{aligned}
I_1(Z_3 + Z_4) \quad & -I_2Z_4 \quad & -I_3Z_3 \quad & = \varepsilon, \\
-I_1Z_4 \quad & +I_2(Z_1 + Z_2 + Z_4) \quad & -I_3Z_2 \quad & = 0, \\
-I_1Z_3 \quad & -I_2Z_2 \quad & +I_3(Z_2 + Z_3 + Z_5) \quad & = 0.
\end{aligned} \tag{13-56}$$



شكل 13-13 . يوضح الشكل استخدام تحليل الشبكة في دوائر التيار المتناوب .

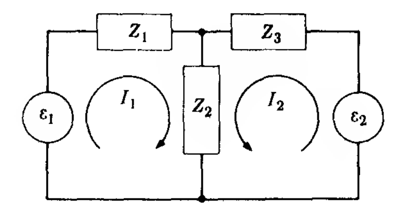
ظهرت اشارات الناقص في العلاقات المذكورة في اعلاه لأنه ، في الشبيكة الاولى مثلاً ، يسري I_2 خلال Z_4 معاكساً لاتجاه سريان I_1 خلالها . يمكننا حل معادلات العلاقة (13-56) بطريقة سهلة وذلك باستخدام المحددات لنحصل على مقادير جبرية لمجموعة تيارات الشبكة في الدائرة الكهربائية . ومن المفيد كتابة معادلات الشبكة بالصيغة الآتية :

$$\sum_{j=1}^{n} Z_{ij} I_j = \mathcal{E}_i \, (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{13-57}$$

[للدائرة الكهربائية المبينة بالشكل (13-13) تكون n = 3] . في هذه المعادلة يكون $Z_{ij} = Z_{ji}$ والذي يعد تحققاً مفيداً لصحة معادلات الشبكة .

وكمثال ثانٍ ، لنفرض الدائرة الكهربائية المبينة بالشكل (13-14) . المعادلات الملائمة لهذه الدائرة الكهربائية تكتب كالآتي :

$$\begin{aligned} I_1(Z_1 + Z_2) + \quad I_2 Z_2 \quad &= \mathcal{E}_1, \\ I_1 Z_2 \quad + I_2(Z_2 + Z_3) &= \mathcal{E}_2. \end{aligned} \tag{13-58}$$



شكل **13-14** . توضيح اضافي لاستخدام معادلات الشبكة .

لا يوجد أي مبرر لأن تكون $\mathcal{E}_2$ و $\mathcal{E}_1$ في نفس الطور «phase» ، وأعتيادياً لا يحصل هذا ، ولكن يمكن التعبير عنها كالآتي :

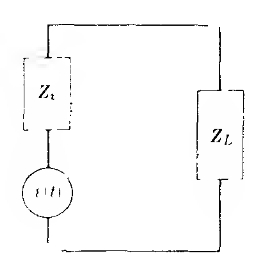
$$\mathcal{E}_1 = |\mathcal{E}_{10}| e^{j\omega t}$$

و

$$\mathcal{E}_2 = |\mathcal{E}_{20}| e^{j(\omega t + \varphi)}$$

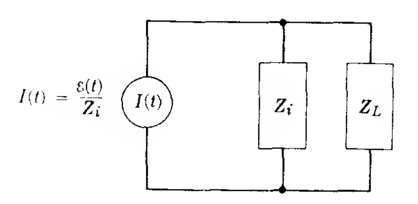
ومع ذلك ، من المهم تحديد الاطوار بدقة . ويمكن انجاز ذلك بأختبار الاطوار النسبية في اللحظة t = 0 وتحديد الاتجاهات بالنسبة الى تيارات الشبكة المعينة . ومن المهم كذلك ملاحظة أنه مالم تكن كافة المولدات الكهربائية لها نفس التردد فان الاسلوب السابق للحمل سيفشل (وبمعنى أوضح ، أن المسألة ستتحول الى تراكب «superposition» مسألتين لا تعتمد احداها على الاخرى وتشتمل كل منها على مولد كهربائي واحد وتردد واحد) .

قبل البدء بمناقشة المعادلات البديلة ودراستها وهي معادلات العقدة ، فإن من المناسب دراسة مولدات الفولتية والتيار . في البنود السابقة ، لقد قمنا بتحليل تمارين الدوائر الكهربائية بدلالة مصادر بحتة للقوة الدافعة الكهربائية ، ومثل هذه الاجهزة المثالية لا يمكن تصميمها ، وطبعاً ، فان الاجهزة العملية تمتلك دائماً ممانعة داخلية معينة . ولذلك فان المولدات العملية تتكون من مصدر للقوة الدافعة الكهربائية $\varepsilon(t)$ وعلى التوالي مع ممانعة داخلية Z_i ، كما موضح بالشكل (15-13) مربوطاً الى حمل خارجي مقداره Z_L . ويمكن الخروج بعدة استنتاجات : أولاً ، إن القدرة المستنفذة في الحمل الخارجي تكون في قيمتها القصوى عندما يكون $Z_L = Z_i^*$. وهذا يعني ، وجوب كون الجزء المقاوم من Z_i مساوياً للجزء المقاوم من Z_L ، وأن يكون الجزءان اللذان يحتويان على الرادة متساويين كذلك ولكن بإشارة مضادة . وقد تركنا برهان ذلك كتمرين للقاريء . وثانياً ، إن مولد الفولتية يكافيء مولد تيار يقوم بتجهيز تيارٍ قيمته $I(t) = \varepsilon(t)/Z_i$ ويتصل على التوازي مع الممانعة الداخلية وهذاالتكافؤ للدائرة الكهربائيةالمبينةبالشكل(15-13) موضح في الدائرة المبينة بالشكل (16-13) . ومن الممكن تبيان هذا التكافؤ بين الدائرتين بسهولة ، بفرض ان مولد التيار المثالي يجهز تياراً مقداره $I(t)$ لأي حمل يربط بطرفيه . اضافة الى ذلك ، فان هذا التكافؤ يعني ، في أي تمرين من تمارين الدوائر الكهربائية ، امكان عدّ المولدات اما مولدات فولتية أو مولدات تيار حسبما تدعو الحاجة .



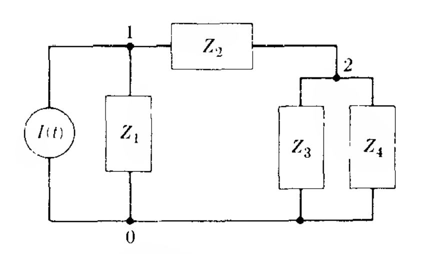
شكل 15-13 . مولد كهربائي عملي مربوط الى حمل خارجي Z_L .

معادلات العقدة للدائرة الكهربائية ناتجة من تطبيق قوانين التيار لكيرتشوف لكل عقدة (نقطة تفرع) في الدائرة الكهربائية . وتمثل نقطة العقدة نقطة ارتباط ثلاثة أو أكثر من عناصر الدائرة الكهربائية . وكمثال بسيط لتطبيق معادلات



شكل **13-16** . « مولد التيار » الذي يكافيء مولد الفولتية الموضح بالشكل **13-15**

العقدة لاحظ الدائرة المبينة بالشكل (17-13) . وايجاد معادلات العقدة يتطلب أن يكون المجموع الجبري للتيارات الكهربائية مساوياً للصفر عند كل عقدة . والعقد يجب ان ترقم ابتداء من العقدة صفر والتي يعدُّ جهدها كمرجع للدائرة الكهربائية . فاذا فرض جهد عقدة المرجع (العقدة صفر) صفراً ، فان التيار في العقدة 1 يكون



شكل **13-17** . يوضح الشكل طريقة تحيير العقدة لدوائر التيار المتناوب

$$I(t) = \frac{V_1}{Z_1} + \frac{V_1 - V_2}{Z_2}, \qquad (13\text{-}59)$$

حيث V_1 و V_2 يمثلان على التوالي جهد العقدة 1 وجهد العقدة 2 . وعند العقدة 2 يكون التيار :

$$0 = \frac{V_2 - V_1}{Z_2} + \frac{V_2}{Z_3} + \frac{V_2}{Z_4}. \qquad (13\text{-}60)$$

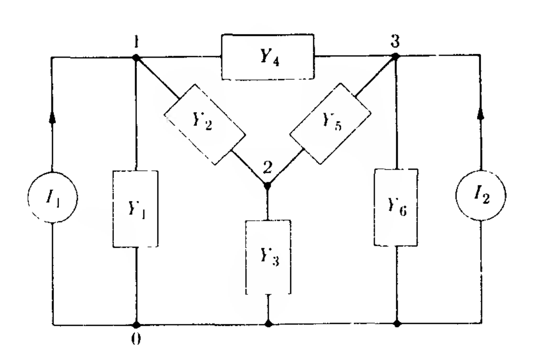
يمكننا ملاحظة أن الكمية المتمثلة بمقلوب الممانعة تكون أكثر ملاءمة لحلول من هذا النوع . ويطلق على مقلوب الممانعة اسم المساحة «admittance» ورمزها Y ، $Y = 1/Z$. تجمع المساحات في حالة التوازي ، في حين تدمج في حالة التوالي بجمع المقلوبات . تصبح المعادلتان (13-59) و (13-60) بدلالة المساحة كالآتي :

$$\begin{aligned} I(t) &= (Y_1 + Y_2)V_1 - Y_2V_2, \\ 0 &= -Y_2V_1 + (Y_2 + Y_3 + Y_4)V_2, \end{aligned} \tag{13-61}$$

وبحل هاتين المعادلتين حلاً آنيا نجد فولتية كل من العقدة الاولى والعقدة الثانية ، V_1 و V_2 .

لندرس مثالاً آخر باستخدام معادلات العقدة ، وذلك بتحليل الدائرة الكهربائية المبينة بالشكل (13-18) . معادلات العقدة لهذه الدائرة تكتب بالصيغ الآتية :

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_1V_1 + Y_2(V_1 - V_2) + Y_4(V_1 - V_3), \\ 0 &= Y_2(V_2 - V_1) + Y_3V_2 + Y_5(V_2 - V_3), \\ I_2 &= Y_6V_3 + Y_5(V_3 - V_2) + Y_4(V_3 - V_1). \end{aligned} \tag{13-62}$$



شكل **13-18** . دائرة أخرى توضح تحليل العقدة .

يمكننا ايجاد فولتيات العقد وذلك بحل هذه المعادلات بالطريقة الاعتيادية . والحقيقة إن ايجاد الفولتية بدلاً من التيار بحل هذه المعادلات يمتاز بفائدة كبيرة وخصوصاً في دوائر الاتصالات الكهربائية .

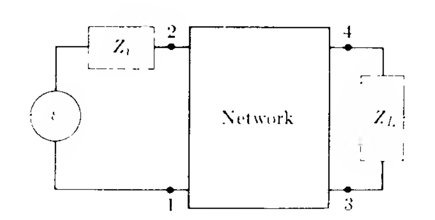
13-11 نقطة السَّوق والممانعات المنتقلة
Driving point and transfer impedances

سنحاول اعطاء تعاريف بسيطة لنقطة السَّوق والممانعات المنتقلة لشبكة كهربائية ذات اطراف اربعة "four-terminal network" ، وذلك لأن هذه المصطلحات تتردد بكثرة في الكتب والمراجع الهندسية . افرض شبكة ذات اربعة اطراف ، اجعل الطرفين 1 و 2 يمثلان نقطتي الدخل "input" للشبكة والطرفين 3 و 4 يمثلان نقطتي الخرج "output" . فإذا ربط مولد للقوة الدافعة الكهربائية ε ذو ممانعة داخلية مقدارها Z_i عبر الطرفين 1 و 2 وكذلك رُبطت الممانعة Z_L عبر الطرفين 3 و 4 ، وكما موضح بالشكل (13-19) ، فسوف يسري التيار I_i في Z_i والتيار I_L في Z_L . لذا فإن ممانعة نقطة السَّوق Z_D تكون :

$$Z_D = \frac{\varepsilon}{I_i}, \qquad (13\text{-}63)$$

والممانعة المنتقلة تكون :

$$Z_T = \frac{\varepsilon}{I_L}. \qquad (13\text{-}64)$$



شكل 13-19 . شبكة كهربائية رباعية الاطراف

وينبغي ملاحظة أن Z_D و Z_T تعتمدان على Z_i و Z_L بالاضافة الى اعتمادها على التركيب الداخلي للشبكة .

مثل هذه المعالجة المختصرة لا يمكن ان تمثل الكفاية لموضوع نظرية الشبكة الكهربائية : بعض الكتب القديمة مثل كتاب جويلمين (Guillemin) وعدد وافر من الكتب الحديثة ينبغي الرجوع اليها لدراسة تفاصيل هذا الموضوع المعقد .

مسائل

13-1 محاثة مقدارها $2H$ ومقاومة مقدارها $3ohms$ ربطتا على التوالي مع بطارية $5volt$ ومع مفتاح . احسب التيار ومعدل تغير التيار (dI/dt) في الدائرة عند الازمان الآتية بعد غلق المفتاح : (أ) $0.3sec.$ و (ب) $1sec.$ و (جـ) $4sec.$.

13-2 دائرة كهربائية تتألف من محاثة L_0 ومقاومة R_0 وبطارية ε_0 يسري فيها تيار ثابت قدره $I = \varepsilon_0/R_0$. مفتاح الدائرة يكون مفتوحاً عند الزمن $t = 0$ ، مسبباً حدوث قوس كهربائي electric arc عبر المفتاح . فإذا كانت مقاومة القوس الكهربائي تمثل بالكمية k/I ، إذ أن k مقدار ثابت $(k < \varepsilon_0)$. اوجد التيار المار خلال القوس الكهربائي دالة للزمن . ماالقيمة النهائية الثابتة للتيار المار خلال القوس الكهربائي؟

13-3 . ربطت متسعة C ومقاومة R وبطارية ε_0 على التوالي مع مفتاح . فإذا أغلق المفتاح عند الزمن $t = 0$ ، ضع المعادلة التفاضلية التي تحدد الشحنة Q على المتسعة . أوجد Q دالة للزمن .

13-4 ربطت متسعة C ذات شحنة مقدارها Q_0 بصورة مف ـ ة وعلى التوالي مع مقاومة R ومحاثة L . أوجد التيار بدلالة الزمن . وضح أن هـ الك ثلاثة أنواع مختلفة من الحلول ، تعتمد على ما اذا كانت الكمية R^2-4L/C اقل من الصفر أو مساوية للصفر أو اكبر من الصفر . الأول من هذه الشروط يطلق عليه حالة المضاءلة الخفيفة والثاني حالة المضاءلة الحرجة والثالث حالة المضاءلة الشديدة .

13-5 ربطت متسعة C' كمجزيء «shunt» لمجموعة $R-L-C$ المبينة في الشكل (13-1) $R = 100\,ohm.$ و $L = 1\,H$ و $C = 100\,\mu f$ و $C' = 10\,\mu f$. ارسم خطاً بيانياً للممانعة $|Z|$ إزاء التردد من الصفر الى $f = 10^4\,cycles/sec$.

13-6 وضعت عناصر التوالي المكونة من مقاومة R ومحاثة L على التوازي مع عناصر توالي اخرى مكونة من مقاومة R ومتسعة C . وضح بأنه إذا كان $R^2 = L/C$ فإن الممانعة لا تعتمد على التردد .

13-7 سلك مقاوم ملفوف له مقاومة للتيار المستمر قدرها $90.00\ ohms$ ومحاثة مقدارها $8\,\mu H$. مامقدار زاوية طور الممانعة عند التردد $1000\ cycles/sec$؟ وضعت متسعة على التوازي مع المقاومة لغرض تقليل زاوية الطور الى الصفر عند التردد $1000\ cycles/sec$ بدون إحداث تغيير يذكر في المقاومة .

ما مدى التردد الذي تكون عنده زاوية الطور أقل مما كانت عليه قبل إضافة المتسعة ؟

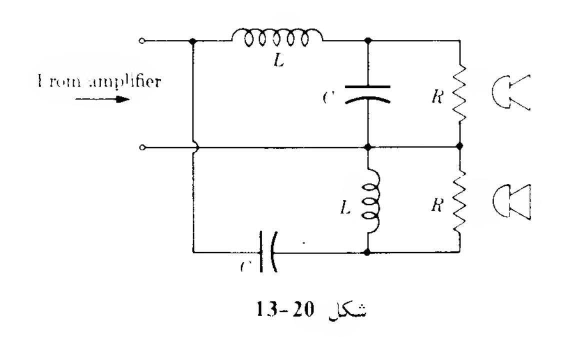
13-8 ربط موا· تيار متناوب ذو ممانعة داخلية Z_i على التوالي مع ممانعة خارجية متغيرة Z_L . اثبت أن اقصى قدر من القدرة ينتقل ا لى الحمل الخارجي عندما تكون $Z_L = Z_i^*$.

13-9 في الدائرة الكهربائية المبينة بالشكل (13-6) ، $L = 4 mH$ و $C = 2\ \mu f$ و $R_1 = 25 ohms$ و $R_2 = 40 ohms$. أوجـد المجموعـة الآتيـة للترددات : (أ) حيث $\omega = 1/\sqrt{LC}$ و (ب) عندما تكون المانعة في قيمتها القصوى و (جـ) عندما يكون التيار المار خلال R_1 في الطور نفسه مع فولتية المولد .

13-10 وضح أن الكمية Q المعرفة في متن الفصل يمكن التعبير عنها على أنها تساوي 2π مضروبة في الطاقة القصوى المخزونة في الدائرة الكهربائية ومقسومة على الطاقة المفقودة خلال دورة واحدة . وقد يستخدم هذا النص أحياناً كتعريف للكمية Q ، وهو لا يعتمد على معالم دائرة كهربائية معينة .

13-11 شبكة تحويل لمنظومة hi-fi (جهاز لإعادة إرسال الصوت المستقبل بدقة كبيرة) مطلوب تصميمها بحيث ترتبط سماعتان (كل منها ذات مقاومة قدرها R) بمرحلة الخرج للمضخم «amplifier» . الغرض من إحدى السماعتين هو استلام الترددات العالية ومن الاخرى هو استلام الترددات الواطئة .

الشكل (13-20) يبين الشبكة الكهربائية اللازمة لذلك . كل من المتسعتين ذات سعة مقدارها C وكل من المحاثتين ذات محاثة قدرها L .



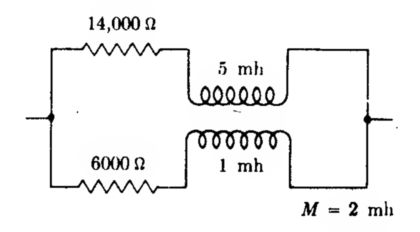
شكل 13-20

(أ) أوجد العلاقة الرياضية بين L و C لقيمة معطاة لـ R بحيث تظهر الشبكة صفة حمل مقاوم نقي (قدره R) للمضخم لكافة الترددات .

(ب) تردد التحويل ω_C يعرف بأنه التردد الذي عنده تستلم كل من السماعتين نصف القدرة المجهزة من قبل المضخم . أوجد L و C لقيم معينة من R و ω_C .

13-12 . متسعة سعتها $1\mu f$ شحنت أولاً لفرق جهد قدره 100 volts وذلك بربطها الى بطارية ، ومن ثم فصلت عن مصدر الشحن وأُفرغت شحنتها مباشرة في ملف حلزوني حلقي مكون من 300 لفة . الملف الحلزوني الحلقي ذو نصف قطر متوسطه يساوي 20 cm ومساحة مقطعه تساوي $4\,cm^2$ وتحتوي على فجوة هوائية (انظر الشكل 15-10) سمكها 2mm . أهمل الفقدان النحاسي (وهو خسارة الطاقة الناجمة عن مقاومة الأسلاك النحاسية التي يصنع منها الملف) وخسارة التخلف المغناطيسي وتأثير التهدب «fringing» (التشوه الحاصل في المجال خارج الفجوة) ، احسب القيمة القصوى للمجال المغناطيسي المتكون في الفجوة الهوائية . اعتبر النفوذية النسبية «relative permeability» لقلب الملف الحلزوني الحلقي «toroid» مساوية 5000 .

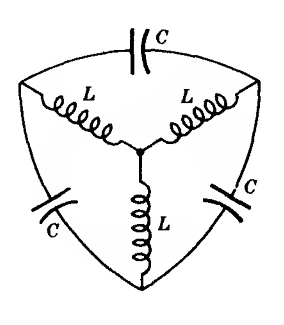
13-13. سلط فرق جهد قدره 1 volt ذو تردد $f = 10^6/\pi$ cycle/ sec عبر الدائرة المبينة بالشكل 21 - 13 . فإذا علمت أن المحاثة المتبادلة للملفين ناتجة عن وضعهما بصورة متعاكسة ، أوجد التيار المتكون في الفرع العلوي من الدائرة الكهربائية .



شكل 13-21

13-14 . محولة قدرة تعمل بتردد قدره 60 cycle/ sec (نسبة عدد اللفات 2:1) ذات محاثة ابتدائية قدرها 100H ومقاومة للتيار المستمر قدرها 20 ohms . معامل الازدواج بين الملفين الابتدائي والثانوي يساوي واحداً تقريباً . فإذا أثر على الملف الابتدائي بفرق جهد قدره 1000 volts ، احسب التيار في الملف الابتدائي: (أ) عندما تكون دائرة الملف الثانوي مفتوحة . (ب) عندما تحتوي الدائرة الثانوية على مقاومة حمل قدرها 20 ohms .

13-15 . ثلاث متسعات متماثلة وثلاث محاثات متماثلة أيضاً مربوطة كما في الشكل (13-22) . أوجد ترددات الرنين لهذه المنظومة . (ملاحظة : استخدم تحليل الشبكة ، وتياراً ذا تردد مفترض قدره ω ، وضح أن المعادلات الثلاث المستخرجة تكون متناغمة لتردد معين فقط) .



شكل 13-22

13-16 . في الدائرة الكهربائية المبينة بالشكل (13-14) ،

$$Z_1 = 2 + 5j,\ Z_2 = 8 - j,\ Z_3 = 4 + 2j.$$

فاذا علمت أن فولتيات المولدات في الطور نفسه و $\varepsilon_1 = 10$ volts و $\varepsilon_2 = 2$ volts أوجد I_1 و I_2.

13-17 . في الدائرة الكهربائية المبينة بالشكل (13-17) .

$$I(t) = I_1 e^{i\omega t}$$

أستبدلت Z_4 بمولد تيار $I_2 e^{i\omega t}$. ولدا التيار الكهربائي في الطور نفسه. Z_1 و Z_3 متسعتان رادتها 40 ohms و 60 ohms على الترتيب . Z_2 مقاومة نقية قدرها

20 ohms و $I_1 = 5$ amp و $I_2 = 25$ amp . أوجد فولتيات العقدة عند النقطتين 1 و 2 بالنسبة الى النقطة 0 .

الفصل الرابع عشر

فيزياء البلازما *

PHYSICS OF PLASMAS

الغازات عالية التأين تعدُّ موصلات جيدة للكهربائية . والجسيمات المشحونة في مثل هذا الغاز تتبادل التأثير مع المجال الكهرومغناطيسي الموضعي ، بالاضافة الى ذلك ، يمكن للحركة المنظمة لحاملات الشحنة «charge carriers» هذه (تيارات ، وتغيرات في كثافة الشحنة) أن تولد مجالات كهربائية ومغناطيسية . عندما يكون غاز متأين عرضة لتأثير مجال كهربائي ستاتيكي فإنه يتصرف كأي موصل آخر . وتعيد حاملات الشحنة في الغاز توزيع نفسها سريعاً بطريقة بحيث يحجب معظم الغاز من تأثيرات المجال . اطلق لانكموير[†] على مناطق غازية خالية من المجال نسبياً حيث تكون الشحنة الحَيِّزية السالبة «**negative** space charge» والشحنة الحَيِّزية الموجبة متوازنة تقريباً اسم البلازما ، في حين أطلق على مناطق الشحنة الحَيِّزية أو مناطق المجال القوي عند حدود البلازما اسم الاغلفة «sheaths» .

وبتعبير مكافيء يمكننا أن نقول : إن الغاز المتأين الذي يحتوي على عدد كبير وبشكل كافٍ من الجسيمات المشحونة والذي يحجب نفسه ''الكتروستاتيكياً'' عند مسافة صغيرة مقارنة مع أطوال أخرى ذات أهمية فيزياوية ، يعدُّ مايعرف

* بالامكان حذف هذا الفصل بدون فقدان استمرارية المادة العلمية في الكتاب .

† I. Langmuir, *Physical Review* 33, 954 (1929).

بالبلازما . ومع ذلك ، سوف نعطي تعريفاً أكثر دقة للبلازما بدلالة مسافة الحجب في البند (1ـ14). كان الاهتمام الأولي في البلازما مرتبطاً مع الالكترونيات الغازية (التفريغ الكهربائي خلال الغازات ، والاقواس الكهربائية ، والتوهج الكهربائي «electric flames») . وبعد ذلك وجه الاهتمام صوب مشاكل في الفيزياء الفلكية النظرية ، ومشاكل التلوث الايوني في المفاعلات النووية الحرارية (مفاعلات الاندماج) * «fusion reactors» .

يطلق على الدراسة العامة المشتملة على التأثيرات المتبادلة بين الغازات المتأنية والمجالات الكهرومغناطيسية المعتمدة على الزمن اسم داينميك البلازما . وللعديد من المسائل المهمة في هذا الحقل ، يكون من المستحيل معالجة البلازما على نحو كافٍ بدلالة صياغة عينية خالصة . وبدلاً من ذلك يكون من الضروري استخدام ما يطلق عليه اصطلاحاً بالنظرية الحركية «kinetic theory» . ينبغي دراسة الايونات والالكترونات الانفرادية ، وينبغي الاخذ بنظر الاعتبار تصادماتها مع الجسيمات الأخرى خلال حل معادلة بولتزمان الانتقالية . ولهذا ستظهر صياغة دقيقة جداً لمشاكل البلازما ، ولكن عموماً يكون حلها معقداً للغاية ، باستثناء الحالات التي يجوز فيها اهمال عدد من الحدود في معادلة بولتزمان . ومع ذلك ، هنالك ثلاث صياغات تقريبية توفر لنا النظرة الهامة لما يحدث داخل البلازما .

النظرية الاولى هي نظرية التوازن ، والتي تستند الى افتراض أن التصادمات بين الجسيمات المشحونة تكون كافية لتجعل توزيع الجسيمات في كيان البلازما خاضع لتوزيع بولتزمان ـ ماكسويل السرعي المعروف جيداً :

$$N_j(\mathbf{v})\, dv_x\, dv_y\, dv_z = N_{0j} \left(\frac{m_p}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m_p v^2/2kT}\, dv_x\, dv_y\, dv_z,$$

حيث ان N_{0j} يمثل عدد الجسيمات من النوع j لوحدة الحجم في البلازما ، و v_x ، .... الخ يمثل مركبات السرعة و m_p تمثل كتلة الجسيمات من النوع j و T تمثل درجة الحرارة المطلقة . وبالتالي فمن الممكن حساب الصفات الحركية والانتقالية بدلالة توزيع السرعة .

والطريقة التقريبية الثانية هي نظرية المدار «orbit theory» ، التي تعالج حركة الجسيمات المشحونة (أيونات والكترونات) في مجالات كهربائية ومغناطيسية مفترضة . وقد تكون هذه المجالات دوالاً لكل من الموقع والزمن . وتمثل نظرية المدار تقريباً جيداً لحركة جسيم في البلازما عندما لا تلعب التصادمات بين الجسيمات

* See, for example, Lyman Spitzer, *Physics of Fully Ionized Gases*, Interscience, New York (1956), and Amasa Bishop, *Project Sherwood—The U. S. Program in Controlled Fusion*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass. (1958).

الدور الرئيس ، أي عندما يكون متوسط المسار الحر للتصادمات كبيراً قياساً الى الابعاد المميزة للمدار . تحت هذه الشروط من الممكن معالجة تأثير التصادمات كاضطراب «perturbation» . وتتركز المشكلة الابتدائية حول جعل المجال الكهرومغناطيسي المفترض متناسقاً مع نفسه . أو بعبارات أخرى . ينبغي أن يكون المجال المفترض مجموع المجال الخارجي والمجال الناشيء عن الجسيمات المدارية .

المعالجة التقريبية الثالثة هي الصياغة الهيدرومغناطيسية حيث نستخدم هنا المعادلات الكهرومغناطيسية الكلاسيكية (معادلات ماكسويل) وندمجها مع المعادلات الكلاسيكية لحركة الموائع «fluid motion» . ومن الجلي أن المعالجة الهايدرومغناطيسية هي وصف عيني للبلازما ؛ وتعدُّ تقريباً جيداً عندما يكون متوسط المسار الحر للتصادمات صغيراً جداً بالنسبة الى المسافات الفيزياوية المهمة في منظومة البلازما . الصورة الهايدرومغناطيسية تشكل نقطة بداية جيدة لمناقشة الحركة الجماعية للجسيمات في البلازما ، أي تذبذبات البلازما .

إن طريقة النظرية الحركية الدقيقة لفهم مسائل البلازما هي خارج نطاق هذا الكتاب . ومن جهة أخرى ، يمكن مناقشة عدة صفات مهمة للبلازما بدلالة التقريبات الموضحة في اعلاه . وسوف نفرض للتبسيط أن البلازما تتألف من الكترونات (شحنة e−) وايونات موجبة أُحادية الشحنة (شحنة e+) . وقد توجد ذرات متعادلة أيضاً ، ولكننا سوف نهمل تعقيدات مثل التصادمات الأيونية واعادة الاتحاد بين الالكترونات والايونات .

في البند (1–14) ، ومرة أخرى في البند (7–14) ، سندرس البلازما تحت ظروف مستقرة او في حالة مطردة ، والتي تكون فيها نظرية التوازن ملائمة لها . ومن جهة أخرى ، سنهتم في البندين (2–14) و (3–14) بحركة الجسيم المنفرد ، وهنا تكون نظرية المدار ملائمة . واخيراً سنعالج في البنود من (4–14) الى (6–14) بعض المفاهيم الداينميكية للبلازما ، وسوف نجري ذلك من خلال إطار الهيدرومغناطيسية .

14-1 التعادل الكهربائي في البلازما
Electrical neutrality in a plasma.

إحدى الصفات المهمة للبلازما هي نزعتها لتبقى متعادلة كهربائياً ، أي نزعتها الى توازن الشحنة الحَيّزية السالبة مع الشحنة الحَيّزية الموجبة في كل جزء من الحجم العيني وان اختلال التوازن البسيط في كثافات الشحنة الحَيّزية يسبب نشوء قوى

كهروستاتيكية قوية والتي تؤثر في اتجاه اعادة التعادل ، حيثما أمكن . من جهة اخرى ، لو كانت البلازما عرضة لمجال كهربائي خارجي ، فإن كثافات الشحنة الحيزية سوف تنظم نفسها بحيث يحجب الجزء الاعظم من البلازما من تأثيرات المجال .

لندرس مثالاً بسيطاً للغاية ، افرض شحنة كروية قدرها $+Q$ وضعت داخل البلازما ، مما يجعلها عرضة لتأثير مجال كهربائي . في الواقع ، إن الشحنة $+Q$ سوف تتعادل تدريجياً وذلك بسبب تصادمها المتكرر بالجسيمات المشحونة من البلازما ، ولكن اذا كان الجسم المشحون صغيراً جداً ، فإن التعادل سيستغرق فترة محسوسة من الزمن . وفي الوقت نفسه ، فإن الالكترونات تجد الحالة ملائمة من ناحية الطاقة للتحرك قريباً من الشحنة ، في حين تميل الايونات الموجبة للتحرك بعيداً عن الشحنة . عند شروط التوازن (لاحظ البند 3-5) ، فإن احتمالية ايجاد جسيم مشحون في منطقة معينة ذات طاقة كامنة قدرها W تكون متناسبة مع معامل بولتزمان $\exp(-W/kT)$.

وبهذا ، تعطى كثافة الالكترون N_e بالصيغة الآتية :

$$N_e = N_0 \exp\left(e\frac{U - U_0}{kT}\right), \tag{14-1}$$

حيث تمثل U الجهد الموضعي و U_0 يمثل الجهد المرجعي (جهد البلازما) و T تمثل درجة حرارة البلازما المطلقة و k يمثل ثابت بولتزمان . N_0 تمثل الكثافة الالكترونية في مناطق حيث يكون $U = U_0$.

إذا كانت N_0 تمثل ايضاً كثافة الأيونات الموجبة في مناطق الجهد U_0 ، فإن كثافة الايون الموجب N_i تعطى بالصيغة الآتية :

$$N_i = N_0 \exp\left(-e\frac{U - U_0}{kT}\right). \tag{14-2}$$

نجد الجهد U من حل معادلة بويزون «Poisson's equation»

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right) = -\frac{1}{\epsilon_0}(N_i e - N_e e) = -\frac{2N_0 e}{\epsilon_0}\sinh\left(e\frac{U - U_0}{kT}\right). \tag{14-3a}$$

هذه المعادلة تمثل معادلة تفاضلية غير خطية ، ولهذا ينبغي تكاملها عددياً . ومن جهة أخرى ، فإن الحل التقريبي للمعادلة (14-3a) ، والذي يعدّ دقيقاً للدرجات الحرارية العالية ، يفي هنا بالغرض . فإذا كان :

$$kT > eU,$$

فإن

$$\sinh (eU/kT) \approx eU/kT,$$

و

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right) = \frac{2N_0e^2}{\epsilon_0 kT}(U - U_0), \qquad (14\text{-}3b)$$

يصبح الحل :

$$U = U_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\exp\left(-\frac{r}{h}\right). \qquad (14\text{-}4)$$

تمثل r هنا المسافة من الشحنة الكروية Q+ ، و h تمثل مسافة حجب دَباي «Debye shielding distance» المعطاة بالصيغة الآتية :

$$h = \left(\frac{\epsilon_0 kT}{2N_0e^2}\right)^{1/2}. \qquad (14\text{-}5)$$

وبهذا فإن إعادة توزيع الالكترونات والأيونات في الغاز يكون بحجب Q بالكامل وبمسافة تقدر ببضع قيم من h .

يطلق على الغاز المتأين اسم البلازما إذ ماكان طول دَباي ،h ، صغيراً مقارنة مع الأبعاد الفيزياوية الأخرى المهمة . وان هذا الطول لايعد قيداً كبيراً مادام تأين الغاز محسوساً ، عند $T = 2000\,^{\circ}K$ و $N_0 = 10^{18}$ electrons أو ions/ m^3 ، يكون طول دباي 2.2×10^{-6} متراً .

14-2 مدارات الجسيم وحركة الانجراف في البلازما
Particle orbits and drift motion in a plasma

مدار الجسيم المشحون q الذي يتحرك في مجالات كهربائية ومغناطيسية مفترضة قد يحسب مباشرة من معادلة القوة :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \qquad (14\text{-}6)$$

نجد من المناسب البدء بهيئات مجال بسيطة نسبياً ، ومن ثم تعميم ذلك على المجالات التي تتغير ببطء في الحيز .

تأثير مجال كهربائي ثابت على البلازما لا يكون ذا أهمية خاصة ، وذلك لأن البلازما تنظم نفسها بتكوين غلاف رقيق من شحنة حَيِّزية تحجب الكيان الرئيس للبلازما من المجال . من جهة أخرى ، فإن المجال المغناطيسي الثابت يسبب دوران الجسيمات حول خطوط المجال بدون تغير توزيع الشحنة الحَيِّزية .

الحالة الاولى : مجال مغناطيسي منتظم، $\mathbf{E} = 0$.

هذه الحالة مناظرة للحركة التي وصفت في التمرين (1-8) ، ولكونها تشكل القاعدة لحركة مدارية اكثر تعقيداً في البلازما ، فإننا سنناقشها هنا في تفصيل شامل . وينبغي هنا أن نؤكد على أنه يمكن تطبيق الحالة الاولى على حالات اخرى عديدة بالاضافة الى البلازما ، فمثلاً ، الحالة الاولى تعد اساس عمل معجلات الجسيمات "particle accelerators" كالسايكلترون والبيتاترون .

قوة لورنتز "Lorentz force" تكون عمودية دائماً على سرعة الجسيمات المشحونة $\mathbf{v}$ ، وبهذا فإن الطاقة الحركية تبقى ثابتة :

$$K = \tfrac{1}{2} m_p v^2 = \text{constant}, \qquad (14\text{-}7)$$

حيث m_p تمثل كتلة الجسيم . من المناسب تحليل السرعة $\mathbf{v}$ الى مركبتين : $\mathbf{v}_{\|}$ موازية لـ $\mathbf{B}$ و $\mathbf{v}_{\perp}$ في مستوي عمودي على $\mathbf{B}$. بما أن $\mathbf{v}_{\|}$ لا تتأثر بالمجال . فإن :

$$K_{\|} = \tfrac{1}{2} m_p v_{\|}^2$$

تبقى ثابتة كذلك ، ومن ثم فإن :

$$K_{\perp} = \tfrac{1}{2} m_p v_{\perp}^2 = K - K_{\|} \qquad (14\text{-}8)$$

تكون كذلك بمثابة ثابت للحركة .

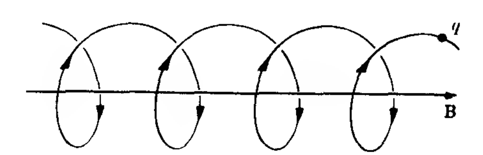
تولد قوة لورنتز تعجيلاً مركزياً ، لذا :

$$qv_{\perp}B = \frac{m_p v_{\perp}^2}{R},$$

إذ أن R (نصف قطر المدار) يعطى بالصيغة الآتية :

$$R = \frac{m_p v_{\perp}}{qB}. \tag{14-9}$$

وعادة يطلق على نصف القطر R اسم نصف قطر لارمور "Larmor radius" للجسيم . توصف الحركة الكاملة للجسيم المشحون كحركة دائرية للجسيم في مدار (مدار لارمور) متراكب على حركة منتظمة لمركز المدار ، أو المركز الدليلي "guiding center" ، على طول خط المجال المغناطيسي . الحركة اللولبية الناتجة موضحة بالشكل (1-14) .



شكل 1-14 . حركة جسيم في مجال مغناطيسي منتظم

يعمل المجال المغناطيسي على تقييد البلازما بربط الجسيمات بمدارات دائرية ، وبالطبع ، لا تلاحظ أي تقييدات في اتجاه المجال . لألكترونات وأيونات لها نفس الطاقة الحركية $K_{\perp}$ ، تكون الحركة الدائرية الحلزونية للالكترونات في مدارات اصغر بكثير من تلك المدارات التي تعمل بها الأيونات ، وتكون النسبة بين نصفي قطر لارمور مساوية للجذر التربيعي لنسبة كتلتيهما .

الكمية المهمة التي سوف نستخدمها لاحقاً هي العزم المغناطيسي للجسيمات التي تعمل حركة دائرية . وبالتعريف . فإن العزم المغناطيسي m يعطى بالصيغة الآتية :

$$m = \text{current} \times \text{area}$$
$$= \frac{qv_\perp}{2\pi R}\pi R^2 = \frac{K_\perp}{B}. \tag{14-10}$$

بفحص الشكل (1-14) يتبين أن m باتجاه مضاد لإتجاه المجال المغناطيسي ، وانها بهذا تمثل عزم دايامغناطيسي .

الحالة الثانية : مجالات مغناطيسية وكهربائية منتظمة ، $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$

اذا ماسلط مجال مغناطيسي ومجال كهربائي آنياً على البلازما ، بحيث تكون **E** عمودية على **B** ، عندئذ لا يكون هناك ميل لتكوين غلاف . والحقيقة ، سنرى أن الشحنات الحَيِّزية الموجبة والشحنات الحَيِّزية السالبة تنجرف "drift" معاً بنفس الاتجاه . وقد يكون ملائماً ان نكتب سرعة الجسيم **v** كالآتي :

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_d + \mathbf{v}'; \tag{14-11}$$

ومن ثم نكتب المعادلة (6-14) كالآتي :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u}_d \times \mathbf{B} + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}). \tag{14-12}$$

وان الاختيار الملائم لـ $\mathbf{u}_d$ يجعل أحد الحدين الأوليين في الطرف الايمن من هذه المعادلة يختزل الطرف الآخر .

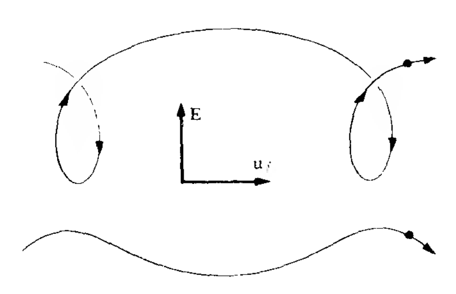
$$\mathbf{u}_d = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \tag{14-13}$$

الجزء المتبقي من القوة . $q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}$. هو بالضبط عين الجزء الذي درس في الحالة الاولى .

وبهذا فان حركة الجسيم الكلية تتألف من ثلاثة حدود : (أ) $\mathbf{v}'_\parallel$ سرعة ثابتة موازية لـ **B** ، و (ب) حركة دورانية حول خطوط المجال المغناطيسي وبتردد زاوي قدره :

$$v'_\perp/R = qB/m_p$$

و (جـ) سرعة انجراف ثابتة قدرها $u_d = E/B$ عمودية على كل من **E** و **B** . بعض الامثلة لهذه الحركة موضحة بالشكل (2-14) .



شكل 14-2 . مجالات كهربائية ومغناطيسية متقاطعة . حركة الجسيم في مستو عمودي على المجال المغناطيسي . يبين الشكل أيونات متضادة شحنيا ذات زخوم ابتدائية مختلفة .

يطلق على السرعة $\mathbf{u}_d$ المعرفة بالمعادلة (14-13) اسم سرعة انجراف البلازما «plasma drift velocity» أو سرعة الانجراف الكهربائية «electric drift velocity» . ومن المهم ملاحظة أن $\mathbf{u}_d$ لاتعتمد على شحنة الجسيم أو كتلته أو سرعته . ولهذا فان كافة مكونات البلازما سوف تنجرف الى الامام معاً حتى لو كانت حركاتها الدورانية المنفردة مختلفة كثيراً .

اشتقاقنا للمعادلة (14-13) قد استنتج بنمط كلاسيكي وليس بدلالة النظرية النسبية . فاذا اقتربت قيمة أي من السرعتين $\mathbf{u}_d$ أو $\mathbf{v}$ من c (سرعة الضوء) . فان المعادلة (14-11) ينبغي استبدالها بصيغة متفقة مع تحويلات لورنتز «Lorentz transformation» . ومن جهة أخرى . يبدو أن المعادلة (14-13) المعبرة عن سرعة الانحراف هي دائما صحيحة* . طالما كان :

$$|\mathbf{E}| < c|\mathbf{B}|$$

فإذا كان

$$|\mathbf{E}| > c|\mathbf{B}|$$

* أبسط طريقة لمعالجة الحالة عندما يكون $|\mathbf{E}|$ أصغر من ولكن صغيرا قياسا الى $c\,|\mathbf{B}|$ هو باجراء تحويلات لورنتس . تحويل كل من سرعة الجسم والمجالات . سرعة المنظومة المتحركة تعطى بدلالة $\mathbf{u}_d$ (المعادلة 14-13) . وإن القوة في المنظومة المتحركة تعطى بالصيغة الآتية :

$$\mathbf{F}' = q(\mathbf{v}' \times \mathbf{B}) \left(\frac{c^2 - u_d^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

فان المجال المغناطيسي سوف لايحول دون تحرك الجسيم في اتجاه المجال **E** .

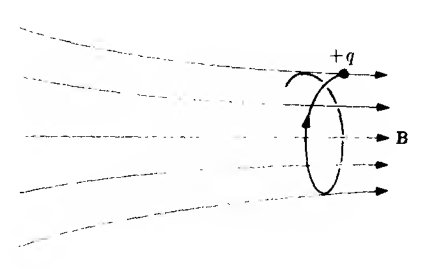
الحالة الثالثة : مجال مغناطيسي ثابت مع الزمن ، ولكن يعتمد على الحَيّز .

. $\mathbf{E} = 0$

لنفرض ان جسيماً مشحوناً يتحرك في مجال مغناطيسي منتظم تقريباً . والذي تتقارب فيه خطوط المجال ببطء . قد تعالج حركة الجسيم كاضطراب في المدار اللولبي الموضح في الشكل (1-14) .

هذه الحركة تشبه الى حدما تلك الحركة الموضحة في الشكل (3-14) ؛ ويتمكن القاريء ببساطة من إثبات وجود قوة تحاول دفع الجسيم داخل مناطق ذات مجال مغناطيسي أضعف . لتفصيل المشكلة بدقة سنفرض ان خط الفيض خلال المركز الدليلي يتطابق مع الاحداثي z ، وأن للمجال المغناطيسي تناظراً سمتياً «azimuthal symmetry» حول الاحداثي z . وبأخذ مركبة z للمعادلة (6-14) ، نجد :

$$F_z = m_p \frac{dv_z}{dt} = qv_\theta B_r|_{r=R}. \qquad (14\text{–}14)$$



شكل 14-3

ولكن :

$$\text{div}\,\mathbf{B} = 0$$

أو ، لهذه الحالة :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

بما ان خطوط المجال تتقارب ببطء ، فان بالامكان أخذ $\partial B_z/\partial z$ على انها مقدار ثابت عبر مقطع المدار المستعرض ، وبهذا ينتج :

$$B_r|_{r=R} = -\tfrac{1}{2}R\frac{\partial B_z}{\partial z}. \tag{14-15}$$

بالاضافة الى ذلك : فان v_θ تكون مناظرة للمركبة $v_\perp$ في الحالة الاولى . وبإجراء هذه التعويضات في المعادلة (14-14) ينتج :

$$\begin{aligned} m_p\frac{dv_{\parallel}}{dt} &= -\tfrac{1}{2}qRv_\perp\frac{\partial B_z}{\partial z} \\ &= -m\frac{\partial B_z}{\partial z}, \end{aligned} \tag{14-16}$$

لقد وجدت الصيغة الاخيرة من خلال استخدام المعادلة (14-10) .

طاقة الجسيم الحركية الكلية K لاتتغير في المجال المغناطيسي ، لأن قوة لورنتز ، التي تكون دائماً عمودية على السرعة ، لاتنجز شغلاً . وأن $K_\perp$ ، المعرفة في المعادلة (14-8) ، ليست ثابتة هنا ، ولا $K_\parallel$ كذلك ، ولكننا قد نكتب :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2}m_pv_{\parallel}^2) &= \frac{d}{dt}(K - K_\perp) \\ &= -\frac{dK_\perp}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt}(mB_z), \end{aligned} \tag{14-17}$$

تأتي الصيغة الاخيرة من المعادلة (14-10) . من جهة أخرى . سنضرب المعادلة (14-16) بـ $v_\parallel = \partial z/\partial t$ لنجد :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2}m_pv_{\parallel}^2) &= -m\frac{\partial B_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \\ &= -m\frac{dB_z}{dt}, \end{aligned} \tag{14-18}$$

حيث d/dt تمثل مشتقة الزمن مأخوذة على طول المسار الداينميكي . بمقارنة المعادلة (14-17) والمعادلة (14-18) سنرى أن العزم المغناطيسي m يكون

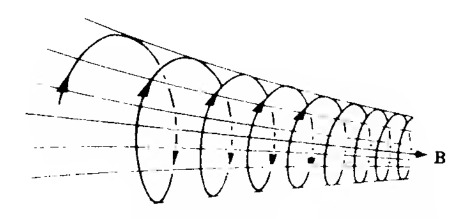
ثابتاً للحركة . ومع ذلك ، ينبغي ان نؤكد أن هذه هي النتيجة التقريبية التي تتحقق طالما بقيت B_z تتغير ببطء . أما اذا كان على **B** أن تتغير خلال مسافات مقاربة لنصف القطر R ، فان التقريبات المستخدمة في اشتقاق المعادلة (18-14) سوف تخفق .

ومن الامور التي تهمنا هي حقيقة ان الجسيم قد يجبر على الحركة على سطح أنبوب الفيض ينتج هذا الشيء لأن الفيض المغناطيسي خلال المدار يساوي :

$$\Phi = B_z \pi R^2 = \pi B_z \frac{m_p^2 v_\perp^2}{q^2 B_z^2}$$

$$= \frac{2\pi m_p}{q^2} \frac{K_\perp}{B_z} = \frac{2\pi m_p}{q^2} m, \qquad (14\text{-}19)$$

ويكون m ثابتاً . ويمكن وصف حركة الجسيم تخطيطاً في الشكل (4-14) .



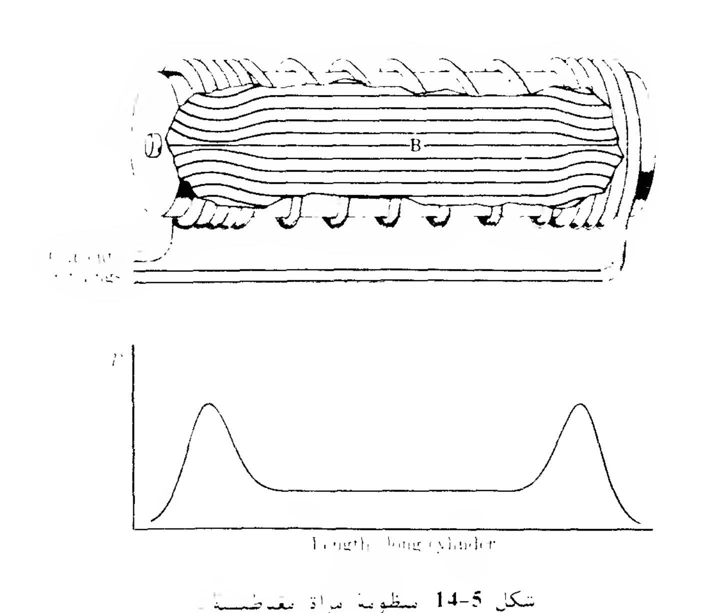
شكل **4-14** . يدور الجسم في حركة لولبية مع حدوث تزايد في مركبة سرعته العمودية وتقترب في دورانه الى ان ينعكس .

بحيث ان مركبة z للقوة (المركبة الموازية) المعطاة في المعادلة 16-14 . تكون دائما باتجاه بحيث تعمل على تعجيل الجسيم نحو الجزء الاضعف من المجال . وبالتالي فان الجسيم . وهي في حالة الدوران عندما تقترب من مناطق ذات مجال مغناطيسي أقوى تأخذ بالتباطؤ . أي ان ′ تتناقص . ومن جهة أخرى . يتطلب حفظ الطاقة أن يحدث تزايد في المركبة العمودية

للسرعة v_- . فاذا كان تقارب المجال المغناطيسي كافياً ، فان الجسيم سوف يتحرك بدوران في حركة حلزونية لولبية متراصة جداً الى أن تنعكس في نهاية المطاف راجعة داخل مناطق المجال الاضعف .

14-3 المرايا المغناطيسية Magnetic mirrors

تبين نتائج البند السابق أن المجال المغناطيسي الذي يتقارب ببطء يمكنه حصر البلازما،وتنحني الجسيمات بمدارات دائرية وبزوايا قائمة على اتجاه المجال الرئيس ؛ وتتباطأ الجسيمات على طول اتجاه المجال الرتيس . وأخيراً تنعكس بواسطة خطوط المجال المتقاربة . يطلق على مثل هذه الهيئة للمجال اسم المرآة المغناطيسية . ينبغي استخدام مرآتين على الاقل في أي منظومة لحصر البلازما . والشكل (14-5) يبين منظومة من هذا النوع .



شكل 14-5 منظومة مرآة مغناطيسية .

لايمكن حصر كافة الجسيمات بواسطة منظومة المرآة . ولا يمكن جعل خطوط المجال أن تتقارب وتلتقي في نقطة ؛ وبهذا هنالك مجال مغناطيسي كبير عند المرآة (B_m) ولكن ليس لانهائياً . فاذا كان الجسيم يمتلك طاقة حركية محورية كبيرة جداً فانه سوف لايعود راجعاً بواسطة مجال المرآة ولكنه سيتمكن من الافلات .

بما ان العزم المغناطيسي ثابت الحركة ، نجد وفقاً للمعادلة (10-14) أن

$$\frac{K_{0\perp}}{B_0} = \frac{K_{1\perp}}{B_{1\perp}}.$$

ترمز الاشارة السفلية 0 الى المنطقة المركزية الموضحة في الشكل (5-14) ، والاشارة السفلية 1 تشير الى نقطة الانعكاس . عند نقطة الانعكاس $K_\perp = K$. بالاضافة الى ذلك ، K تمثل الطاقة الحركية الكلية ، وهي ثابت الحركة . لغرض انعكاس الجسيم يجب ان يكون مجال المرآة B_m أكبر من B_1 ، أي ان :

$$B_m > B_1 = \frac{K}{K_{0\perp}} B_0,$$

$$\frac{K_{0\perp}}{K} > \frac{B_0}{B_m}. \qquad (14\text{–}20a)$$

اذا علمت السرعة الابتدائية v_0 زاوية قدرها θ_0 مع اتجاه المجال ، فان

$$v_{0\perp} = v_0 \sin\theta_0 \quad \text{و} \quad v_{0\parallel} = v_0 \cos\theta_0$$

وبالتالي تختزل المعادلة (14-20a) الى الآتي :

$$\sin^2\theta_0 > \frac{B_0}{B_m}, \qquad (14\text{–}20b)$$

ليمثل شرط الانعكاس . وعلى سبيل المثال . إذا كان مجال المرآة يساوي مائة مرة اشد من B_0 ، فإن الجسيمات التي تكون ذات سرع تصنع زاوية أقل من 6° مع إتجاه المجال تفلت من المنظومة .

التصادمات بين جسيمات المنطقة المركزية لمنظومة المرآة تتجه الى انشاء توزيع سرعي متساوي الاتجاه "isotropic velocity distribution" . وبهذا فإن النتيجة الصافية للتصادمات هي أن الجسيمات تستطير باستمرار في منطقة حيز السرعة بحيث يمكنها الإفلات من المنظومة . ونتيجة للتصادمات فإن الجسيمات يمكنها كذلك الانتشار بزوايا قائمة على إتجاه المجال ومن ثم الافلات .

14-4 المعادلات الهايدرومغناطيسية The hydromagnetic equations

يمكن معالجة الحركات المتجمعة للجسيمات بشكل أدق وذلك باستخدام الصياغة الهايدرومغناطيسية ، مثل " ظاهرة التقلص" "pinch effect" وتذبذب البلازما . وفقاً لهذا الوصف ، يمكننا عدّ البلازما كمائع كلاسيكي تطبق عليه المعادلات الهايدروداينميكية الملائمة . ومع ذلك ، المائع هنا يمثل موصلاً كهربائياً ، وبهذا ينبغي الأخذ بنظر الاعتبار القوى الكهرومغناطيسية بشكل واضح .

قد تكتب القوة لوحدة الحجم للبلازما بالصيغة الآتية :

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \mathbf{grad}\, p, \qquad (14\text{-}21)$$

حيث يمثل $\mathbf{J}$ كثافة التيار و p يمثل ضغط المائع "fluid pressure" . وقد تشمل المعادلة قوى أخرى كذلك كالقوى التثاقلية وقوى اللزوجة ، ولكنها أهملت هنا لغرض التبسيط . وبسبب التعادل الكهربائي التقريبي في البلازما . لم تعد هناك حاجة لشمول الحد $\bar{\rho}\mathbf{E}$ مع الحدود الأخرى للقوة في المعادلة (21-14) . وبالطبع ، الشذوذ عن التعادل ينبغي دراسته في معادلة بويزون ، ولكنها اعتيادياً تهمل في المعادلات الداينميكية .

يتطلب توازن الزخم أن يكون :

$$\begin{aligned} \varsigma \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \varsigma\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\, \mathbf{v}\right] \\ &= \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \mathbf{grad}\, p, \end{aligned} \qquad (14\text{-}22)$$

والتي تمثل معادلة الحركة أو معادلة اويلر "Euler equation" للمائع . حيث يمثل ς كثافة كتلة البلازما و $\mathbf{v}$ يمثل سرعة مائعها . في المسائل التي تكون فيها الحركة

الهايدروداينميكية ليست كبيرة نسبياً ، فإن الحد المحتوي على $\mathbf{(v.grad)\,v}$ يمكن إهماله * .

من الملائم في بعض الحالات أن يفسر الحد $\mathbf{J\times B}$ للمعادلة (14-21) على أنه ناشيء جزئياً من ''الضغط المغناطيسي'' ''magnetic pressure'' . يمكن اجراء ذلك بمساعدة قانون الدائرة لأمبير ، المعادلة (10-29) ، والذي يأخذ الصيغة الآتية في حالة البلازما :

$$\text{curl}\,\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}, \tag{14-23}$$

والمتطابقة الاتجاهية :

$$\mathbf{B}\times\text{curl}\,\mathbf{B} = \text{grad}\,(\tfrac{1}{2}B^2) - (\mathbf{B}\cdot\text{grad})\,\mathbf{B}. \tag{14-24}$$

وبهذا :

$$\begin{aligned}\mathbf{J}\times\mathbf{B} &= -\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\times\text{curl}\,\mathbf{B}\\ &= -\text{grad}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}\cdot\text{grad})\,\mathbf{B}.\end{aligned} \tag{14-25}$$

وبالطبع ، فإن الكمية $B^2/2\mu_0$ تمثل كثافة الطاقة المغناطيسية ، ولهذا فإنها تلعب دور الضغط المغناطيسي p_m :

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu_0}. \tag{14-26}$$

ومع ذلك ينبغي التأكيد على أن الحد $-\mathbf{grad}\ p_m$ يعطي في معظم الحالات جزءاً من القوة المغناطيسية فقط ، وتأتي القوة المتبقية من الحد $(1/\mu_0)(\mathbf{B.grad})\,\mathbf{B}$. عندما $\mathbf{J}$ يساوي صفراً ، فإن الحدين في الطرف الأيمن للمعادلة (25 ـ 14) يختزل أحدهما الآخر .

كمثال على فائدة مفهوم الضغط المغناطيسي ، لنفرض في مجال مغناطيسي أحادي الاتجاه حيث تتحقق لنا العلاقة :

$$\text{div}\,\mathbf{B} = 0$$

---

* مع إنه قد لايهمل في مسائل الانسياب المطرد ''steady-flow'' والتي يتلاشى فيها الحد $\partial\mathbf{v}/\partial t$ ضمناً .

وأن **B** لا تتغير على طول إتجاه المجال . وبما أن من الممكن حدوث تغيرات حَيّزية في اتجاهات عمودية على **B** فقط ، ينتج أن :

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{B} = 0$$

لهذه الحالة . ومن ثم ، تختزل المعادلة (21-14) الى الصيغة الآتية :

$$\mathbf{F}_v = -\mathbf{grad}\ (p + p_m),$$

وان شرط التوازن الستاتيكي لكل جزء من الحجم يكون :

$$p + p_m = \text{ثابت}$$

وبعبارة أخرى ، لهذا المجال ، فإن مجموع ضغط المائع والضغط المغناطيسي يجب أن يكون غير معتمدٍ على الموقع .

بالاضافة الى المعادلة (22-14) والمعادلات العينية المتحكمة في المفاهيم الكهربائية والمغناطيسية* ، نحتاج الى علاقتين لتكملة الصياغة الهايدرومغناطيسية ، وهما : أولا ــ معادلة الاستمرارية لمائع البلازما :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \operatorname{div}(\zeta \mathbf{v}) = 0, \qquad (14\text{-}27)$$

ثانياً ــ معادلة تربط علاقة **J** مع كميات المجال . تعمم العلاقة الاخيرة ببساطة من قانون أوم ، والذي يكتب ، عند شروط معينة† ، بالصيغة الآتية :

$$\mathbf{J} = g(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (14\text{-}28a)$$

هنا تمثل $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ المجال الكهربائي المتحرك الناشيء عن الحركة الهايدروداينميكية للبلازما في مجال مغناطيسي ، و g يمثل التوصيل النوعي للبلازما "conductivity" .

---

* لخصت معادلات ماكسويل في البند (2-15) . سيلاحظ القاريء أن المعادلة (13-15) . النص الأصلي لقانون الدائرة لاسبير . قد حورت خلال تضمينها تيار الازاحة ، $\partial \mathbf{D}/\partial t$. وبالحقيقة ، فإن تيار الإزاحة لا يلعب دوراً مهماً في معظم الظواهر الهايدرومغناطيسية .

† صيغة اكثر عمومية قد اعطيت من قبل سبيتزر (راجع المصدر المشار اليه في بداية الفصل) .

والتقريب الذي يجرى إعتيادياً هو بجعل التوصيل النوعي لا نهائي. وميزة هذا التقريب هو أنها تجيز إجراء تبسيط اساسي للمعادلات الهيدرومغناطيسية ، وبهذا يمكننا تقديم صورة اكثر وضوحاً للعمليات الفيزياوية التي تحدث في البلازما . في بعض المسائل ، وخصوصاً مسائل فيزياء الفضاء ، فإن التبسيط يكون ملائماً جداً . لحالة التوصيل النوعي اللانهائي حيث يختزل قانون أوم الى الآتي :

$$g \to \infty,$$
$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0. \qquad (14\text{–}28b)$$

للتوصيل النوعي اللانهائي (أو التوصيل النوعي العالي المعتمدة في الاغراض العملية) نتيجة منطقية هامة ، وهي أن الفيض المغناطيسي سيتجمد داخل البلازما . فإذا دمجت المعادلة (14–28b) مع الصيغة التفاضلية لقانون فرداي للحث ، لنتج الآتي :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{curl}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \qquad (14\text{–}29)$$

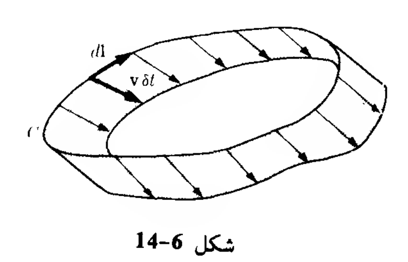
وبتكامل المركبة العمودية لهذه المعادلة حول سطح ثابت S ينتج :

$$\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da = \int_S \mathbf{curl}\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{n}\,da,$$

أو

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint_C \mathbf{v}\times\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{B}\cdot(d\mathbf{l}\times\mathbf{v}), \qquad (14\text{–}30)$$

حيث يمثل C خطاً مناسيبياً ثابتاً في الحَيِّز والذي تتحرك خلاله البلازما نتيجة للحركة الهايدروداينميكية . نجد من الشكل (6-14) أن التكامل $\oint_C d\mathbf{l}\times\mathbf{v}$ قد يعدُّ زيادةً في مساحة قمة السطح لوحدة الزمن المحدد بخط المناسيب «contour» ، والتكامل $\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}\times\mathbf{v}$ يمثل الفيض المغناطيسي المرافق لهذه المساحة الزائدة وتنص المعادلة (14–30) ببساطة على أن تغير الفيض لوحدة الزمن خلال خط المناسيب C هو بالضبط ماينبغي حسابه هندسياً على أساس أن كافة خطوط الفيض تتحرك برفقة المائع . وبهذا نستنتج أن خطوط الحث المغناطيسي تتجمد داخل المادة الموصلة المثالية .



شكل 6-14

14-5 ظاهرة التقلص **The pinch effect.**

تعرف نزعة تيار التفريغ الكهربائي العالي خلال البلازما لإحداث تقلص عرضي لذاته بظاهرة التقلص ، والاساس الميكانيكي المسبب للتقلص هو التأثير المتبادل بين التيار ومجاله المغناطيسي ، أو بمعنى آخر التجاذب بين فتائل التيار المتوازية . وإن أول من تنبأ الى ظاهرة التقلص العالم بنيت وبعده بشكل مستقل عرف نفس الظاهرة العالم تونكس* . ثم أعطى روزنبلوث † صورة مختلفة الى حد ما للتقلص تبين عدم استقرارها المتأصل .

لندرس تيار تفريغ كهربائي متناظر اسطوانياً خلال البلازما حسب قانون الدائرة لأمبير ، فإن الحث المغناطيسي عند مسافة r من محور التفريغ يعطي بالصيغة الآتية :

$$B(r) = \frac{\mu_0}{r}\int_0^r J(r')r'\,dr'. \tag{14-31}$$

ومنها يمكننا أن نكتب الآتي :

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial r} &= -\frac{\mu_0}{r^2}\int_0^r J(r')r'\,dr' + \mu_0 J(r)\\ &= -\frac{1}{r}B(r) + \mu_0 J(r).\end{aligned} \tag{14-32}$$

* W. Bennett, *Physical Review* **45,** 890 (1934); L. Tonks, *Physical Review* **56,** 369 (1939).

† M. Rosenbluth, "Dynamics of a Pinched Gas," from *Magnetohydrodynamics,* edited by Rolf Landshoff, Stanford University Press, 1957.

القوة المغناطيسية لوحدة الحجم تصبح

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -J(r)B(r)\mathbf{a}_r, \tag{14-33}$$

حيث يمثل $\mathbf{a}_r$ وحدة متجه في اتجاه r . بأختزال J(r) من بين المعادلتين (14-32) و (14-33) ينتج

$$F_v = -\frac{1}{\mu_0} B \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{1}{\mu_0 r} B^2. \tag{14-34}$$

يمكننا تحوير هذه القوة الى ضغط مكافيء ، p_{eq} ، وذلك بكتابة الآتي :

$$F_v = -\partial p_{eq}/\partial r,$$

وبإجراء عملية التكامل نحصل على :

$$p_{eq} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{1}{\mu_0} \int_0^r \frac{B^2}{r} dr. \tag{14-35}$$

ينصب جل اهتمامنا لحالات الضغط على السطوح الجانبية للبلازما . وبأتباع طريقة روزنبلوث سنحصر اهتمامنا على حالة التوصيل النوعي العالي حيث لا تكون لخطوط المجال المغناطيسي القدرة على النفوذ الى داخل المائع الموصل بقدر غير قليل* . التكامل في المعادلة (14-35) لا يتضمن إسهاماً من منطقة التفريغ . عند حدود التفريغ الكهربائي ، r = R ، فإن الضغط هو تماماً أطلقنا عليه الضغط المغناطيسي p_m :

$$p_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2(R). \tag{14-36}$$

يتضح من المعادلة (14-35) أن الضغط المغناطيسي يكون منتظماً في المنطقة الخارجية ، ولكن يساوي صفراً أو يكون صغيراً جداً في المنطقة الداخلية للتفريغ الكهربائي . وبهذا فإن ظاهرة التقلص يمكن بحثها كنتيجة لتكوين مفاجيء لضغط مغناطيسي في المنطقة الخارجية للتفريغ الكهربائي .

ينتج تقلص التفريغ الكهربائي عن انضغاط البلازما . فاذا تقلص التضيق بطريقة مستقرة فانه سيستمر حتى يتساوى الضغط المغناطيسي في المنطقة الخارجية

---

* عدم نفاذ خطوط المجال ناتج من النتائج المستحصلة في البند السابق ، ومن حقيقة ان كلاً من التيار والمجال المغناطيسي في التفريغ الكهربائي يكون صغيراً جداً في البداية .

من التفريغ مع ضغط المائع داخل منطقة التفريغ . لنعالج البلازما كغاز مثالي ، ونعدّها ذات ضغط قدره :

$$p = NkT$$

وبهذا ، عند نصف القطر النهائي R للتفريغ الكهربائي ، يكون :

$$\frac{1}{2\mu_0} B^2(R) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4\pi^2 R^2} I^2 = NkT,$$

حيث يمثل I تيار التفريغ الكهربائي ، ويمكن حل هذه الصيغة لايجاد التيار فينتج الآتي :

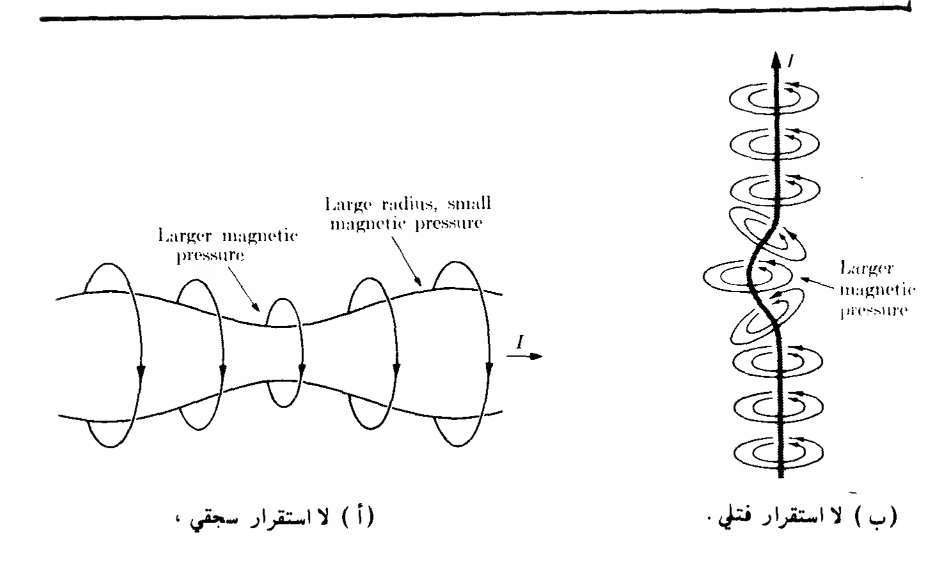
$$I^2 = 2 \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^{-1} \pi R^2 NkT$$
$$= 2 \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^{-1} A_0 N_0 kT,$$

بما أن حفظ الجسيمات يتطلب أن يكون :

$$A_0 N_0 = \pi R^2 N$$

حيث يمثل A_0 مساحة المقطع الابتدائي للتفريغ الكهربائي ، و N_0 تمثل كثافة الجسيم الابتدائية ، و $\mu_0/ 4\pi = 10^{-7}$ W/ amp. m ، وثابت بولتزمان $k = 1.38 \times 10^{-23}$ joule/ °K . ولكي نحصل على درجة حرارية قدرها 10^8 °K ، وهي الدرجة التي تتطلبها المفاعلات النووية الحرارية (الاندماجية) ، وبفرض ان $A_0 = 0.04\,m^2$ و $N_0 = 10^{21}$ particles/ m^3 ، فان تيار التقلص ينبغي ان يساوي تقريباً مليون أمبير .

من السهل ملاحظة ان التقلص يمثل ظاهرة غير مستقرة متأصلة مع التفريغ الكهربائي . يعتمد الضغط المغناطيسي عند حدود التفريغ على نصف قطر التفريغ بالاضافة الى التفاصيل الهندسية . وقد تنمو اضطرابات صغيرة فيما اذا عملت التغيرات الناتجة في الضغط على دعم هذه الاضطرابات . ويوضح الشكل (7-14) وجود تموجات صغيرة في السطح المحدد للتفريغ الكهربائي بالاضافة الى فتلات kinks ، وهذا يسبب مايدعى اللااستقرار السجقي «sausage» واللاإستقرار الفتلي في البلازما .



شكل 7-14 . اللا استقرارية في البلازما المتقلصة :

14-6 ذبذبات البلازما وحركة الموجة
Plasma oscillations and wave motion.

إحدى الصفات المهمة للبلازما هي قابليتها في حمل الذبذبات وفي بث الموجات . ويمكن أن تحدث أنواع مختلفة من السلوك التذبذبي ، الا ان هذه الذبذبات قد تكون معقدة جداً بسبب الميزة غير الخطية للمعادلات الهايدروداينميكية لهذه الذبذبات . وهنا نجد من الملائم تركيز اهتمامنا على الحالات البسيطة المدعومة بالتجربة .

الحالة الاولى : الذبذبات الكهروستاتيكية للبلازما ـ الكترون .

نوقشت الذبذبات الكهروستاتيكية في البلازما لاول مرة من قبل تونكس ولانكموير* . والحقيقة هناك نوعان محتملان من الذبذبات الكهروستاتيكية

* L. Tonks and I. Langmuir, *Physical Review* 33, 195 (1929).

ذبذبات التردد العالي التي تكون سريعة جداً ، اذ يصعب على الايونات الثقيلة أن تتبعها وذبذبات الايونات التي تكون بطيئة جداً بحيث ان الالكترونات تتوزع دائماً حول الايونات بنمط احصائي. سنناقش الحالة الاولى فقط ، والتي يطلق عليها اسم ذبذبات الالكترون .

لنركز اهتمامنا على منطقة بلازما تحتوي على كثافة منتظمة للايونات الموجبة ، N . ولا تحتوي على أيونات سالبة . في البدء ، للالكترونات كثافة منتظمة قدرها N أيضاً . ولكن لنفرض ان كل الكترون أزيح بمسافة مقدارها ξ باتجاه x والتي لاتعتمد على أي من الاحداثيين y و z وتساوي صفراً عند حدود البلازما . تسبب ازاحة الالكترونات تشويشاً في البلازما المتعادلة . ويزود كل عنصر حجم ، $\Delta x\, \Delta y\, \Delta z$ بشحنة قدرها :

$$\begin{aligned} \delta\rho\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z &= -Ne\, \Delta y\, \Delta z \left[\xi - \left(\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x \right) \right] \\ &= \Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, Ne \frac{\partial \xi}{\partial x}. \end{aligned} \tag{14-37}$$

تولد حركة الالكترونات مجالاً كهربائياً . $\mathbf{E}$ (x, t) . وبسبب تناظر هذه المسألة يكون المجال باتجاه x . وبهذا :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \delta\rho,$$

أو

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{\epsilon_0} Ne \frac{\partial \xi}{\partial x}, \tag{14-38}$$

وعند تكاملها ينتج :

$$E = \frac{Ne}{\epsilon_0} \xi. \tag{14-39}$$

لقد تم أخذ ثابت التكامل مساوياً للصفر هنا ، وذلك لان تكوين الغلاف يسبب حجب البلازما عن المجال الكهربائي المنتظم .

القوة المؤثرة على كل الكترون تساوي eE- ، وتتناسب مع الازاحة ξ وفقاً للمعادلة (39-14) ، وتظهر كقوة مرجعة «restoring force» . وبهذا فان كل الكترون يتذبذب حول موقعه الاصلي وبحركة توافقية بسيطة . معادلة الحركة لكل الكترون تكون :

$$m_e \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{Ne^2}{\epsilon_0}\,\xi = 0. \qquad (14\text{–}40)$$

وتردد البلازما :

$$f_p = \omega_p/2\pi,$$

يعرف بالصيغة الآتية :

$$\omega_p = \left(\frac{Ne^2}{m_e\epsilon_0}\right)^{1/2}, \qquad (14\text{–}41)$$

حيث يمثل m_e كتلة الالكترون . وكمثال حسابي فان تردد البلازما سيكون $f_p = 9.0 \times 10^9 sec^{-1}$ لكثافة جسيمات تساوي $N=10^{18}$ electrons/ m^3.

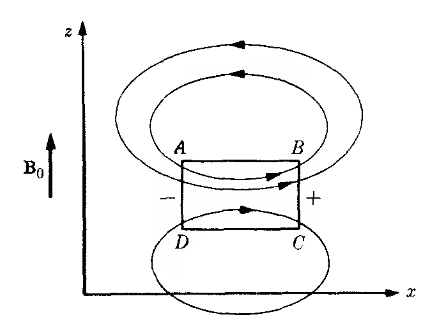
الحالة الثانية : الهايدرومغناطيسية أو موجات الفين **«Alfven waves»** .
تمثل الموجات الهايدرومغناطيسية موجات حقيقية تنتشر في وسط موصل خاضع لتأثير مجال مغناطيسي ثابت . هذه السلوكية ، التي تنبأ بها لأول مرة ألفين* في عام 1942 ، تكون منسجمة مع الصياغة الهايدرومغناطيسية للبلازما المناقشة في البند (14–4) .

قبل إيجاد المعادلات التفاضلية ، لندرس إن أمكن العمليات الفيزياوية في البلازما من وجهة نظر أولية . افرض بلازما لانهائية خاضعة لتأثير مجال مغناطيسي منتظم وثابت B_0 وذي إتجاه ممتد على طول الاحداثي z . لنأخذ قطعة من البلازما ، وليكن المقطع المستطيل ABCD في الشكل (14–8) الذي يمتد موازياً للمحور y ، وقد أعطي سرعة v بإتجاه موازٍ لمحور y الموجب ، وبهذا فإن حاملات الشحنة (أيونات أو الكترونات) تلاقي قوى :

$$q_i(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0)$$

تفضي الى عزل حاملات الشحنة الموجبة وحاملات الشحنة السالبة . تصبح القطعة ABCD مركزاً لقوة دافعة كهربائية ، تميل نهايتها اليمنى لتشحن بشحنة موجبة ونهايتها اليسرى لتشحن بشحنة سالبة . ولكن بما أننا نتعامل مع وسط موصل . فإن البلازما خارج القطة ABCD تكمل الدائرة الكهربائية . يبين الشكل عدداً قليلاً من خطوط التيار الكهربائي .

* H. Alfvén, *Cosmical Electrodynamics*, Oxford University Press, 1950.



شكل 14-8 . قطعة البلازما ، ABCD ، تتحرك بالاتجاه الموجب للاحداثي y . التيارات المتولدة رُسمت تخطيطياً .

يتبادل التيار المحتث التأثير مع المجال المغناطيسي $\mathbf{B}_0$. ومن السهل التحقق من أن كثافة القوة $\mathbf{J} \times \mathbf{B}_0$ في القطعة ABCD تكون بالإتجاه المضاد لحركتها . في حين تعمل القوة المؤثرة على الأجزاء الخارجية للبلازما على تعجيلها بالاتجاه الموجب للأحداثي y . ولهذا يحدث تناقص في سرعة القطعة ABCD ، كما تنتقل حركتها الى القطع المجاورة من البلازما . ومع ذلك ، تبقى هذه العملية الميكانيكية مستمرة في العمل ، وتعاد العملية بأجمعها مما يؤدي الى إنتشار الاضطراب أكثر فأكثر في الإتجاه $\pm z$.

لنرجع الآن الى المعادلات التفاضلية . اجعل :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$$

حيث يمثل $\mathbf{B}_0$ مجالاً مغناطيسياً منتظماً وثابتاً الى الاحداثي z و $\mathbf{B}_1$ يمثل المجال المغناطيسي المتولد من قبل التيارات المحتثة . سنستخدم نتائج الفقرات السابقة كدليل لدراسة أبسط أنواع حركة الموجة المميزة بالكميات v_y و E_x و و B_{1y} ، وبفرض تلاشي المركبات الأخرى . من قانون الدائرة لأمبير :

$$-\frac{\partial B_{1y}}{\partial z} = \mu_0 J_x, \tag{14-42}$$

نعطي معادلة اويلر للمائع ، المعادلة (2-14) ، العلاقتين الآتيتين :

$$\zeta \frac{\partial v_y}{\partial t} = -J_x B_0, \tag{14-43a}$$

و

$$0 = J_x B_{1y} - \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{14-43b}$$

وبدمج المعادلتين (14-43a) و (14-43b) مع المعادلة (14-42) ينتج :

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{B_0}{\mu_0 \zeta} \frac{\partial B_{1y}}{\partial z} \tag{14-44}$$

و

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial (B_{1y}^2)}{\partial z}. \tag{14-45}$$

وقد يكتب قانون أوم العام بالصيغة الآتية :

$$\begin{aligned} E_x &= -v_y B_0 + \frac{1}{g} J_x \\ &= -v_y B_0 - \frac{1}{g\mu_0} \frac{\partial B_{1y}}{\partial z}. \end{aligned} \tag{14-46}$$

وأخيراً ، يؤدي قانون فرداي الى الآتي :

$$\frac{\partial B_{1y}}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z}. \tag{14-47}$$

فإذا اختزلت v_y من بين المعادلتين (14-44) و (14-46) ، واختزلت E_x من بين المعادلة الناتجة والمعادلة (14-47) ، وبفرض ثبوت ζ ، نجد

$$\frac{\partial^2 B_{1y}}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{\mu_0 \zeta} \frac{\partial^2 B_{1y}}{\partial z^2} + \frac{1}{g\mu_0} \frac{\partial^3 B_{1y}}{\partial z^2 \partial t}, \tag{14-48}$$

والتي تمثل المعادلة المتحكمة بانتشار موجات ألفين .

اذا كان التوصيل النوعي للبلازما g لانهائي ، فالمعادلة (14-48) تصبح متطابقة مع معادلة الموجة ، وإن حلها قد نوقش في البندين (14-4) و (15-5) . في ظل هذه الشروط ، تصف المعادلة (14-48) موجة مستوية غير متضائلة تتحرك بصورة موازية للمحور z وبسرعة طور تمثل بالصيغة :

$$v_p = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \zeta}}. \tag{14-49}$$

كمثال حسابي ، خذ $B_0 = 0.01\ w/m^2$ و $\zeta = 10^{-5}\ kgm/m^3$ $= 10^{-8}\ gm/cm^3$ فتكون $v_p = 2\,800\ m/sec$.

وللاحظة ماتؤول إليه النتائج في حالة توصيل نوعي محدد للبلازما نختبر حلاً للمعادلة (48–14) ذا صيغة :

$$B_{1y} = b_1 \exp [\alpha z + j\omega t]$$

ويكون الحل مناسباً في حالة كون :

$$\alpha^2 = \frac{-\omega^2}{v_p^2 + j\omega/g\mu_0}, \qquad (14\text{–}50)$$

حيث تكون كما عُرفت في المعادلة (49–14) . وفي حالة وجود مضاءلة ضئيلة ينتج الآتي :

$$\alpha \approx \pm \left(j\frac{\omega}{v_p} + \frac{\omega^2}{2g\mu_0 v_p^3} \right) \cdot \qquad (14\text{–}51)$$

وبهذا يمثل حل المعادلة (48–14) موجة مستوية متضائلة تنتشر بإتجاه $\pm z$. المسافة z_0 تمثل المسافة التي تقل خلالها سعة الموجة الى $1/e$ من قيمتها الأصلية وتساوي .

$$z_0 = \frac{2g\mu_0 v_p^3}{\omega^2} = \frac{2gB_0^3}{\mu_0^{1/2}\zeta^{3/2}\omega^2} \cdot \qquad (14\text{–}52)$$

14–7 استخدام المجسات في قياسات البلازما
The use of probes for plasma measurements.

تتألف البلازما من الكترونات وأيونات وذرات متعادلة أيضاً . تكتسب الالكترونات طاقة من المجالات الكهربائية عند حدود البلازما بالإضافة الى طاقة تكتسبها من خلال التصادمات الأيونية التي تنشأ عنها الالكترونات ، وتصبح سرعة الالكترونات عشوائية من خلال تصادماتها مع الأيونات . وبهذا يمكننا دراسة درجة حرارة الالكترون T_e . والحقيقة ، فقد وجد لبلازما منتجة في المختبرات (أقواس كهربائية وتفريغ كهربائي) بأن الالكترونات تحقق توزيع ماكسويل ــ بولتزمان

للسرعة ، وهذا يعني ، أن من الممكن وصفها بدلالة درجة الحرارة . ودرجات حرارة الالكترونات في قوس بلازمي مثالي ينحصر مداها من بضعة الآلف الى خمسين ألف من درجات الحرارة المطلقة .

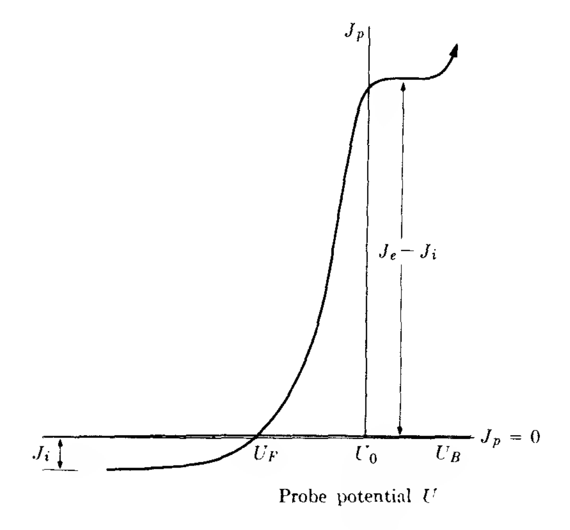
الى حد ماتنطبق المناقشات السابقة على الأيونات الثقيلة أيضاً ، ومع ذلك ، فأنه ليس من الضروري أن تكون درجات حرارة الأيونات مساوية لدرجات حرارة الالكترونات . فإذا وجد فرق جوهري بين متوسط الطاقات الحركية للايونات وللالكترونات ، فإن ذلك يتطلب عدة الآف من التصادمات للجسيم الواحد لغرض تعادل فرق الطاقة هذه ، وقد يتطلب هذا زمناً أطول من متوسط عمر «mean life» الايون في المنظومة .

هناك كميات مهمة ينبغي ايجادها هي ، درجة حرارة الجسيمات ، وكثافات الجسيمات ، وكثافات تيارات البلازما العشوائية . لقد وضح لانكموير وموت ـ سمث* ان إيلاج قطب معدني صغير او « مجس » داخل البلازما قد يستخدم لإيجاد بعض هذه الكميات عملياً ، وذلك بتسليط جهود مختلفة على المجسات وقياس التيارات المتجمعة المرادفة لها . القطب المؤثر عليه بجهد لا يساوي جهد البلازما سوف يغلف بغلاف يحجب البلازما عن المجال المضطرب الناشيء عن القطب . في معظم الحالات يكون الغلاف رقيقاً جداً ، واذا كان جهد المجس سالباً أو صفراً او ذا قيمة موجبة ضئيلة بالنسبة الى جهد البلازما فإنه يكاد يشوش معظم جسم البلازما .

الشكل (9-14) يوضح العلاقة بين التيار ـ الفولتية لمجس مثالي . عندما يكون جهد المجس يساوي جهد البلازما ، فإنه يجمع كلاً من تيار الالكترون العشوائي وتيار الأيون العشوائي . ولكن تيار الالكترون العشوائي اكبر بكثير من تيار الايون ولهذا فإن التيار السابق هو المهيمن ، وذلك بسبب أن الالكترونات تمتلك معدل سرع اكبر بكثير من سرع الايونات . وبجعل المجس سالباً فإنه ينفر الكترونات وبهذا فإن تيار الالكترون يتناقص ، وعند نقطة الجهد العائم «floating potential» U_F ، فإن صافي تيار المجس يساوي صفراً . واخيراً اذا ماجعل المجس سالباً مافيه الكفاية ، فإنه سيجمع فقط كثافة تيار الأيون J_i . فإذا ماجعل جهد المجس موجباً بمقدار ضئيل بالنسبة لجهد البلازما ، فإنه ينفر الايونات ويجمع كثافة تيار الالكترون J_e . واذا ماجعل جهد المجس موجباً اكثر فإنه سيعمل مثل انود ثانوي وان سلوكية التيار ـ الفولتية تصبح معقدة ، وتعتمد في تفاصيلها على طبيعة البلازما .

---

* I. Langmuir and H. Mott-Smith, *General Electric Review* **27,** 449 (1924); *Physical Review* **28,** 727 (1926).



شكل **14-9** . خاصية تيار ـ فولتية لجس مولوج في البلازما . U_0 تمثل جهد البلازما .

لندرس بلازما متألفة من أيونات موجبة (أحادية الشحنة) والكترونات . كثافة الايون تساوي كثافة الالكترون في المنطقة المتعادلة :

$$N_i = N_e = N_0. \tag{14-53}$$

فإذا وصف توزيع الالكترونات بدلالة درجة الحرارة T_e ، فإن كثافة تيار الالكترون العشوائية تكون وفقاً للنظرية الحركية كالآتي :

$$J_e = \tfrac{1}{4} N_0 e\bar{v} = N_0 e \left(\frac{kT_e}{2\pi m_e}\right)^{1/2}, \tag{14-54}$$

حيث يمثل $\bar{v}$ معدل السرعة الحرارية للالكترونات . ويمثل هذا تيار الالكترون المتجمع لوحدة مساحة الجس في المنطقة المحصورة بين $U = U_0$ الى $U = U_B$.

فإذا ما جعل جهد الجس سالباً فإن كثافة تيار الالكترون تتناقص وذلك لأن التيار المتجمع سيمثل فقط الالكترونات ذات الطاقة الكافية لاختراق حاجز الجهد «potential barrier» :

$$J'_e = J_e \exp\left(e\frac{U - U_0}{kT_e}\right) = \tfrac{1}{4}N_e c\bar{v} \exp\left(e\frac{U - U_0}{kT_e}\right), \qquad \text{for } U \leq U_0. \tag{14-55}$$

من جهة أخرى ، يكون كثافة تيار الايون ثابتاً في منطقة الجهد السالب ، وبالتحديد ، J_i . وبهذا يكون تيار الجس الكلي :

$$J_p = J_e \exp\left(e\frac{U - U_0}{kT_e}\right) - J_i,$$

ودرجة حرارة الالكترون وجدت لتكون :

$$T_e = \frac{e}{k}\left[\frac{d}{dU}\ln(J_p + |J_i|)\right]^{-1}. \tag{14-56}$$

يمكننا الآن ايجاد كثافة الجسيم ، N_0 ، من المعادلة (14-54) باستخدام القيمة التجريبية لـ J_p المناظرة للمنطقة المستوية على يمين U_0 في الشكل . كما ينبغي ملاحظة ان المعادلة (14-56) وأن صيغة الخاصية $J_p - U$ لاتعتمدان على قيمة U المطلقة ؛ وبهذا فان جهد الجس يمكن قياسه نسبة الى أي جهد ثابت في البلازما (مثال ذلك جهد القطب) .

تعدّ مميزات الجس مفهومة بشكل جيد ، ولكن قبل ان نفسر النتائج المستحصلة من قياسات الجس ، فان من الضروري تحقق بعض الشروط :

(أولاً) ينبغي ان يكون الجس صغيراً بالنسبة الى متوسط المسارات الحرة للالكترونات والايونات ، و (ثانياً) ينبغي ان يكون الغلاف صغيراً بالنسبة لابعاد الجس ، و (ثالثاً) يجب اهمال التأين الحاصل في منطقة الغلاف ، و (رابعاً) يجب اهمال الانبعاث الثانوي «secondary emission» من الجس ، و (خامساً) ينبغي ان لاتكون هناك ذبذبات بلازمية . بالاضافة الى هذه الشروط ، فانه من المفروض ضمنياً عدم وجود مجال مغناطيسي . واستخدام الجسات في البلازما المحتوية على مجالات مغناطيسية كانت قد نوقشت من قبل بوم وبرهوب وماسي*

وأخيراً سوف ننهي هذا البند بمناقشة غلاف يحيط بمجس مشحون بشحنة سالبة . المعادلة المتحكمة بالجهد U في منطقة الغلاف هي معادلة بويزون :

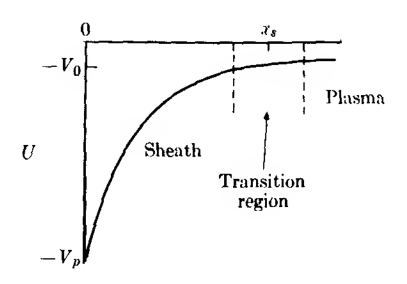
---

* Chapter 2 of *Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields*, edited by A. Guthrie and R. K. Wakerling, McGraw-Hill, New York, 1949.

$$\nabla^2 U = -\frac{1}{\epsilon_0} e(N_i - N_e) \qquad (14\text{–}57)$$

حيث N_i و N_e يمثلان على الترتيب كثافة الايون الموضعية وكثافة الالكترون الموضعية . يوضح الشكل (14–10) منحنياً بيانياً تقريبياً لـ U كدالة للمسافة عن المجس . إن من الملائم اجراء التعويض U = − V ، حيث V كمية موجبة ، وبما ان سمك الغلاف صغير بالنسبة الى ابعاد المجس ، سوف نستخدم تحويلاً ذا بعد واحد للمعادلة (14–57) :

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{1}{\epsilon_0} e(N_i - N_e). \qquad (14\text{–}58)$$



شكل 14-10 . منحني بياني للجهد كدالة للمسافة عن المجس . bc.

يكون توزيع الالكترونات على الغلاف بالشكل الاحصائي التقريبي الآتي :

$$N_e = N_0 \exp\left[\frac{-e(V - V_0)}{kT_e}\right], \qquad (14\text{–}59)$$

حيث ان N_0 تمثل كثافة الالكترون عند جهد بلازما قدره $-V_0$. ترتبط كثافة الايون بعلاقة مع تيار الايون منسجمة مع :

$$J_i = N_i e v_i = N_i e \sqrt{\frac{2eV}{m_i}}. \qquad (14\text{–}60a)$$

في البلازما ، خارج منطقة الغلاف ، يعطى تيار الايون بالعلاقة الآتية :

$$J_i = N_0 e v_{io} = N_0 e \sqrt{\frac{2eV_0}{m_i}}, \qquad (14\text{–}60b)$$

بشرط قياس جهد البلازما ، $-V_0$ ، بالنسبة الى النقطة التي تكونت عندها الايونات الموجبة . وبهذا :

$$N_i = N_0 \sqrt{\frac{V_0}{V}}. \qquad (14\text{–}61)$$

بتعويض المعادلتين (14-59) و (14-61) في المعادلة (14-58) ينتج ما يطلق عليه اسم معادلة غلاف ـ بلازما :

$$(dV/dx)\, dx = dV$$

وبضرب المعادلة الاخيرة في :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1}{\epsilon_0} N_0 e \left[V_0^{1/2} V^{-1/2} - \exp \frac{-e(V - V_0)}{kT_e} \right]. \qquad (14\text{–}62)$$

وباجراء التكامل نجد الآتي :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\epsilon_0} N_0 e \left[2V_0^{1/2} V^{1/2} + \frac{kT_e}{e} \exp \frac{-e(V - V_0)}{kT_e} \right] + C, \qquad (14\text{–}63)$$

حيث يحسب الثابت C باستخدام الشرط :

$$dV/dx = 0$$

عند حافة الغلاف حيث $V = V_0$. وبهذا :

$$C = -\frac{1}{\epsilon_0} N_0 [2eV_0 + kT_e]. \qquad (14\text{–}64)$$

لكافة نقاط الغلاف :

$$(dV/dx)^2 \geq 0;$$

يبين اختبار المعادلة (63-14) أن هذا الشرط يتحقق فقط فيما اذا كان :

$$V_0 \geq \frac{kT_e}{2e}, \tag{14-65}$$

وقد أشار الى هذه العلاقة لاول مرة العالم بوم* . وبتعبير آخر ، لتكوين غلاف مستقر فان الايونات التي تصل الى الغلاف من البلازما يجب ان تمتلك على الاقل طاقة حركية تساوي نصف kT_e . بما ان تكوين أغلفة مستقرة تكون دائماً تحت هذه الشروط . فان المعادلة (65-14) تحدد قيمة V_o بجدارة . والحقيقة ان عدم التساوي فى المعادلة (65-14) قد يستبدل اعتيادياً بعلامة المساواة .

يمكن ان يحسب الغلاف بتكامل المعادلة (63-14) ، وهذا الشيء ينجز فقط في حالة الجسات ذات الجهد العالي السالب ، حيث يمكن اهمال N_e لتلك الحالة . هنا :

$$\begin{aligned}\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 &\approx \frac{4N_0eV_0}{\epsilon_0}\left[\left(\frac{V}{V_0}\right)^{1/2} - 1\right] \approx \frac{4N_0eV_0^{1/2}V^{1/2}}{\epsilon_0}\\ &= 2\sqrt{\frac{2m_i}{e}}\,\frac{1}{\epsilon_0}J_iV^{1/2},\end{aligned} \tag{14-66}$$

والتي بتكاملها ينتج :

$$x_s = \frac{4\epsilon_0^{1/2}V_p^{3/4}}{3(8m_i/e)^{1/4}J_i^{1/2}}. \tag{14-67}$$

* أنظر المصدر السابق .

* See Chapter 3 of the book edited by Guthrie and Wakerling, *op. cit.*

مسائل

14-1 الشرط اللازم لنظرية المدار لكي تصف حركة الكترون في البلازما بدرجة جيدة من التقريب هو :

$$\tau \gg 2\pi m_e/Be,$$

حيث يمثل τ متوسط زمن التصادم (راجع الفصل السابع) ، ويمثل المقدار $2\pi m_e/Be$ زمن دورة السايكلترون في المجال المغناطيسي B . وضح أن هذا النص يكافيء .

$$\eta \ll \eta_H,$$

حيث أن $\eta_H \equiv B/N_0e$ يمثل ممانعة هال Hall resistivity.

14-2 في مسألة انسياب هايدرومغناطيسي مطرد تكون الكميات **v** و **J** و **B** متعامدة تبادلياً . افرض أن **v** باتجاه x وأن **v** و **J** و **B** دوال لـ x فقط . افرض كذلك مساحة مقطع القناة (العمودي على x) لا تعتمد على x ، وبرهن على أن :

$$v = v_0 - \frac{1}{2\zeta_0 v_0}\left[2B_0\int J\,dx + \mu_0\left(\int J\,dx\right)^2\right],$$

حيث تمثل v_0 السرعة عندما يكون $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ و $\zeta = \zeta_0$.

14-3 اشتق المعادلة (65-14) بفحص المعادلة (63-14) بالنسبة الى المنطقة المجاورة لـ $V \approx V_0$.

14-4 تم قياس مميزات التيار ـ الفولتية لمجس أولج في بلازما انبوبة تفريغ تيار كهربائي (لاحظ الجدول ادناه) . مساحة المجس تساوي $0.05\,\text{cm}^2$ ، وكافة الفولتيات أخذت بالنسبة الى فرق جهد ثابت :

U_p, volts	I, milliamp	U_p, volts	I, milliamp
40.0	−20.5	35.0	−0.34
39.0	−20.4	34.0	−0.096
38.0	−7.5	33.0	−0.011
37.0	−2.7	31.0	+0.033
36.0	−0.98	29.0	+0.041

أوجد درجة حرارة الالكترون في البلازما وكثافة الالكترون والجهد العائم للمجس .

14-5 . كرة متجانسة ذات نصف قطر قدره a وتوصيلية نوعية كهربائية

قدرها σ' تتحرك بسرعة $-\mathbf{v}_0$ في مائع غير لزج وغير قابل للإنضغاط ذي توصيل نوعي مقداره σ وبوجود مجال مغناطيسي منتظم $\mathbf{B_0}$. السرعة v_0 موازية لـ $\mathbf{B_0}$. احسب الطاقة المفقودة بالجول الناتجة عن تيارات محتثة في المنظومة ، وبمساواة هذه الطاقة بالمعدل الزمني الذي تتبدى بها الطاقة الميكانيكية من قبل الكرة ($F_1 v_0$) ، احسب قوة الانحراف $\mathbf{F_1}$. افرض وجود انسياب جهدي في المائع : لمنظومة الاحداثيات التي تستقر فيها الكرة . تعطى سرعة المائع بالنسبة الى نقطة الأصل عند مركز الكرة بالعلاقة الآتية :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \tfrac{1}{2}a^3 \,\mathbf{grad}\, (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}/r^3),$$

[ملاحظة : لمناقشة هذه المسألة والمسائل المتعلقة بالموضوع راجع] :

J. R. Reitz and L. L. Foldy, *Journal of Fluid Mechanics,* **11**, p. 133 (1961).]



معادلات ماكسويل
MAXWELL'S EQUATIONS

15-1 تعميم قانون امبير وتيار الازاحة :
The generalization of Amperé's law. Displacement current

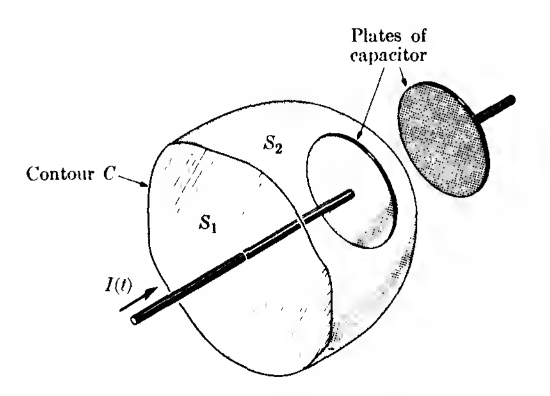
وجدنا في الفصل الثامن أن المجال المغناطيسي الناشيء عن توزيع التيار الكهربائي يحقق قانون أمبير للدائرة :

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da. \qquad (15\text{–}1)$$

سنختبر الآن هذا القانون ونبين فشله ، وسنحاول ايجاد صيغة عامة له .

افرض الدائرة المبينة في الشكل (1–15) ، التي تتكون من متسعة صغيرة ذات الواح متوازية وقد تم شحنها بتيار كهربائي ثابت (بغض النظر عن منشأ هذا التيار) . وبتطبيق قانون أمبير للمنحني المغلق C والسطح S_1 ، نجد

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da = I. \qquad (15\text{–}2)$$



شكل 15-1 . يبين الشكل المنحني المغلق C والسطحين S_1 و S_2 لأختبار قانون الدائرة لأمبير .

من ناحية أُخرى ، إذا استخدمنا قانون أمبير للمنحني المغلق C والسطح S_2 ، فإن J يساوي صفراً لكافة نقاط السطح S_2 وإن :

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, da = 0. \qquad (15\text{-}3)$$

نظراً لتناقض المعادلتين (2-15) و (3-15) إحداهما الأخرى ، فلا يمكن أن تكون كلتاهما صحيحتين . فإذا تخيلنا المنحني المغلق C واقعاً على مسافة كبيرة من المتسعة فإنه من الواضح ان الحالة لا تكون مختلفة بشكل جوهري عن حالات تطبيق قانون أمبير التي درست في الفصل الثامن . وقد يقودنا التفكير الى أن المعادلة (2-15) صحيحة ، حيث انها لا تعتمد على الهيئة الجديدة للحالة أي بإضافة المتسعة ومن جهة أُخرى ، فإن دراسة المعادلة (3-15) تتطلب أخذ المتسعة بنظر الاعتبار لغرض أختصارها ، وعندئذ يظهر أن المعادلة (3-15) بحاجة الى تعديل .

إن التعديل المناسب الممكن إجراءه يكون من خلال ملاحظة أن المعادلتين (2-15) و (3-15) تعطيان نتائجاً مختلفة بسبب اختلاف التكاملات في الطرف الأيمن منهما . وبأسلوب رياضي يمكننا أن نكتب الصيغة الآتية :

$$\int_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_2\, da \quad \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_1\, da \neq 0. \qquad (15\text{-}4)$$

يشكل السطحان S_1 و S_2 معاً سطحاً مغلقاً (يلتقان عند المنحني المغلق C) . على أن n_2 وحدة متجه مرسوم الى خارج السطح و n_1 وحدة متجه مرسوم الى داخل السطح . فإذا أخذنا هذه الحقيقية بنظر الاعتبار فإن المعادلة (4-15) يمكن كتابتها بالصيغة الآتية :

$$\oint_{S_1+S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, da \neq 0, \qquad (15\text{-}5)$$

تمثل المعادلة (5-15) صيغة تكاملية لنظرية التباعد . فإذا استبدل J بالمتجه J′ ذي تباعد قدره صفراً ، فإنه من الواضح أن التكامل سيتلاشى ومن ثم سيزول التناقض بين المعادلتين (2-15) و 3-15) .حيث :

$$\oint_{S_1+S_2} \mathbf{J}' \cdot \mathbf{n}\, da = \int_V \operatorname{div} \mathbf{J}'\, dv, \qquad (15\text{-}6)$$

إن تلاشي تباعد المتجه J′ يضمن تلاشي التكامل السطحي . وهذا بدوره يشير الى أن استبدال المتجه J بالمتجه J′ في قانون أمبير للدوائر الكهربائية سيكون مرضياً من وجهة نظر التناسق بين المعادلتين (2-15) و (3-15) .

إنه من الواجب التذكير أن تطبيق النص الأصلي لقانون أمبير كان ناجحاً في عدة حالات . ومن ثم نكتب :

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J} + \boldsymbol{\alpha}, \qquad (15\text{-}7)$$

حيث ان α يمثل متجهاً ذا أهمية في المسائل التي تشتمل على المتسعات ، في حين لا يمثل أي أهمية في مسائل التوصيل . بالاضافة الى ذلك ، إن α يجب أن يكون الحد اللازم لجعل تباعد المتجه J′ متلاشياً . وبأخذ التباعد للمعادلة (7-15) وجعلها تساوي صفراً نجد :

$$\operatorname{div} \mathbf{J}' = \operatorname{div} \mathbf{J} + \operatorname{div} \boldsymbol{\alpha}. \qquad (15\text{-}8)$$

وبالامكان إستبدال المتجه J بالحد $-\partial\rho/\partial t$, . إذ أن الصيغة التفاضلية لقانون حفظ الشحنة تقتضي الآتي :

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \qquad (15\text{-}9)$$

وبهذا فإن :

$$\text{div}\ \mathbf{J}' = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\ \boldsymbol{\alpha}. \tag{15-10}$$

ولكن الازاحة الكهربائية $\mathbf{D}$ ترتبط بالعلاقة الآتية مع كثافة الشحنة

$$\text{div}\ \mathbf{D} = \rho. \tag{15-11}$$

وبجعل $\boldsymbol{\alpha}$ تساوي $\partial \mathbf{D}/\partial t$، فان $\text{div}\mathbf{J}' = 0$. وبتبني هذا الخيار يمكننا أن نكتب العلاقة :

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{15-12}$$

والتي ستعطي الصيغة المعدلة لقانون أمبير وهي :

$$\text{curl}\ \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{15-13}$$

إن ادخال الحد الثاني من الطرف الأيمن ، الذي يطلق عليه تيار الإزاحة يمثل احدى أضافات ماكسويل الرئيسة للنظرية الكهرومغناطيسية .

15-2 معادلات ماكسويل وأسسها التجريبية :
Maxwell's equations and their empirical basis.

المعادلة (13-15) هي واحدة من مجموعة معادلات تعرف بمعادلات ماكسويل . تشمل المجموعة الكاملة من معادلات ماكسويل اضافة الى المعادلة (13-15)ثلاث معادلات أخرى مألوفة لنا ، وهي :

$$\text{curl}\ \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{15-13}$$

$$\text{curl}\ \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad (9\text{-}6)\ (15\text{-}14)$$

$$\text{div}\,\mathbf{D} = \rho, \qquad (4\text{–}29)\ (15\text{–}15)$$

$$\text{div}\,\mathbf{B} = 0. \qquad (8\text{–}30)\ (15\text{–}16)$$

وكل معادلة من هذه المعادلات تمثل تعمياً لمشاهدات تجريبية محددة : المعادلة (15-13) تمثل حالة عامة لقانون أمبير ، والمعادلة (15-14) تمثل الصيغة التفاضلية لقانون فراداي في الحث الكهرومغناطيسي ، والمعادلة (15-15) تمثل قانون كاوس والذي بدوره يشتق من قانون كولوم ، والمعادلة (15-16) تمثل حقيقة عدم امكانية الحصول على قطب مغناطيسي منفرد مطلقاً .

من الواضح ان معادلات ماكسويل تمثل صيغاً رياضية لنتائج تجريبية محددة ، وفي ضوء هذه الحقيقة فانه من الواضح أن هذه المعادلات لا يمكن اثباتها نظرياً ، ومع ذلك ، فمن الممكن التحقق من صحة تطبيقاتها لأي حالة . وكنتيجة لعمل تجريبي مكثف ، فإن معادلات ماكسويل تطبق لمعظم الحالات العينية (الماكروسكوبية) . وإنها تستخدم عادة كقاعدة يسترشد بها في الدارسات المتعلقة بهذا الموضوع ، شأنها في ذلك شأن قانون حفظ الزخم .

15-3 الطاقة الكهرومغناطيسية Electromagnetic energy.

لقد بينا في الفصل السادس بأن الكمية :

$$W_E = \tfrac{1}{2}\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\,dv \qquad (15\text{–}17)$$

يمكن أن تحدد الطاقة الكامنة الكهرومغناطيسية لمنظومة الشحنات المسببة للمجال الكهربائي . وقد تم الحصول على ذلك بحساب الشغل المنجز لتكوين المجال . وبصورة مماثلة نجد أن الكمية :

$$W_M = \tfrac{1}{2}\int_V \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\,dv \qquad (15\text{–}18)$$

تعرف وكما في الفصل الثاني عشر ، بواسطة الطاقة المخزونة في المجال المغناطيسي . والسؤال الوارد الآن ، هو مدى ملاءمة هذه الصيغ للحالات غير الاستاتيكية .

بطرح المعادلة الناتجة من الضرب اللااتجاهي للمعادلة (13-15) مع **E** من المعادلة الناتجة من الضرب اللااتجاهي للمعادلة (14-15) مع **H**، تنتج المعادلة الآتية :

$$\mathbf{H}\cdot\mathbf{curl\,E}-\mathbf{E}\cdot\mathbf{curl\,H}=-\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}-\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}. \quad (15\text{-}19)$$

ومن الممكن تحوير الطرف الايسر من هذه الصيغة الى تباعد باستخدام المتطابقة الآتية :

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot\mathbf{curl\,A}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{curl\,B}$$

فينتج :

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=-\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}-\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}. \quad (15\text{-}20)$$

فاذا كان الوسط المادي لتطبيق المعادلة (20-15) وسطاً خطياً، أي اذا كان **D** متناسباً مع **E** وكان **B** متناسباً مع **H**،* فان مشتقات الزمن في الطرف الايمن من المعادلة (20-15) يمكن كتابتها كالآتي:

$$\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\mathbf{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\epsilon\mathbf{E}=\tfrac{1}{2}\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}^2=\frac{\partial}{\partial t}\tfrac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$$

و

$$\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\mathbf{H}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mu\mathbf{H}=\tfrac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}^2=\frac{\partial}{\partial t}\tfrac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}.$$

---

* يعد الوسط خطي الخواص فيا اذا كان

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H} \text{ و } \mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E},$$

حيث μ و ϵ كميتان غير معتمدين على متغيرات المجال، وبنفس الوقت لاتظهران اعتاداً واضحاً على الزمن. يحدث شذوذ واضح عن الصفة الخطية عندما يكون الوسط فيرومغناطيسياً ، حيث لاتعتمد العلاقة بين الحث المغناطيسي والشدة المغناطيسية على الشدة المغناطيسية فقط ولكن تعتمد كذلك على ماضي العينة.

ومع ذلك، يجب ملاحظة ان عدم تساوي الاتجاهات وحده سوف لايبطل صحة الصيغ :

$$\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}) \quad \text{و} \quad \mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}).$$

تكملة الهامش بالصفحة التالية

وباستخدام هذه العلاقات ، فان المعادلة (15-20) سوف تأخذ الصيغة الآتية :

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\tfrac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) - \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}. \qquad (15\text{–}21)$$

الحد الاول من الطرف الايمن للمعادلة المذكورة في اعلاه يمثل مشتقة الزمن لمجموع كثافة الطاقة الكهربائية وكثافة الطاقة المغناطيسية . وان الحد الثاني يمثل ، في كثير من الحالات ، المقدار السالب للمعدل الزمني للطاقة الحرارية المبددة (حرارة جول) لوحدة الحجم . وبأخذ التكامل حول حجم ثابت V محدد بالسطح S . نحصل على :

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,dv = -\frac{d}{dt}\int_V \tfrac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})\,dv - \int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,dv.$$

وبتطبيق نظرية التباعد على الطرف الايسر نجد :

$$\oint_S \mathbf{E}\times\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\,da = -\frac{d}{dt}\int_V \tfrac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})\,dv - \int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,dv.$$

في حالة الاوساط المتباينة الخواص . فان العلاقة بين E و D يمكن كتابتها كالآتي :

$$D_i = \sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ij}E_j.$$

وبالتالي :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\epsilon_{ij}\left(E_i\frac{\partial E_j}{\partial t}+\frac{\partial E_i}{\partial t}E_j\right).$$

مناقشة بسيطة تستند الى قانون حفظ الطاقة تبين بأن $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$.
(Wooster, *Crystal Physics*, Cambridge University Press, 1938, p. 277)
وباستخدام هذه النتيجة لاستبدال i ,j في الحد الاخير نجد :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}E_i\epsilon_{ij}\frac{\partial E_j}{\partial t}.$$

لو كان $[\epsilon_{ij}]$ يمثل مجموعة ثوابت غير معتمدة على E ,t ، فان

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}) = \sum_{i=1}^{3}E_i\frac{\partial}{\partial t}\sum_{j=1}^{3}\epsilon_{ij}E_j = \sum_{i=1}^{3}E_i\frac{\partial D_i}{\partial t} = \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

وبهذا فمن الملاحظ ان صفة عدم تساوي الاتجاهات وحدها لاتقيد الاشتقاق .

وباعادة كتابة هذه المعادلة بالصيغة الآتية :

$$-\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,dv = \frac{d}{dt}\int_V \tfrac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})\,dv + \oint_S \mathbf{E}\times\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\,da, \quad (15\text{-}22)$$

ويتبين بشكل واضح ان الحد $\mathbf{J}.\mathbf{E}$ مؤلف من جزأين : الاول هو معدل التغير الزمني في الطاقة الكهرومغناطيسية المخزونة في الحجم الثابت V ، والثاني هو التكامل السطحي . وان الطرف الايسر من المعادلة (22-15) يمثل القدرة المنتقلة الى المجال الكهرومغناطيسي خلال حركة الشحنات الطليقة في الحجم V . فاذا لم تظهر مصادر للقوة الدافعة الكهربائية في V فان الطرف الايسر من المعادلة (22-15) يكون سالباً ويمثل المقدار السالب لحرارة جول الناتجة خلال وحدة الزمن . وفي ظروف معينة قد يكون الطرف الايسر من المعادلة (22-15) موجباً . أفرض ان جسماً مشحوناً بشحنة مقدارها q يتحرك بسرعة ثابتة مقدارها v تحت تأثيرات ناجمة عن قوى ميكانيكية وكهربائية ومغناطيسية ، فان المعدل الزمني للشغل الميكانيكي المنجز على الجسيم يكون :

$$\mathbf{F}_m\cdot\mathbf{v} = -q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{v} = -q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}.$$

ولكن وفقاً للمعادلة (4-7) ، فان كثافة التيار تعرف بالصيغة :

$$\mathbf{J} = \sum_i N_i q_i \mathbf{v}_i;$$

وبهذا ، فان المعدل الزمني الذي ينجز به الشغل الميكانيكي (لوحدة الحجم) يكون :

$$\sum_i N_i \mathbf{F}_m\cdot\mathbf{v}_i = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{J},$$

وان كثافة القدرة هذه تنقل الى المجال الكهرومغناطيسي .

نظراً لكون التكامل السطحي في المعادلة (22-15) يشمل فقط المجالين الكهربائي والمغناطيسي ، فمن المنطقي ان نفسر هذا الحد على أنه يمثل المعدل الزمني لتدفق الطاقة عبر السطح . وهذا بدوره يحفزنا على ان نفسر الحد $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ على أنه الطاقة المتدفقة في وحدة الزمن لوحدة المساحة ، بيد ان هذا التفسير الاخير يقودنا الى بعض التناقضات ، وبذلك فان التفسير الوحيد الذي يعول عليه لتجاوز تلك التناقضات هو أن التكامل $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ حول سطح مغلق يمثل المعدل

الزمني للطاقة الكهرومغناطيسية المخترقة للسطح المغلق . المتجه $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ يعرف بمتجه بوينتنك «Poynting Vector» ، وعادة يرمز له بالحرف $\mathbf{S}$. وبهذا فان المعادلة (15-22) تجسد قانون حفظ الطاقة في حجم ثابت V .

15-4 معادلة الموجة The wave equation

من أهم تطبيقات معادلات ماكسويل هو استخدامها في اشتقاق معادلات الموجات الكهرومغناطيسية . تشتق معادلة الموجة بدلالة $\mathbf{H}$ وذلك بأخذ التفاف المعادلة (15-13) .

$$\text{curl curl } \mathbf{H} = \text{curl } \mathbf{J} + \text{curl } \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot$$

وبوضع $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ و $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$. وبفرض ان g , ϵ مقادير ثابتة ، نجد :

$$\text{curl curl } \mathbf{H} = g \text{ curl } \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{curl } \mathbf{E}.$$

وبفرض ان $\mathbf{E}$ دالة معرفة بشكل ملائم يمكننا استبدال رتب مشتقات الزمن والموقع . ويمكن استخدام المعادلة (15-14) لاختزال **curl E** ، لينتج :

$$\text{curl curl } \mathbf{H} = -g\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \qquad (15\text{-}23)$$

حيث $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, و μ مقدار ثابت . وباستخدام المتطابقة الاتجاهية الآتية :

$$\text{curl curl} = \text{grad div} - \nabla^2 \qquad (15\text{-}24)$$

نجد :

$$\text{grad div } \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = -g\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \cdot \qquad (15\text{-}25)$$

وبما ان μ مقدار ثابت ، فإن :

$$\text{div } \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{div } \mathbf{B} = 0;$$

وبناء على ذلك فإن الحد الأول من الطرف الايسر للمعادلة (25-15)سيتلاشى ، ومعادلة الموجة النهائية تصبح .

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - g\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0. \qquad (15\text{-}26)$$

يحقق المتجه $\mathbf{E}$ معادلة الموجة نفسها ، كما سيتبين من أخذ التفاف المعادلة (14-15) :

$$\text{curl curl } \mathbf{E} = -\text{ curl} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

وباستخدام المعادلة (13-15) لاختزال المجال المغناطيسي وباعتبار g و μ و ϵ مقادير ثابتة ، ينتج :

$$\text{curl curl } \mathbf{E} = -g\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

وباستعمال المتطابقة الاتجاهية (24-15) ، وتحديد تطبيق هذه المعادلة على فضاء شحنة طليقة بحيث أن $\text{div}\mathbf{D} = 0$ ، نحصل على :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - g\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \qquad (15\text{-}27)$$

تعين معادلات الموجة المشتقة في أعلاه المجال الكهرومغناطيسي في وسط مادي منتظم وخطي حيث تكون كثافة الشحنة مساوية للصفر ، سواء اكان هذا الوسط المادي موصلاً أم غير موصل . ومع ذلك ، فإن تحقق هذه المعادلات لا يعد كافياً ، وانما يجب تحقق معادلات ماكسويل ايضاً ، فمن الواضح أن المعادلات (26-15) و (27-15) تمثل نتائج منطقية ضرورية لمعادلات ماكسويل ، ولكن المنطق المضاد غير صحيح . وعند حل معادلات الموجة ، يجب أن نركز اهتمامنا على إيجاد حلول لمعادلات ماكسويل . وأن احدى الطرق التي تعدُّ مثالاً جيداً على ذلك هي بإيجاد حل لشدة المجال الكهربائي $\dot{\mathbf{E}}$ لموجات أحادية الطول الموجي . التفاف $\dot{\mathbf{E}}$ سيعطي مشتقة الزمن للمتجه $\mathbf{B}$ ، والتي تعتمد ببساطة على المتجه $\dot{\mathbf{B}}$ في حالة الموجات أحادية الطول الموجي ، وبهذا يمكن ايجاد $\mathbf{B}$ بسهولة .

الموجات أحادية الطول الموجي يمكن وصفها كموجات تتميز بالتردد الاحادي . وطريقة التحليل العقدي توفر الطريق الملائم للتعامل مع هذه الموجات . لنأخذ اعتماد المجال على الزمن (وبالتحديد ليكن المتجه $\dot{\mathbf{E}}$) بصيغة $e^{-j\omega t}$ ، إذ أن :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_s(\mathbf{r})e^{-j\omega t}. \qquad (15\text{-}28)$$

وهنا يجب التذكير بأن المجال الكهربائي الفيزيائي يحسب بأخذ الجزء الحقيقي * من المعادلة (28-15) . وبالإضافة الى ذلك فإن $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ يمثل حداً مركباً ، وبهذا فإن المجال الكهربائي الفعلي يتناسب مع $(\cos(\omega t + \phi))$ حيث ϕ يمثل طور $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$. وبتطبيق المعادلة (27-15) على المعادلة (28-15) نحصل على :

$$e^{-j\omega t}\{\nabla^2\mathbf{E}_s + \omega^2\epsilon\mu\mathbf{E}_s + j\omega g\mu\mathbf{E}_s\} = 0 \qquad (15\text{-}29)$$

للمعادلة المتحكمة في التغير الموضعي للمجال الكهربائي (العامل المشترك $e^{-j\omega t}$ يمكن اسقاطه طبعاً) . والمهمة الآتية هي حل المعادلة (29-15) لايجاد التغير الموضعي للمجال الكهرومغناطيسي في حالات خاصة مختلفة في الأهمية .

15-5 موجات مستوية احادية الطول الموجي في أوساط مادية غير موصلة : Plane monochromatic waves in nonconducting media

إن أبسط الحلول المبحوثة للمعادلة (29-15) ، هي الحلول المأخوذة للموجات المستوية . في حالة الوسط المادي العازل ذي توصيل نوعي مقداره صفر فإن المعادلة (29-15) تصبح :

$$\nabla^2\mathbf{E}_s + \epsilon\mu\omega^2\mathbf{E}_s = 0. \qquad (15\text{-}30)$$

تعرف الموجة المستوية بأنها الموجة التي تكون ذات اتساعات متساوية في أي نقطة من نقاط مستوي عمودي على اتجاه معين . فإذا كان اتجاه الاحداثي z مثلاً هو الاتجاه المعين بالتعريف ، فإن $\mathbf{E}_s$ ينبغي أن تكون متساوية لكافة النقاط التي لها نفس قيم z ، وبعبارة أخرى $\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_s(z)$. ولهذه الحالة فإن صيغة المعادلة (30-15) ستكون بسيطة للغاية وهي :

---

* كما ناقشنا في الفصل الثالث عشر . يمكننا التحول من الوصف الرياضي الملائم بدلالة المتغيرات المركبة الى الكميات الفيزياوية بأخذ اما الجزء الحقيقي او الجزء الخيالي للكمية المركبة . وان الاختيار للجزء الحقيقي او الخيالي هو كيفي بحد ذاته . يختلف الاختياران عن بعضهما فقط في انحراف طور مقداره $\pi/2$. ومع ذلك ينبغي دائماً اخذ نفس الاختيار في المسألة المعطاة . في هذا الفصل والفصول اللاحقة سيمثل الجزء الحقيقي للكميات المركبة الكميات الفيزياوية وبعكسه سوف يوضح ذلك بشكل جلي

$$\frac{d^2\mathbf{E}_s(z)}{dz^2} + \epsilon\mu\omega^2\mathbf{E}_s = 0. \qquad (15\text{-}31)$$

ولقد اختفت مشتقات x و y من المعادلة (15-31) ، لأن $\mathbf{E}_s$ لا تعتمد على أي من الاحداثيين x و y . وعندها ستصبح المشتقة الجزئية الثانية مشتقة اعتيادية بسبب أن $\mathbf{E}_s$ دالة لمتغير واحد . وان حل المعادلة (15-31) معروف جيداً ويمثل بالصيغة الآتية :

$$\mathbf{E}_s(z) = \mathbf{E}_0 e^{\mp j\omega\sqrt{\epsilon\mu}\, z}, \qquad (15\text{-}32)$$

حيث ان $\mathbf{E}_0$ متجه ثابت . تمثل المعادلة (15-32) حلاً للمعادلة (15-30) ذات جبهات موجبة «wavefronts» عمودية على اتجاه الاحداثي z . ومع ذلك ، قد لا تحقق جميع هذه الحلول معادلات ماكسويل . والمعادلة التي لا تتحقق في هذه الحالة هي العلاقة (15-15) التي فرضت عليها بعض التقيدات . هذه المعادلة تكافيء :

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_s = 0. \qquad (15\text{-}33)$$

نظراً لعدم اعتماد $\mathbf{E}_s$ على أي من الاحداثيين x و y فالمعادلة (15-33) تصبح :

$$\frac{\partial}{\partial z} E_{sz}(z) = \mp j\omega\sqrt{\epsilon\mu}\, E_{sz}(z) = 0. \qquad (15\text{-}34)$$

تكون المعادلة في اعلاه صحيحة فقط في حالة E_{sz} يساوي صفراً ، وبعبارة أخرى ، اذا كانت $\mathbf{E}_s$ ليست لها مركبة باتجاه z . وهذا بدوره يعني ان المتجه الكهربائي لموجة مستوية يجب ان يكون موازياً الى جبهات الموجة . وعموماً ، ان المجال الكهربائي لموجة ذات جبهات موجية عمودية على الاحداثي z ، يكون :

$$\mathbf{E}_s(z) = (\mathbf{i}E_{0x} + \mathbf{j}E_{0y})e^{\mp j\omega\sqrt{\epsilon\mu}\, z}. \qquad (15\text{-}35)$$

ويمكن ايجاد المجال المغناطيسي المرافق لهذا المجال الكهربائي ، بأخذ التفاف المعادلة (15-35) : ، :

$$\operatorname{curl} \mathbf{E}_s(z) = \mp [-j\omega\sqrt{\epsilon\mu}\, \mathbf{i}E_{0y} + j\omega\sqrt{\epsilon\mu}\, \mathbf{j}E_{0x}]e^{\mp j\omega\sqrt{\epsilon\mu}\, z}$$

وبمساواتها مع $j\omega\mathbf{B}_s$. ان هذا الاجراء مشتق من معادلة ماكسويل (15-14) من خلال التعويض :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s e^{-j\omega t}, \ \mathbf{B} = \mathbf{B}_s e^{-j\omega t}.$$

وان الجزء الموضعي الناتج من الحث المغناطيسي يكون :

$$\mathbf{B}_s = \mp [-E_{0y}\mathbf{i} + E_{0x}\mathbf{j}]\sqrt{\epsilon\mu}\, e^{\mp j\omega\sqrt{\epsilon\mu}\, z}, \qquad (15\text{–}36)$$

او ، بسهولة يمكننا اثبات ان :

$$\mathbf{B}_s = \mp\sqrt{\epsilon\mu}\, \mathbf{k} \times \mathbf{E}_s. \qquad (15\text{–}37)$$

وبهذا ، يكون $\mathbf{B}_s$ عمودياً على كل من $\mathbf{E}_s$ والاحداثي z. ومن الملائم تعريف اتجاه الانتشار ، بأنه اتجاه المعدل الزمني الاقصى للتغير في طور $\mathbf{E}_s$ (أو $\mathbf{B}_s$) . وفي الحالة المدروسة في أعلاه يكون اتجاه الانتشار باتجاه z فيما اذا استخدمت علامة الزائد في المعادلة (15–37) ، أو بالاتجاه السالب للاحداثي z فيما اذا استخدمت علامة الناقص .

الخلاصة : يوصف انتشار موجة مستوية أحادية الطول الموجي بالاتجاه الموجب للاحداثي z بالمعادلات الآتية :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_s(z)e^{-j\omega t} = \mathbf{E}_0 e^{j\omega(\sqrt{\epsilon\mu}\, z - t)},$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_s(z)e^{-j\omega t} = \sqrt{\epsilon\mu}\, \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{j\omega(\sqrt{\epsilon\mu}\, z - t)}, \qquad (15\text{–}38)$$

حيث يمثل $\mathbf{E}_0$ متجهاً كيفياً موازياً للمستوي xy .

الموجات المستوية المنتقلة باتجاه الاحداثي z ، تكون ملائمة للمسائل التي يكون فيها أختيار اتجاه الاحداثي z كيفياً . وبهذا ففي كثير من المسائل يكون اختيار منظومة الاحداثيات خاضعاً لاعتبارات اخرى . وكمثال على مثل هذه الاعتبارات هي شروط الحدود للمسألة . في مثل هذه الحالات ، من الضروري تكوين موجات مستوية تنتشر باتجاهات كيفية . لغرض توضيح ذلك ، أفرض موجة مستوية ذات اتجاه انتشاري $\mathbf{u}$. حيث $\mathbf{u}$ وحدة متجه . عندئذ تلعب $\mathbf{u}$ دور وحدة المتجه $\mathbf{k}$ في المناقشة السابقة . وان المتغير z في الشرح السابق يجب استبداله بالمقدار $\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}$ الذي يمثل مسقط المتجه $\mathbf{r}$ باتجاه وحدة المتجه $\mathbf{u}$. والتبديل الاخير المطلوب هو أن يكون عمودياً على $\mathbf{u}$ بدلاً من $\mathbf{k}$. وبهذا يوصف انتشار موجة مستوية باتجاه موازٍ لوحدة المتجه $\mathbf{u}$ بالمعادلات الآتية :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{j\omega[\sqrt{\epsilon\mu}\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{r} - t]},$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\epsilon\mu}\,\mathbf{u} \times \mathbf{E}_0 e^{j\omega[\sqrt{\epsilon\mu}\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{r} - t]}, \tag{15-39}$$

حيث ان $\mathbf{E}_0$ عمودية على $\mathbf{u}$ ولكن بغير ذلك تكون كيفية . باستخدام الرموز ، نضع

$$\omega\sqrt{\epsilon\mu}\,\mathbf{u} = \boldsymbol{\kappa}. \tag{15-40}$$

يطلق على المتجه $\boldsymbol{\kappa}$ بمتجه الانتشار «propagation vector» ، وبدلالة متجه الانتشار هذا فان معادلة الموجة المستوية التي تنتقل في اتجاه $\boldsymbol{\kappa}$ تكتب بالشكل الآتي :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{j(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r} - \omega t)},$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{E}_0 e^{j(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}. \tag{15-41}$$

تمثل سرعة انتشار موجة مستوية أحادية الطول الموجي بالسرعة التي تتحرك بها مستويات ذات طور ثابت . والطور الثابت يعني :

$$\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r} - \omega t = \text{constant}. \tag{15-42}$$

فاذا استعيض عن الكمية $\boldsymbol{\kappa}.\mathbf{r}$ بالكمية $\kappa\xi$ ، حيث κ يمثل مقدار $\boldsymbol{\kappa}$ و ξ يمثل مسقط $\mathbf{r}$ باتجاه $\boldsymbol{\kappa}$. فان المعادلة (15-42) تصبح :

$$\kappa\xi - \omega t = \text{constant}.$$

وبتفاضل العلاقة المذكورة في اعلاه بالنسبة الى الزمن ، ينتج :

$$v_p = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \tag{15-43}$$

لسرعة سطوح ذات طور ثابت . وفي حالة الفضاء الطليق ،

$$v_p = c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0},$$

وبهذا ، تكون المعادلة (15-43) بالشكل العام الآتي :

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{K_e K_m}} . \qquad (15\text{-}44)$$

ان الصيغة :

$$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/sec}$$

تمثل سرعة الضوء في الفراغ . وهذه النتيجة هي بالطبع نفس النتيجة المتوقعة لان الضوء نوع من الاشعاع الكهرومغناطيسي . ولكن عندما شخص ماكسويل هذه النتيجة لاول مرة عُدّت انتصاراً كبيراً لنظريته ، حيث لم تكن في ذلك الحين طبيعة الضوء الكهرومغناطيسية معروفة تماماً . الكميتان K_e و K_m في المعادلة (15-44) تمثلان ثابت العزل الكهربائي ومعامل النفوذية النسبي للوسط المادي على الترتيب .

واضح من المعادلة (15-44) ان معامل الانكسار للموجة يعرف ضوئياً بالصيغة :

$$n = \sqrt{K_e K_m} . \qquad (15\text{-}45)$$

بما ان قيمة K_m قريبة جداً من الواحد لمعظم الاوساط المادية الشفافة فان معامل الانكسار يمثل الجذر التربيعي لثابت العزل الكهربائي لتلك الاوساط . وهذه النتائج تمكننا من دراسة بعض المسائل الضوئية المهمة جداً ومع ذلك سنؤجل دراسة هذه المسائل الى الفصل القادم .

15-6 موجات مستوية أُحادية الطول الموجي في أوساط مادية موصلة
Plane monochromatic waves in conducting media

تختصر معادلة الموجة لموجة احادية الطول الموجي ذات تردد ومقداره ω في الوسط المادي الموصل الى الصيغة الآتية :

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s + \omega^2 \epsilon\mu \mathbf{E}_s + j\omega g\mu \mathbf{E}_s = 0 \qquad (15\text{–}29)$$

وكما مر سابقاً ، فقد تتعين موجات مستوية ذات جبهات موجة موازية للمستوى xy بالمعادلة :

$$\frac{d^2\mathbf{E}_s}{dz^2} + \omega^2 \epsilon\mu \mathbf{E}_s + j\omega g\mu \mathbf{E}_s = 0 \qquad (15\text{–}46)$$

حيث أن $\mathbf{E}_s$ دالة لـ z فقط . وايجاد حل لهذه المعادلة يكون بأخذ :

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_0 e^{j\gamma z}.$$

وبأستخدام هذه العلاقة في المعادلة (46-15) نحصل على :

$$-\gamma^2 + \omega^2 \epsilon\mu + j\omega g\mu = 0. \qquad (15\text{–}47)$$

الاسلوب المألوف في جبر الأعداد المركبة يساعدنا في تجزئة γ الى جزأين حقيق وخيالي ، α و β ، فإما أن تأخذ γ الصيغة الآتية :

$$\gamma = \alpha + j\beta = \mp(\omega^4\epsilon^2\mu^2 + \omega^2 g^2 \mu^2)^{1/4}(\cos\varphi + j\sin\varphi),$$

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\frac{g}{\omega\epsilon}, \qquad (15\text{–}48a)$$

أو أن تأخذ هذه الصيغة :

$$\alpha = \mp\omega\sqrt{\epsilon\mu}\left[\tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + (g^2/\omega^2\epsilon^2)}\right]^{1/2}, \quad \beta = \omega g\mu/2\alpha. \quad (15\text{–}48b)$$

كلتا الصيغتين ملائمة ، وان الاختيار يعتمد على طبيعة المشكلة المدروسة .
وهكذا ، توصف موجة مستوية منتقلة بإتجاه الاحداثي z بالمعادلة

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_s(z)e^{-j\omega t} = \mathbf{E}_0 e^{j(\alpha z - \omega t)}e^{-\beta z}, \qquad (15\text{–}49)$$

والتي تمثل بوضوح موجة متضاءلة أُسياً ومنتقلة في الاتجاه الموجب للاحداثي z . المعادلات في اعلاه هي معادلات من نوع المعادلات التامة ولكنها مركبة ، إذن من المناسب إجراء بعض عمليات التقريب . فإذا كان التردد أقل من مدى التردد الضوئي ، $g \gg \epsilon\omega$ للموصلات المعدنية ، وعند هذا المدى تكون $\varphi = \pi/4$ ، لذا

$$\beta = \sqrt{\omega g\mu}\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{\omega g\mu/2}. \qquad (15\text{-}50)$$

الحد $1/\beta$ يمثل مقدار العمق الذي يحتاجه المجال الكهربائي لتنقص قيمته الى $\frac{1}{e}$ من قيمته عند سطح الموصل . وهذا العمق يسمى « العمق القشري » «skin depth» ويرمز له بالرمز δ . تتجلى الأهمية الأساسية للعمق القشري في قياس مقدار العمق الذي تتمكن موجة كهرومغناطيسية من اختراقه في وسط مادي موصل . صفيحة رقيقة من الفضة مثلاً ، لها توصيل نوعي مؤثر عند ترددات الموجة المايكروية . مقداره :

$$g = 3 \times 10^7 \text{ mhos/m}$$

وعند التردد 10^{10} دورة/ ثانية الذي يمثل منطقة المايكروويف الاعتيادية . فإن العمق القشري يكون :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{(2\pi \times 10^{10})(3 \times 10^7)(4\pi \times 10^{-7})}} = 9.2 \times 10^{-5} \text{ cm.}$$

وبهذا يكون العمق القشري في الفضة قصيراً جداً عند الترددات للموجات المايكروية . وبناء على ذلك فإن الفرق يكاد لا يذكر في الفعالية بين الفضة النقية والنحاس الاصفر المطلي بالفضة . ولهذا السبب تستخدم تقنية الطلاء لتقليل كلفة المواد المستعملة لصنع دليل موجة جيد النوعية .

وكمثال ثانٍ ، لنحسب التردد الذي يكون عنده العمق القشري لماء البحر مساوياً لمقدار مترٍ واحد . وبما أن $\mu = \mu_0$ و $g \approx 4.3$ mhos/m لماء البحر فإن صيغة التردد الذي يتوافق مع عمق قشري معين ، تصبح :

$$\omega = \frac{2}{g\mu\,\delta^2} = \frac{2}{4.3 \times 4\pi \times 10^{-7}\,\delta^2}\text{ sec}^{-1} = \frac{3.70 \times 10^5}{\delta^2}\text{ sec}^{-1},$$

وبتعويض $\delta = 1$ m ، نحصل على :

$$f = 58.6 \times 10^3 \text{ cycles/sec,}$$

أو تردد مساوٍ لـ 60 kc لعمق قشري مساوٍ لمتر واحد من ماء البحر . فإذا جهزت الغواصة بجهاز استقبال حساس لأصبح بالامكان الاتصال مع غواصة غارقة وذلك

باستخدام جهاز ارسال قوي جداً . وينبغي كذلك استخدام تردد راديوي قصير جداً ، ومع ذلك يحدث توهين شديد في الاشارة المرسلة . ويمكن الاستنتاج بأنه خلال خمسة اطوال من العمق القشري (خمسة أمتار في حالة المثال السابق) لا يبقى من المجال الكهربائي الاولي سوى 1% فقط وحوالي 0.01% من القدرة الساقطة .

15-7 الموجات الكروية Spherical waves.

كمثال لمسائل الموجة الاكثر صعوبة . حيث أنها بالحقيقة ليست سهلة للايجاد حتى للموجات الأولية . دعنا ندرس الآن معادلة الموجة مستخدمين الاحداثيات الكروية . معادلة موجة المجال الكهربائي في الوسط المادي غير الموصل هي :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{15-51}$$

ومعادلة الجزء الموضعي لموجات أحادية الطول الموجي تصبح :

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s + \epsilon\mu\omega^2 \mathbf{E}_s = 0. \tag{15-52}$$

تكمن صعوبة أستخدام الاحداثيات الكروية بالتعبير عن المتجه $\mathbf{E}_s$ بدلالة المركبات النصف قطرية «radial» والسمتية «azimuthal» والزوالية «meridional» ، وكل من تلك المركبات تقدم كدوال لنصف القطر ولزاوية السمّت ولخط الزوال . فإذا أجرينا هذا التعبير ، يصبح غير كافٍ استخدام تعبير لابلاس «Laplacian» بالاحداثيات الكروية في المعادلة (15-52) . ومن الضروري تعريف تعبير لابلاس لمتجه بالصيغة الآتية :

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s = -\text{curl curl } \mathbf{E}_s + \text{grad div } \mathbf{E}_s. \tag{15-53}$$

إن تباعد المتجه $\mathbf{E}_s$ مازال يساوي صفراً . وأن المركبة النصف قطرية لمتجه curl curl $\mathbf{E}_s$ لا تشتمل على المركبة النصف قطرية للمتجه $\mathbf{E}_s$ فقط بل تشتمل بالاضافة الى ذلك على المركبات السمتية والزوالية . وبالمثل تكون المركبات θ و ϕ معقدة كذلك . ويكون الناتج النهائي مكوناً من ثلاث معادلات تفاضلية جزئية آنية مشتملة على المركبات الثلاثة للمتجه $\mathbf{E}_s$. ولا يمكن إجراء عزل المتغيرات

لمعادلة لابلاس الاتجاهية في الاحداثيات الكروية كما يجري في الاحداثيات المتعامدة ، والتي في حقيقتها ميزة للاحداثيات المتعامدة . ومع ذلك ينبغي أن نشير الى انه بالامكان استخدام الاحداثيات المتعامدة والتي يمكن وضعها بالشكل الآتي :

$$E_{sx}(r, \theta, \phi),\ E_{sy}(r, \theta, \phi),\ E_{sz}(r, \theta, \phi).$$

يتم تجاوز الصعوبة التي نوقشت في أعلاه بطريقة سهلة ، وذلك بفرض معادلة هلمولتز اللااتجاهية :

$$\nabla^2\psi + \epsilon\mu\omega^2\psi = 0, \qquad (15\text{-}54)$$

وكما سنرى لاحقاً ، سنتمكن من ايجاد حلولها بسهولة . افرض أن ψ تمثل واحداً من حلول تلك المعادلة ، وأن :

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{r} \times \mathbf{grad}\ \psi$$

تحقق معادلة هلمولتز الاتجاهية (المعادلة 15-52) :

$$-\mathbf{curl\ curl\ E}_s + \mathbf{grad}\ \mathrm{div}\ \mathbf{E}_s + \epsilon\mu\omega^2\mathbf{E}_s = 0. \qquad (15\text{-}55)$$

لاثبات ذلك ، لاحظ المتطابقة الآتية :

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{r} \times \mathbf{grad}\ \psi = -\mathbf{curl}\ (\mathbf{r}\psi), \qquad (15\text{-}56)$$

والتي تستنتج من المتطابقة الاتجاهية :

$$\mathbf{curl}\ (\mathbf{A}\varphi) = \varphi\ \mathbf{curl\ A} - \mathbf{A} \times \mathbf{grad}\ \varphi \qquad (15\text{-}57)$$

و

$$\mathbf{curl\ r} = 0. \qquad (15\text{-}58)$$

ونظراً لأن تباعد أي التفاف يساوي صفراً ، فمن الضروري الأخذ بنظر الاعتبار الحد الأول من الطرف الأيسر للمعادلة (15-55) فقط ، والتفاف المتجه $\mathbf{E}_s$ يمكن ايجاده باستخدام المتطابقة الأتجاهية :

$$\mathbf{curl}\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}\ \mathrm{div}\ \mathbf{B} - \mathbf{B}\ \mathrm{div}\ \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{B} \qquad (15\text{-}59)$$

للحصول على :

$$\mathbf{curl}\ (\mathbf{r} \times \mathbf{grad}\ \psi) = \mathbf{r}\nabla^2\psi - \mathbf{grad}\ \psi\ \mathrm{div}\ \mathbf{r} + (\mathbf{grad}\ \psi \cdot \mathbf{grad})\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{grad})\ \mathbf{grad}\ \psi. \qquad (15\text{-}60)$$

بينا في التمرين (13-1) أن :

$$(\mathbf{A}\cdot \text{grad})\mathbf{r} = \mathbf{A}$$

لأي متجه ، وكذلك بينا أن تباعد المتجه $\mathbf{r}$ يساوي ثلاثة (3) . وباستخدام حقيقة ان ψ يحقق صحة معادلة هلمولتز اللاإتجاهية فإن من الممكن تبسيط الحد الأول من المعادلة (60-15) ، ولهذا سيبقى الحد الأخير من المعادلة (60-15) مصدراً وحيداً للتعقيد والصعوبة . باستخدام المتطابقة الاتجاهية :

$$\text{grad}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\text{grad})\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\text{grad})\mathbf{A} + \mathbf{A}\times\text{curl}\,\mathbf{B} + \mathbf{B}\times\text{curl}\,\mathbf{A}, \tag{15-61}$$

وبتعويض :

$$\mathbf{A} = \mathbf{r} \quad \text{و} \quad \mathbf{B} = \text{grad}\,\psi,$$

نجد :

$$\text{grad}\,(\mathbf{r}\cdot\text{grad}\,\psi) = (\mathbf{r}\cdot\text{grad})\,\text{grad}\,\psi + (\text{grad}\,\psi\cdot\text{grad})\mathbf{r}. \tag{15-62}$$

يتلاشى الحدان الأخيران من المعادلة (61-15) لأن مقدار **(curl** grad) لأي متجه يساوي صفراً . وباستخدام هذه العلاقات الرياضية في المعادلة (60-15) نحصل على :

$$\text{curl}\,(\mathbf{r}\times\text{grad}\,\psi) = -\epsilon\mu\omega^2\mathbf{r}\psi - 3\,\text{grad}\,\psi + \text{grad}\,\psi - \text{grad}\,(\mathbf{r}\cdot\text{grad}\,\psi) + \text{grad}\,\psi. \tag{15-63}$$

واخيراً ، بأخذ التفاف المعادلة (63-15) ، نجد :

$$\text{curl curl}\,(\mathbf{r}\times\text{grad}\,\psi) = -\epsilon\mu\omega^2\,\text{curl}\,\mathbf{r}\psi = \epsilon\mu\omega^2\mathbf{r}\times\text{grad}\,\psi, \tag{15-64}$$

والتي تمثل معادلة هلمولتز الاتجاهية . وخلال هذا الحل لم تستعمل منظومة الاحداثيات الكروية بشكل واضح ، لكن $\mathbf{r}$ عمودي على سطح ذي نصف قطر ثابت في الاحداثيات الكروية ، لذا من المتوقع أن يكون الحل $\mathbf{r}\times\text{grad}\,\psi$ ذا فائدة خاصة في هذه المنظومة من الاحداثيات ولا يكون في الحقيقة ذا فائدة كبيرة في منظومات الاحداثيات الأخرى .

لقد وجدنا ان الكمية $\mathbf{r}\times\text{grad}\,\psi$ تمثل حلاً لمعادلة هلمولتز الاتجاهية . وكذلك وجدنا ان ψ تمثل حلاً لمعادلة هلمولتز اللاإتجاهية . بقي ان نجد مدى

امكانية استخدام هذه الحلول لتكوين موجات كهرومغناطيسية ، إن الطريقة التي سنتبعها بسهلة للغاية . لنأخذ التغير الموضعي للمجال الكهربائي المعطى بالمعادلة :

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{r} \times \mathbf{grad}\, \psi. \qquad (15\text{-}56)$$

وينبغي اختيار المجال المغناطيسي بحيث يحقق مع المجال الكهربائي صحة معادلات ماكسويل ، ولهذه المرحلة نكتب المعادلة (15-14) بالصيغة الآتية :

$$\mathbf{curl}\, \mathbf{E}_s = j\omega \mathbf{B}_s, \qquad (15\text{-}65)$$

حيث افترضنا وجود الكمية القياسية ($e^{-j\omega t}$) التي تمثل اعتماد الصيغة في اعلاه على الزمن ، المعادلة (15-63) تعطي بشكل واضح التفاف المتجه $\mathbf{E}_s$ ، كما تقودنا الى الصيغة المختصرة الآتية :

$$\mathbf{B}_s = -j\frac{1}{\omega}\, \mathbf{curl}\, (\mathbf{r} \times \mathbf{grad}\, \psi). \qquad (15\text{-}66)$$

بما أن تباعد أي التفاف يساوي صفراً ، فإن المعادلة (15-16) سوف تتحقق . إن تحقق المعادلة (15-13) أمر بديهي نابع من حقيقة أن $\mathbf{E}_s$ و $\mathbf{B}_s$ يمثلان حلولاً لمعادلة الموجة ، والتي بدورها تمثل توحيد المعادلتين (15-13) و (15-14) .

لا يمثل الحل المعطى بالمعادلتين (15-56) و (15-66) الحل العام الممكن اشتقاقه من دالة ψ المعطاة . ان الحل الآخر الذي يمكن ايجاده بوضع :

$$\mathbf{B}'_s = \sqrt{\epsilon\mu}\; \mathbf{r} \times \mathbf{grad}\, \psi \qquad (15\text{-}67)$$

وبايجاد المجال الكهربائي من المعادلة (15-13) (بجعل $J = 0$) هو :

$$\mathbf{E}'_s = \frac{j}{\omega\sqrt{\epsilon\mu}}\, \mathbf{curl}\, (\mathbf{r} \times \mathbf{grad}\, \psi). \qquad (15\text{-}68)$$

تبين الفرضيات المفصلة في اعلاه أن $\mathbf{E}'_s$ و $\mathbf{B}'_s$ يشكلان حلولاً لمعادلات ماكسويل ، شأنها شأن المتجهين $\mathbf{E}_s$ و $\mathbf{B}_s$ بالضبط . الحلول تختلف في أن $\mathbf{E}_s$ عند اي نقطة يكون مماساً للسطح الكروي المار من النقطة ومركزه في نقطة الأصل للأحداثيات . من ناحية أخرى فإن $\mathbf{B}'_s$ لها نفس هذه الخواص . وعلى ضوء هذه الحقائق . فإن الحل $\mathbf{E}_s$ و $\mathbf{B}_s$ يطلق عليه في بعض الحالات ، الكهربائية المستعرضة ، وعلى $\mathbf{E}'_s$ و $\mathbf{B}'_s$ يطلق المغناطيسية المستعرضة . والمستعرضة تعني الكمية العمودية على الاتجاه الشعاعي .

في البنود السابقة ، مشكلة حل معادلة هلمولتز الاتجاهية اختصرت الى حل معادلة هلمولتز اللاإتجاهية . ويتم إنجاز ذلك في الاحداثيات الكروية باستخدام طريقة عزل المتغيرات المألوفة للقاريء كما مرَّ سابقاً في تمارين الجهد الكهربائي (الفصل الثالث) . معادلة هلمولتز اللاإتجاهية بدلالة الاحداثيات الكروية تكون بالصيغة الآتية :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+\kappa^2\psi=0, \quad (15\text{-}69)$$

إذ أن :

$$\kappa^2=\epsilon\mu\omega^2$$

و

$$\psi=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi). \quad (15\text{-}70)$$

وبتعويض هذه الصيغة المفروضة لـ ψ في المعادلة (15-69) وبالقسمة على ψ ينتج :

$$\frac{1}{R}\sin^2\theta\frac{d}{dr}r^2\frac{dR}{dr}+\frac{1}{\Theta}\sin\theta\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+\kappa^2r^2\sin^2\theta=0, \quad (15\text{-}71)$$

بعد الضرب بالمقدار $r^2\sin^2\theta$. الحد الثالث من المعادلة (15-71) يعتمد على ϕ فقط ، وهو الحد الوحيد في المعادلة الذي يعتمد على ϕ فقط ، وبالتالي فان هذا الحد يجب أن يكون ثابتاً ، ويفترض أن يكون مساوياً لـ $(-m^2)$ ، وبعبارة اخرى .

$$\frac{d^2\Phi_m}{d\phi^2}+m^2\Phi_m=0, \quad (15\text{-}72)$$

حيث يشير الرمز السفلي m على ان Φ تعتمد على m . وبإعادة كتابة المعادلة (15-71) بعد تعويض المعادلة (15-72) فيها ، نجد :

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}r^2\frac{dR}{dr}+\kappa^2r^2+\frac{1}{\Theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}-\frac{m^2}{\sin^2\theta}=0. \quad (15\text{-}73)$$

نلاحظ أن الحدين الأولين من المعادلة (15-73) يعتمدان على r فقط ، في حين يعتمد الحدان الأخيران على θ فقط . ولهذا فإن مجموع الحدين الأخيرين ينبغي ان يكون ثابتاً ، ويفترض أن يكون مساوياً لـ $-l(l+1)$. ونتيجة لهذه الفرضية فإن مجموع الحدين الأولين يجب ان يكون مساوياً لـ $l(l+1)$. وهكذا نحصل على المعادلتين الآتيتين :

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d\Theta_{lm}}{d\theta}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta_{lm}=0 \qquad (15\text{-}74)$$

و

$$\frac{d}{dr}r^2\frac{dR_l}{dr}-[l(l+1)-\kappa^2 r^2]R_l=0. \qquad (15\text{-}75)$$

ان حلول المعادلة (15-72) ، معروفة جيداً وتمثل بالصيغة الآتية :

$$\Phi_m = e^{\mp jm\phi} \qquad (15\text{-}76)$$

في حين حلول المعادلة (15-74) معروفة بشكل أقل من سابقتها ، ومع ذلك لقد مرت علينا بعض تلك الحلول في الفصل الثالث ، وبالتحديد الحلول المرافقة للقيمة $m = o$ ، وهذه الحلول هي متعددة حدود لجندر* $P_l(\cos\theta)$. أن حلول المعادلة (15-74) لقيم كيفية للمقدار m ، $m \lessgtr l$ ، تعرف بمتعددة حدود لجندر المرافقة والتي تمثل بالصيغة :

$$P_l^m(u)=(1-u^2)^{m/2}\frac{d^m}{du^m}P_l(u), \qquad (15\text{-}77)$$

حيث أن $u = \cos\theta$. من الواضح أن :

$$P_l^0(u)=P_l(u),$$

والتي تمثل متعددة حدود لجندر الاعتيادية . وقيم هذه الدوال مثبتة في الجدول (15-1) للقيم $m \neq 0$.

اخيراً ، ينبغي دراسة المعادلة (15-75) . باستبدال المتغير r بالمتغير $\kappa r = \xi$ ، ينتج :

$$\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d}{d\xi}R_l-[l(l+1)-\xi^2]R_l=0. \qquad (15\text{-}78)$$

وبتعويض $R_l = \xi^{-1/2}Z_l$ تحول هذه المعادلة الى الصيغة الآتية :

$$\xi^2\frac{d^2Z_l}{d\xi^2}+\xi\frac{dZ_l}{d\xi}-[(l+\tfrac{1}{2})^2-\xi^2]Z_l=0. \qquad (15\text{-}79)$$

---

* في الفصل الثالث ، لقد كتبنا هذه الدوال بصيغة $P_l(\theta)$. وبما أن متعددة حدود لجندر هي متعددة حدود بدلالة $\cos\theta$ ، فمن الاكثر عمومية لو كتبناها بصيغة $P_l(\cos\theta)$ ، سنتعمل هذه الصيغة في الفصل القادم كذلك .

جدول 15-1

متعددة حدود لجندر المرافقة ، $P_l^m(u)$ ، حيث $u = \cos\theta$

Designation	Function
$P_0(u)$	1
$P_1(u)$	$u = \cos\theta$
$P_1^1(u)$	$(1-u^2)^{1/2} = \sin\theta$
$P_2(u)$	$\frac{1}{2}(3u^2-1) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1)$
$P_2^1(u)$	$3u(1-u^2)^{1/2} = \frac{3}{2}\sin 2\theta$
$P_2^2(u)$	$3(1-u^2) = \frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)$
$P_3(u)$	$\frac{1}{2}(5u^3-3u)$
$P_3^1(u)$	$\frac{3}{2}(1-u^2)^{1/2}(5u^2-1)$
$P_3^2(u)$	$15u(1-u^2)$
$P_3^3(u)$	$15(1-u^2)^{3/2}$

هذه المعادلة المألوفة جداً للفيزياويين وللرياضيين ، تسمى بمعادلة بسل . إن حلول هذه المعادلة معروفة جيداً ، وقد تم بحثها بشكل موسع . ويعبر عن الحلول العامة بالرمزين $J_{l+1/2}(\kappa r)$ و $N_{l+1/2}(\kappa r)$ اللذين يطلق عليها دالة بسل "Bessel function" ودالة نيومن "Neumann function" للرتبة $l+\frac{1}{2}$ على الترتيب . لأغراض معادلة الموجة ، فإنه من الملائم تعريف دوال بسل الكروية بالصيغ الآتية :

$$j_l(\kappa r) = \sqrt{\pi/2\kappa r}\, J_{l+1/2}(\kappa r), \qquad n_l(\kappa r) = \sqrt{\pi/2\kappa r}\, N_{l+1/2}(\kappa r); \qquad (15.80)$$

ومن هذه الصيغ نجد على التعاقب :

$$h_l^{(1)}(\kappa r) = j_l(\kappa r) + j n_l(\kappa r), \qquad h_l^{(2)} = j_l(\kappa r) - j n_l(\kappa r). \qquad (15.81)$$

تمثل جميع الدوال :

$j_l(\kappa r)$ و $n_l(\kappa r)$ و $h_l^{(1)}(\kappa r)$ و $h_l^{(2)}(\kappa r)$

حلولاً للمعادلة (15-75) . هذه الدوال مدونة لقيم $l = 0, 1, 2$ في الجدول (15-2) . دوال h تلائم بشكل خاص مسائل الاشعاع لأن سلوكية هذه الدوال لقيم r الكبيرة تكون كالآتي :

$$h_l^{(1)}(\kappa r) \underset{\kappa r \to \infty}{\longrightarrow} \frac{(-j)^{l+1} e^{j\kappa r}}{\kappa r},$$

$$h_l^{(2)}(\kappa r) \underset{\kappa r \to \infty}{\longrightarrow} \frac{j^{l+1} e^{-j\kappa r}}{\kappa r},$$

وبالتالي تقودنا الى موجات كروية خارجة وأخرى داخلة ، الصيغة العامة لـ ψ يمكن ان تكتب بالشكل الآتي :

$$\psi_{lm} = \sqrt{\pi/2\kappa r}\, Z_l(\kappa r) P_l^m(\cos\theta)\, e^{\mp jm\phi} \qquad (15-82)$$

جدول 15-2
دوال بسل ونيومان الكروية

Type	Function
$j_0(\rho)$	$(1/\rho)\sin\rho$
$n_0(\rho)$	$-(1/\rho)\cos\rho$
$h_0^{(1)}(\rho)$	$-(j/\rho)e^{j\rho}$
$h_0^{(2)}(\rho)$	$(j/\rho)e^{-j\rho}$
$j_1(\rho)$	$(1/\rho^2)\sin\rho - (1/\rho)\cos\rho$
$n_1(\rho)$	$-(1/\rho)\sin\rho - (1/\rho^2)\cos\rho$
$h_1^{(1)}(\rho)$	$-(1/\rho)e^{j\rho}(1 + j/\rho)$
$h_1^{(2)}(\rho)$	$(1/\rho)e^{-j\rho}(1 - j/\rho)$
$j_2(\rho)$	$\left[\frac{3}{\rho^3} - \frac{1}{\rho}\right]\sin\rho - \frac{3}{\rho^2}\cos\rho$
$n_2(\rho)$	$-\frac{3}{\rho^2}\sin\rho - \left[\frac{3}{\rho^3} - \frac{1}{\rho}\right]\cos\rho$
$h_2^{(1)}(\rho)$	$(j/\rho)e^{j\rho}\left(1 + \frac{3j}{\rho} - \frac{3}{\rho^2}\right)$
$h_2^{(2)}(\rho)$	$-(j/\rho)e^{-j\rho}\left(1 - \frac{3j}{\rho} - \frac{3}{\rho^2}\right)$

وباستخدام المعادلتين (15-56) و (15-66) يمكننا حساب المجالات المتجهة المرافقة لقيم ψ_{lm} للموجات TE ، في حين يمكن استخدام المعادلتين (15-67) و (15-68) للموجات TM . الاختيار الاسهل والمهم لقيم ψ هو ψ_{10} والذي يمثل بالصيغة الآتية :

$$\psi_{10} = \frac{1}{\kappa r} e^{j\kappa r}\left[1 + \frac{j}{\kappa r}\right]\cos\theta. \qquad (15\text{-}83)$$

ان انحدار ψ_{10} يكون :

$$\mathbf{grad}\,\psi_{10} = \mathbf{a}_r e^{j\kappa r}\left[\frac{j}{r} - \frac{2}{\kappa r^2} - \frac{2j}{\kappa^2 r^3}\right]\cos\theta - \mathbf{a}_\theta e^{j\kappa r}\left[\frac{1}{\kappa r^2} + \frac{j}{\kappa^2 r^3}\right]\sin\theta. \qquad (15\text{-}84)$$

الجزء الموضعي للمجال الكهربائي هو :

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{r} \times \mathbf{grad}\,\psi_{10} = -\mathbf{a}_\phi E_0 e^{j\kappa r}\left[\frac{1}{\kappa r} + \frac{j}{\kappa^2 r^2}\right]\sin\theta, \qquad (15\text{-}85)$$

حيث أدخل E_0 لجعل أبعاد المعادلة صحيحة . يعطى الاعتماد الموضعي للحث المغناطيسي بالمعادلة الآتية :

$$\mathbf{B}_s = -j\frac{1}{\omega}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{E}_s = j\frac{1}{\omega}E_0 e^{j\kappa r}\left[\frac{1}{\kappa r^2} + \frac{j}{\kappa^2 r^3}\right]2\cos\theta\,\mathbf{a}_r$$
$$-j\frac{1}{\omega}E_0 e^{j\kappa r}\left[\frac{j}{r} - \frac{1}{\kappa r^2} - \frac{j}{\kappa^2 r^3}\right]\sin\theta\,\mathbf{a}_\theta. \qquad (15\text{-}86)$$

كما سنرى لاحقاً ، تمثل المعادلات (15-85) و (15-86) المجالات الناشئة عن ثنائي قطب مغناطيسي مشع . ومن المهم ملاحظة ان أجزاء $\mathbf{E}_s$ و $\mathbf{B}_s$ التي تعتمد على $1/r$ تكون فقط الاجزاء المساهمة في صافي الاشعاع الناشيء . وتعطي كافة الحدود الاخرى حدوداً في متجه بوينتنك وتتناقص أسرع من تضاؤل الكمية $1/r^2$. ولهذه الحدود تكاملات متلاشية حول السطوح الكروية عندما تمتد أنصاف أقطارها الى مالانهاية . ان حلول الموجات الكروية تكون ذات أهمية خاصة في دراسة الاشعاع المنبعث من المصادر المحددة ، والتي سوف تناقش في البند التالي .

15-8 معادلة الموجة (مع أخذ مصدر نشوء الموجة بالاعتبار)
The wave equation with sources

لقد عولجت مسائل الموجات المستوية والكروية في البنود السابقة بدون التساؤل عن كيفية منشأ هذه الموجات . والآن سندرس مسائل توزيع الشحنة $\rho\ (\mathbf{r}, t)$ وتوزيع التيار $\mathbf{J}\ (\mathbf{r}, t)$ ، وايجاد المجال الناشيء عنها . هناك عدة طرق لدراسة هذه المسألة ، وتعدّ دراسة الجهد الكهربائي أفضل تلك الطرق ، وهذه الطريقة مماثلة لتلك المتسخدمة في مسائل الكهربائية الاستاتيكية والمغناطيسية الاستاتيكية . بما ان تباعد الحث المغناطيسي يساوي صفراً ، فانه يُمَثل دائماً بالتفاف متجه الجهد ، حيث

$$\mathbf{B} = \text{curl}\ \mathbf{A}. \qquad (15\text{-}87)$$

باستخدام صيغة $\mathbf{B}$ المعطاة بالمعادلة (14-15) ، نحصل على

$$\text{curl}\ \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\,\text{curl}\ \mathbf{A} = 0 \qquad (15\text{-}88)$$

بفرض استمرارية المجالات يمكننا استبدال التفاضلات الموضعية والزمنية ببعضها ، وعند ذلك نحصل على الصيغة الآتية :

$$\text{curl}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0 \qquad (15\text{-}89)$$

بما ان التفاف المتجه $(\mathbf{E} + \partial \mathbf{A}/\partial t)$ يساوي صفراً ، فان من الممكن كتابة هذا المتجه ليمثل انحداراً لكمية لااتجاهية . أي :

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\ \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad (15\text{-}90)$$

تعطي المعادلتان (15-87) و (15-90) المجالات الكهربائية والمغناطيسية بدلالة الجهد المتجه $\mathbf{A}$ والجهد اللامتجه ϕ وان هذه الجهود ($\mathbf{A}$ و ϕ) تحقق معادلات الموجة التي تشبه الى حد كبير تلك التي حققتها المجالات . بتعويض الصيغ المتمثلة بالمعادلات (15-87) و (15-90) لقيم $\mathbf{B}$ و $\mathbf{E}$ في المعادلة (13-15) يمكننا اشتقاق معادلة الموجة للجهد المتجه $\mathbf{A}$ ، والتي تكون :

$$\frac{1}{\mu_0}\,\text{curl curl}\ \mathbf{A} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\text{grad}\ \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) + \mathbf{J} \qquad (15\text{-}91)$$

وبالتعويض عن (**curl curl**) بالكمية ($\text{grad div} - \nabla^2$) ، وبضرب المعادلة في μ ، نجد :

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \text{grad div } \mathbf{A} + \epsilon\mu \,\text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \mathbf{J}. \qquad (15\text{-}92)$$

لحد الآن ، حققنا فقط التفاف المتجه **A** ، وان أختيار تباعد المتجه **A** مازال كيفياً . من الملاحظ باستغلال شرط لورنتز «Lorentz condition» الآتي :

$$\text{div } \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \qquad (15\text{-}93)$$

وتعويضه في المعادلة (15-92) ، ان المعادلة الناتجة تكون في غاية البساطة . وبتحقق هذا الشرط ، فان المتجه **A** سيحقق معادلة الموجة الآتية :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}. \qquad (15\text{-}94)$$

بالاضافة لذلك ، بتعويض المعادلة (15-90) في المعادلة (15-15) نحصل على :

$$-\epsilon \left[\text{div grad } \varphi + \text{div} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = \rho. \qquad (15\text{-}95)$$

وباستبدال مرتبة التباعد والتفاضل الزمني المؤثرين على المتجه **A** ، وباستعمال شرط لورنتز (المعادلة 15-93) نحصل على

$$\nabla^2 \varphi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon} \rho. \qquad (15\text{-}96)$$

وباستغلال شرط لورنتز ، فإن كل من الجهد المتجه والجهد اللامتجه سيجبر على تحقيق معادلات تفاضلية غير متجانسة «inhomogeneous» ذات صيغ متشابهة .

مشكلة إيجاد الحل العام للمعادلة الموجية غير المتجهة وغير المتجانسة مماثلة بالضبط لايجاد الحل العام لمعادلة بويزون . في المعادلة الأخيرة ، يتكون الحل العام من حل خاص للمعادلة غير المتجانسة مضافاً اليه الحل العام للمعادلة المتجانسة . تضمن لنا حلول المعادلات المتجانسة وسيلة لتحقيق شروطاً حدودية كيفية ملائمة ، في حين يضمن الحل الخاص تحقيق الدالة الكلية للمعادلة غير المتجانسة . بالضبط ، فإن هذه الاعتبارات نفسها تطبق للمعادلة الموجية غير المتجانسة ــ فالحل العام لها يشمل على الحل الخاص مضافاً اليه الحل العام للمعادلة المتجانسة . سبق وان وجدنا طرقاً لايجاد حلول معينة للمعادلة المتجانسة . وقد توسعت هذه الطرق

لتصبح ملائمة لايجاد حلول لمعظم المسائل الممكن حلها . وتوجد طرق تقريبية أخرى لحل المسائل التي يتعذر حلها بدلالة الدوال المعروفة . بقي أن نجد الحل الخاص المطلوب للمعادلة غير المتجانسة .

يمكننا ايجاد حل المعادلة الموجية اللامتجهة واللامتجانسة

$$\nabla^2\varphi - \epsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \tag{15-96}$$

بسهولة من خلال إيجاد الحل لشحنة نقطية ، ومن ثم جمعها لكل عناصر الشحنة $\rho\Delta v$ في التوزيع الشحني المناسب . الموقع المناسب للشحنة النقطية هو نقطة الأصل للاحداثيات ، وهكذا فإن المعادلة :

$$\nabla^2\varphi - \epsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{15-97}$$

يجب ان تتحقق لكافة المواقع عدا نقطة الأصل ، حيث يجب أن تتحقق المعادلة الآتية لحجم صغير Δv محيط بنقطة الأصل :

$$\int_{\Delta v} dv\left[\nabla^2\varphi - \epsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right] = -\frac{1}{\epsilon}q(t) \tag{15-98}$$

ومن واقع التوزيع المنتظم للشحنة فإن الاعتماد الموضعي لقيمة ϕ يجب أن يكون على r فقط . وباستغلال هذه الملاحظة ، سنجري محاولة لحل المعادلة (15-97) . بما ان ϕ لاتعتمد على كل من الاحداثي السمتي والاحداثي الزوالي. تصبح المعادلة (15-97) بالصيغة الآتية :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{15-99}$$

والآن بوضع

$$\varphi(r, t) = \frac{\chi(r, t)}{r}, \tag{15-100}$$

تتحول المعادلة (15-99) الى

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0. \tag{15-101}$$

هذه المعادلة هي معادلة موجة ذات بعد واحد ، والتي يتمثل حلها بدلالة أي دالة للمقدار $r + t/\sqrt{\epsilon\mu}$. أو $r - t/\sqrt{\epsilon\mu}$, . لإثبات ذلك ، اجعل :

$$u = r - t/\sqrt{\epsilon\mu}$$

واجعل f(u) يمثل أية دالة للكمية u . وبأخذ تفاضل هذه الدالة مرتين نجد :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{df}{du}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{d^2 f}{du^2}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{d^2 f}{du^2} \tag{15-102}$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{df}{du}\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon\mu}\frac{d^2 f}{du^2} \tag{15-103}$$

تعويض نتائج المعادلات (15-102) و(15-103) في المعادلة (15-101) يثبت بأن أي دالة للمقدار $(r - t/\sqrt{\epsilon\mu})$ الممكن تفاضلها مرتين هي حل للمعادلة (15-101) . وان حسابات مماثلة تثبت بأن أي دالة للمقدار $(r + t/\sqrt{\epsilon\mu})$ تمثل حلاً آخر وبهذا فإن :

$$\chi = f(r - t/\sqrt{\epsilon\mu}) + g(r + t/\sqrt{\epsilon\mu}) \tag{15-104}$$

يمثل حلاً كيفياً للمعادلة (15-101) . وقد وجد ان الدالة $g(r + t/\sqrt{\epsilon\mu})$ لاتؤدي الى حلول مهمة فيزياوياً لمعادلة الموجة . ولهذا السبب سوف تسقط من المعادلة (15-104) ، ليبقى الحد الأول فقط . ومن ناحية ثانية فإن هذه الاجراءات الرياضية تبسط المعادلات الناتجة ولاتسبب إهمال أي نتائج فيزياوية خاصة أو إغفالها .

يصبح في المتناول الآن ايجاد حل متناظر كروياً للمعادلة (15-97) هو :

$$\varphi = \frac{f(r - t/\sqrt{\epsilon\mu})}{r}, \tag{15-105}$$

علاوة على ذلك ، فإن هذا الحل يحتوي على دالة كيفية يمكن احتبارها بحيث تحقق المعادلة (15-98) أيضاً . يؤخذ الاختيار المناسب بملاحظة أن الجهد الكهربائي المنسجم مع المعادلات (15-97) و (15-98) لشحنة مستقرة هو :

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon r} \tag{15-106}$$

ومن الممكن جعل الدوال (15-105) و (15-106) متوافقة باختيار

$$f(r - t/\sqrt{\epsilon\mu}) = \frac{q(t - r\sqrt{\epsilon\mu})}{4\pi\epsilon}. \tag{15-107}$$

وبهذا فإن حل المعادلات (15-97) و (15-98) يصبح :

$$\varphi(r, t) = \frac{q(t - r\sqrt{\epsilon\mu})}{4\pi\epsilon r}. \tag{15-108}$$

وبهذه النتيجة ، وجدنا بيسر أن المعادلة (15-96) قد تحققت بالمعادلة :

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_V \frac{\rho[\mathbf{r}', t - \sqrt{\epsilon\mu}\,|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,dv', \tag{15-109}$$

والتي يطلق عليها بالجهد المعوق اللامتجه «retarded scaler potential“ .

يمكننا اتخاذ الطريقة السابقة نفسها لايجاد حل المعادلة (15-94) . يُحلل المتجهان **A** و **j** الى المركبات المتعامدة أولاً . المعادلات الثلاث الناتجة مناظرة تقريباً الى المعادلة (15-96) . فمعادلة المركبة x مثلاً تكون :

$$\nabla^2 A_x - \epsilon\mu\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu J_x. \tag{15-110}$$

ويمكن حل كل من هذه المعادلات (معادلات المركبات) بطريقة حل المعادلة نفسها (15-96) ، فنحصل مثلاً على الآتي :

$$A_x(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{J_x(\mathbf{r}', t - \sqrt{\epsilon\mu}\,|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,dv'. \tag{15-111}$$

وبتوحيد هذه المركبات ، نجد :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \sqrt{\epsilon\mu}\,|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,dv', \tag{15-112}$$

والتي تمثل الجهد المعوق المتجه ، “retarded vector potential” .

التفسير الفيزياوي للجهود الكهربائية المعوقة ذو أهمية كبيرة . والمعادلات (15-109) و (15-112) توضح أن في نقطة معينة **r** وفي زمن معين t فإن الجهود الكهربائية الناتجة عن وجود الشحنة والتيار في مناطق أخرى من الفضاء

المحيط في زمن سابق للزمن t . الزمن المناسب لكل نقطة مصدر يكون سابقاً للزمن t بمقدار يساوي الزمن اللازم للانتقال من المصدر الى نقطة المجال r وبسرعة $1/\sqrt{\epsilon\mu}$. ومثال على ذلك ، لو أن شحنة نقطية q موجودة في نقطة أصل الاحداثيات قد تغيرت فجأة ، فإن تأثير هذا التغير لا يمكن تحسسه على بعد r إلا بعد انقضاء فترة زمنية مقدارها $r\sqrt{\epsilon\mu}$ بعد انتهاء التغير . ينتشر التأثير الناتج عن هذا التأخير الى الخارج كجبهة موجة كروية تقريباً . (الوضع الحقيقي لهذه الحالة نوعاً ما اكثر تعقيداً لأن كثافة الشحنة وكثافة التيار يرتبطان إرتباطاً وثيقاً بموجب العلاقة :

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0 \quad)$$

وبعد إيجاد الجهد الكهربائي المتجه والجهد اللامتجه ، يمكننا إيجاد المجالات باستخدام انحدار الجهد اللامتجه ومشتقة الزمن والتفاف المتجه **A** . وهذه العمليات الرياضية يمكن ايجادها من حيث المبدأ بشكل مباشر ، ولكن عملياً ستكون الحالة معقدة نسبياً .

وبتقدم فهمنا للجهود الكهربائية المعوقة فإن المتطلبات الأساسية لدراسة الاشعاع تعد مكتملة . والمتبقي هو استخدام هذه المادة العلمية في حلول المسائل العملية ، والتي ستكون محور الفصلين القادمين : الفصل السادس عشر : يشمل دراسة مسائل القيم الحدودية والاشعاع الناتج من توزيع شحني وتوزيع تياري ، في حين يتخصص الفصل السابع عشر لدراسة الاشعاع الناتج عن الشحنات النقطية المتحركة .

مسائل

15-1 متسعة ذات لوحين متوازيين ، لوحاها عبارة عن صفيحتين دائريتين ، مُلِيء الفراغ بين لوحيها بلوح عازل ذي سماحية قدرها ϵ . العازل من النوع غير التام وذو توصيلية قدرها g . وسعة المتسعة C . شحنت المتسعة الى ان أصبح فرق الجهد بين طرفيها ΔU ، ومن ثم عزلت عن مصدر الشحن . (أ) أوجد شحنة المتسعة دالة للزمن . (ب) أوجد تيار الازاحة في العازل . (جـ) اوجد المجال المغناطيسي في العازل .

15-2 تعرف الكمية Q لوسط عازل بنسبة كثافة تيار الإزاحة الى كثافة تيار التوصيل . وتؤول هذه الكمية في حالة إنتشار موجة احادية الطول الموجي الى الآتي :

$$Q = \omega\epsilon/g.$$

اوجد Q للزجاج وللكبريت عند الترددات الآتية :

$$f = 1,\ 10^6,\ 10^9 \text{ cycles/sec.}$$

15-3 معادلة موجة ذات بعد واحد معطاة بالصيغة الآتية :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2},$$

حيث E يمثل مقدار متجه المجال الكهربائي . افرض أن المتجه **E** ذو اتجاه ثابت وبالتحديد ، باتجاه الاحداثي y . بإبدال المتغيرات وفق العلاقتين :

$$\xi = t + \sqrt{\epsilon\mu}\, z,$$
$$\eta = t - \sqrt{\epsilon\mu}\, z,$$

وضح أن معادلة الموجة تتخذ صيغة سهلة التكامل . كامل هذه المعادلة الجديدة لتحصل على :

$$E(z, t) = E_1(\xi) + E_2(\eta),$$

حيث أن E_1 و E_2 هما دالتان كيفيتان .

15-4 موجة مستوية أحادية الطول الموجي تنتقل في وسط عازل خطي ومتجانس ومتساوي الاتجاه . وضح أن المتوسط الزمني لكثافتي الطاقة الكهربائية والمغناطيسية ، W_E و W_M ، متساويان .

15-5 موجة كهرومغناطيسية معطاة وفق العلاقة

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_0 \cos \omega(\sqrt{\epsilon\mu}\, z - t) + \mathbf{j}E_0 \sin \omega(\sqrt{\epsilon\mu}\, z - t),$$

حيث E_0 يمثل مقداراً ثابتاً . أوجد المجال المغناطيسي المناظر ، ومن ثم أوجد متجه بوينتينك .

15-6 سلك معدني مستقيم ذو توصيلية قدرها g ومساحة مقطع A يحمل تياراً مستمراً قدره I . اوجد اتجاه متجه بوينتينك ومقداره عند سطح السلك . كامل المركبة العمودية لمتجه بوينتينك حول سطح السلك لقطعة منه ذات طول قدره L . وقارن النتيجة التي حصلت عليها مع حرارة جول الناتجة في تلك القطعة .

15-7 تستلم الارض طاقة اشعاعية من الشمس تقدر بحوالي $1300\,\text{watt/m}^2$. أفرض أن الطاقة المستلمة تكون بشكل موجة مستوية مستقطبة أحادية الطول الموجي ، وأفرض ان سقوطها عمودي ، أحسب مقدار متجهي المجال الكهربائي والمجال المغناطيسي لضوء الشمس .

15-18 *ابدأ من صيغة القوة لوحدة الحجم لمنطقة فضاء طليق يحتوي على شحنات وتيارات :

$$\mathbf{F}_v = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B},$$

وباستخدام معادلات ماكسويل والمتطابقة الاتجاهية المتمثلة بالمعادلة (14-24) ، أثبت ان :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_v = & -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \epsilon_0\mathbf{E}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} - \frac{1}{2}\epsilon_0\,\mathbf{grad}\,(E^2) \\ & + \epsilon_0(\mathbf{E}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{grad}\,(B^2) \\ & + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{B}.\end{aligned}$$

(غالباً مايطلق على الكمية $\epsilon_0\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ اسم كثافة زخم المجال الكهرومغناطيسي) .

15-9 موجة مستوية مميزة بـ E_x ، B_y تنتشر بالاتجاه الموجب للاحداثي z .

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(z - ct).$$

وضح ان من الممكن عدّ الجهد اللامتجه ϕ مساوياً للصفر ، ومن ثم أوجد الجهد المتجه المحتمل A ، وتأكد من تحقق صحة شرط لورنتز .

15-10 * الكميتان (x, y, z, jct) و $(A_x, A_y, A_z, j\varphi/c)$ تمثلان متجهين رباعي الابعاد . وضح ان الحدود المعطاة بالصيغة :

$$F_{ij} \equiv \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}$$

تمثل مركبات **B** و **E** (j/c) . اضافة الى ذلك وضح ان

$$\sum_i \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_i} = 0$$

و

$$\frac{\partial F_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k} = 0$$

تمثل معادلات ماكسويل في الفراغ .

15-11 وضح لفضاء طليق حيث تكون $\rho = 0$ و $\mathbf{J} = 0$ أن من الممكن اشتقاق معادلات ماكسويل من دالة متجه منفردة **A** والتي تحقق

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \qquad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0.$$

15-12 في وسط ماتكون $\rho = 0$ ، $\mathbf{J} = 0$ ، $\mu = \mu_0$ في حين يكون الاستقطاب **P** معطى بدالة للموقع وللزمن $\mathbf{P} = \mathbf{P}(x, y, z, t)$. وضح بأن من الممكن اشتقاق معادلات ماكسويل من دالة متجه منفردة **Z** (متجه هرتز) . حيث تحقق Z المعادلات :

$$\nabla^2 \mathbf{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0},$$

و

$$\mathbf{E} = \operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{Z} - \frac{1}{\epsilon_0}\mathbf{P}, \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\operatorname{curl}\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}.$$

15-13 في وسط ما تكون $\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$, $\epsilon = \epsilon_0$ ، في حين يكون التمغنط معطى بالدالة $\mathbf{M}(x, y, z, t)$. وضح بأن من الممكن اشتقاق معادلات ماكسويل من دالة متجه منفردة **Y** ، حيث تحقق **Y** المعادلات :

$$\nabla^2 \mathbf{Y} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{M}$$

و

$$\mathbf{B} = \mathbf{curl\ curl\ Y}, \qquad \mathbf{E} = -\mathbf{curl}\ \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t}\cdot$$

15-14 . وضح بأنه يمكن تحقيق معادلة ماكسويل لوسط خالي الشحنة وغير موصل ومتجانس ومتساوي الاتجاه بأخذ اما :

$$(1)\ \mathbf{E} = \text{real part of } \mathbf{curl\ curl}\ (F\mathbf{a}),$$
$$\mathbf{B} = \text{real part of } \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{curl}\ (F\mathbf{a}),$$

أو

$$(2)\ \mathbf{B} = \text{real part of } \mathbf{curl\ curl}\ (F\mathbf{a}),$$
$$\mathbf{E} = \text{real part of } -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{curl}\ (F\mathbf{a}),$$

حيث **a** يمثل وحدة متجه ثابت و F يحقق معادلة موجة لا متجهة .

الفصل السادس عشر

تطبيقات معادلات ماكسويل
APPLICATIONS OF MAXWELL'S EQUATIONS

سوف نستخدم حلول معادلات ماكسويل المستخرجة في الفصل السابق لحل مسائل ذات أهمية عملية ، وسوف ندرس صنفين عامين من المسائل : مسائل القيم الحدودية ، والاشعاع الناتج من توزيع شحنة ـ تيار . في الصنف الأول من المسائل ، ادمجت حلول المعادلة الموجية المتجانسة لكي تحقق شروط الحدود الملائمة الصنف الثاني يتطلب معرفة حلول المعادلات الموجية غير المتجانسة ، وقد احتوت على مصادر معينة كما اهملت شروط الحدود بشكل عام ، ماعدا بعض الحالات التي تتضمن موجات خارجة وتلك الحالات التي تقل فيها المجالات مع هبوط قيمة $\frac{1}{r}$ عند المسافات الكبيرة

وهناك صنف ثالث من المسائل يصف توزيع شحنة ـ تيار الذي يولد مجالاً اشعاعياً بشرط أن يحقق شروطاً حدودية معينة . وعلى الرغم من الاهمية العملية لهذه الشروط سنتجنب عرضها هنا ، اذ تكفينا الصعوبات التي سنجابهها في حلول المسائل الأكثر سهولة التي اشرنا اليها توا

16-1 الشروط الحدودية Boundary conditions

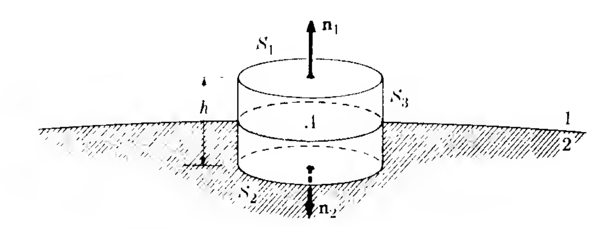
تستخرج الشروط الحدودية التي يجب أن تحققها المجالات الكهربائية والمغناطيسية عند السطح البيني الفاصل بين وسطين من معادلات ماكسويل ، كما

في الحالة الستاتيكية بالضبط . الشرط الحدودي المباشر والعام الذي يطبق على الحث المغناطيسي . **B** ويحقق معادلة ماكسويل هو :

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{16-1}$$

قد يفترض سطح يشبه علبة عند أي سطح يفصل بين وسطين وكما مبين في الشكل (1-16) . وبتطبيق نظرية التباعد على تباعد المتجه **B** حول الحجم المحدد بهذا السطح نجد :

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, da = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1\, da + \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2\, da + \int_{S_3} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_3\, da = 0. \tag{16-2}$$



الشكل **16-1** سطح يشبه العلبة عند السطح الفاصل بين وسطين ، وقد يستخدم لايجاد شروط الحدود لمتجهات المجال .

اذا فرضنا أن B محدد ، وجعلنا h تقترب من الصفر فإن دلك يسبب تلاشي الحد الاخير ويجعل السحط S_1 يقترب من S_2 هندسياً . وبأخذ الاتجاهات المتعاكسة للمتجهين $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ بنظر الاعتبار ، وباستنتاج مباشر نجد :

$$B_{1n} = B_{2n}, \tag{16-3}$$

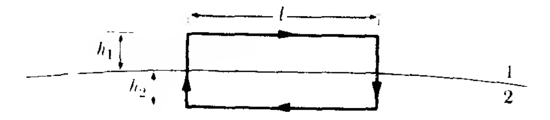
كما في الحالة الستاتيكية بالضبط .

كما ويمكن معالجة المركبة المماسية للمجال الكهربائي بطريقة مشابهة بسيطة ، وهنا ايضاً نجد أن المعادلة الأساسية لذلك تمثل إحدى معادلات ماكسويل وهي :

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \tag{16-4}$$

إن تكامل هذه المعادلة حول سطح محدد بمسار مستطيل الشكل كما هو موضح في الشكل (2-16) ينتج :

$$\int_S \mathbf{curl\ E} \cdot \mathbf{n}\, da = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}\, da, \qquad (16\text{-}5)$$



الشكل **2-16** مسار مستطيل الشكل عند السطح الفاصل بين وسطين قد يستخدم لايجاد شروط الحدود لمتجهات المجال .

وبتطبيق نظرية ستوك «Stoke's theorem» على الطرف الايسر نحصل على :

$$lE_{1t} - lE_{2t} + h_1E_{1n} + h_2E_{2n} - h_1E'_{1n} - h_2E'_{2n} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}\, da. \qquad (16\text{-}6)$$

فاذا انكمشت الحلقة بجعل كل من h_1 و h_2 تقترب من الصفر ، فسوف تتلاشى الحدود الاربعة الاخيرة من الطرف الايسر ، كما سيتلاشى الطرف الايمن كذلك شريطة ان تكون الكمية $\partial \mathbf{B}/\partial t$ محددة . وباسقاط العامل المشترك l من المعادلة الناتجة نحصل على :

$$E_{1t} = E_{2t}. \qquad (16\text{-}7)$$

لهذا فإن المركبة المماسية لشدة المجال الكهربائي **E** يجب ان تكون متواصلة (مستمرة) عبر الحد البيني الفاصل .

إن الشرط الحدودي للمركبة العمودية للازاحة الكهربائية يكون أكثر تعقيداً ، ومع ذلك ، فانه يشتق من احدى معادلات ماكسويل أيضاً ، وان المعادلة الملائمة لهذه الحالة هي :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \qquad (16\text{-}8)$$

واذا فرضنا مرة أخرى حجماً بشكل العلبة كما مبين في الشكل (1-16) ، وأجرينا تكامل المعادلة (8-16) حول هذا الحجم ، نجد

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D}\, dv = \int_V \rho\, dv.$$

وبتطبيق نظرية التباعد ، وبجعل h تقترب من الصفر ، نحصل على

$$(D_{1n} - D_{2n})A = \sigma A, \qquad (16\text{–}9)$$

حيث تمثل σ الكثافة السطحية للشحنة على السطح الفاصل . وحقيقة ان الكثافة السطحية للشحنة لا تساوي صفراً على الاغلب تظهر بعض التقيدات في هذا الشرط الحدودي . ومع ذلك ، اذا لاحظنا ان الشحنة يجب ان تكون محفوظة ، أي

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \qquad (16\text{–}10)$$

فيمكننا اجراء بعض التبسيطات المعينة . وبتكامل هذه المعادلة على غرار تكامل المعادلة (8-16) ، وبأنكماش حجم العلبة بالطريقة السابقة نفسها ، نجد :

$$J_{1n} - J_{2n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}. \qquad (16\text{–}11)$$

لو فرض اشعاع أحادي الطول الموجي فقط ، فينبغي ان تتغير الكثافة السطحية للشحنة كتغير $e^{-j\omega t}$ ، وبهذا فإن الحد الايمن من المعادلة (11-6) يمكن كتابته بصيغة $j\omega\sigma$. واستخدام العلاقات الاساسية : $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E},\ \mathbf{J} = g\mathbf{E}$

يضع المعادلات (9-16) و (11-16) بالصيغ الآتية :

$$\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \sigma, \qquad (16\text{–}12)$$

$$g_1 E_{1n} - g_2 E_{2n} = j\omega\sigma. \qquad (16\text{–}13)$$

ويمكن ملاحظة عدد من الحالات المهمة من الناحية العملية . فاذا كانت σ تساوي صفراً لنتج :

$$\frac{\epsilon_1}{g_1} = \frac{\epsilon_2}{g_2}.$$

وهذه النتيجة يمكن ان تتحقق اذا كان اختيار المواد ملائماً ، أو اذا كانت :

$$g_1 = g_2 = 0, \text{ or } \infty.$$

إن الحالة التي تكون فيها قيمة كلتا التوصيليتين مالانهاية ليست لها أهمية تذكر ، في حين تتحقق تقريباً الحالة التي تتلاشى فيها قيم كلتا التوصلين النوعيين وذلك عند الحدود بين مادتين عازلتين جيدتين . فاذا كانت σ لا تساوي صفراً (والتي ربما تكون الحالة الاكثر شيوعاً) لأمكن حذفها من المعادلتين (12-16) و (13-16) . ونتيجة هذا الحذف تكون :

$$\left(\epsilon_1 - \frac{g_1}{j\omega}\right) E_{1n} - \left(\epsilon_2 - \frac{g_2}{j\omega}\right) E_{2n} = 0. \qquad (16\text{-}14)$$

المعادلة (14-16) مفيدة لأنها تزودنا بشرط حدودي . ومع ذلك ، أحياناً توضع المعادلة (14-16) بصيغة تستخرج من الضرب بالمقدار $\omega^2\mu_1\mu_2,$ وهي :

$$\mu_2\gamma_1^2 E_{1n} - \mu_1\gamma_2^2 E_{2n} = 0, \qquad (16\text{-}15)$$

حيث γ يمثل ثابت الانتشار ويعطى بالصيغة الآتية :

$$\gamma^2 = \omega^2\epsilon\mu + j\omega g\mu, \qquad (16\text{-}16)$$

كما في المعادلة (47-15) . وهناك حالة مهمة أخيرة يمكن أن تحدث عندما تكون احدى التوصيلين النوعيين .ولتكن g_2 ، تساوي مالانهاية . ففي هذه الحالة يجب ان تتلاشى E_{2n} ، كما يجب على E_{1n} ان تساوي σ/ϵ_1 لاجل ان تتحقق المعادلتين (13-16) و (12-16) .

إن الشرط الحدودي الاخير هو ذلك الشرط الذي يُفرض على المركبة المماسية لشدة المجال المغناطيسي **H** . ونحصل على هذا الشرط بأخذ التكامل لمعادلة ماكسويل

$$\mathbf{curl\ H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \qquad (16\text{-}17)$$

حول المساحة المحددة بمسار مغلق كالموضحة في الشكل (2-16) . فاذا انجز هذا التكامل وافترض حدوث انكماش في المسار كما أشرنا سابقاً ، فان الشرط الحدودي الناتج يكون :

$$H_{1t} - H_{2t} = j_{s\perp}, \qquad (16\text{-}18)$$

حيث يمثل $j_{s\perp}$ مركبة كثافة التيار السطحية العمودية على اتجاه مركبة **H** المناظرة .

وفكرة الكثافة السطحية للتيار مشابهة تقريباً الى تلك للكثافة السطحية للشحنة ـ أي انها تمثل تياراً كهربائياً محدوداً سارياً في طبقة رقيقة جداً . كما إن الكثافة السطحية للتيار تساوي صفراً مالم يكن التوصيل النوعي مساوياً مالانهاية ، وهكذا لتوصيل نوعي ذو قيمة محدودة فإن :

$$H_{1t} = H_{2t}. \qquad (16\text{-}19)$$

والمعادلة (16-19) تعني ، مالم يكن التوصيل النوعي لأحد الوسطين يساوي مالانهاية ، أن المركبة المماسية لشدة المجال المغناطيسي **H** تكون متصلة (مستمرة) . فإذا كان التوصيل النوعي للوسط الثاني يساوي مالانهاية ، وكما وضحنا سابقاً ، فإن :

$$E_{2n} = 0.$$

ويمكننا ايجاد نتيجة اكثر شمولية بفرض تطبيق معادلة ماكسويل (16-17) للوسط الثاني :

$$\mathbf{curl\ H}_2 - \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t} = \mathbf{J}_2. \qquad (16\text{-}20)$$

وباستخدام العلاقات الأساسية وبفرض ان E_2 تتغير مع الزمن وفق $e^{-j\omega t}$ ، ينتج :

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{g_2 - j\omega\epsilon_2}\,\mathbf{curl\ H}_2. \qquad (16\text{-}21)$$

واذا فرضنا ان $\mathbf{H}_2$ محددة وقابلة للتفاضل في الوقت ذاته ، فإن المعادلة (16-21) تضمن أن E_2 تساوي صفراً للوسط الذي يكون توصيله النوعي لا نهائياً . وبأخذ الافتراضات نفسها المعتمدة في أعلاه ينتج :

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{j\omega\mu_2}\,\mathbf{curl\ E}_2, \qquad (16\text{-}22)$$

إن تلاشي $\mathbf{E}_2$ يضمن كذلك تلاشي $\mathbf{H}_2$. فإذا تلاشت $\mathbf{H}_2$ ، فإن الشرط الحدودي للمركبة المماسية لشدة المجال المغناطيسي $\mathbf{H}$ عند حد بيني فاصل الذي يكون عنده التوصيل النوعي لأحد الوسطين مساوياً مالانهاية يكون :

$$H_{1t} = j_{s\perp}. \qquad (16\text{-}23)$$

لقد أوجدنا الشروط الحدودية اللازمة لحل المسائل التي ستدرس في هذا الفصل ، وإن هذه الشروط مدرجة في الجدول (1-16) لقيم $g = 0,$ و $g = \infty$ ، ولقيمة كيفية اخرى لتكون مرجعاً ملائماً عند الحاجة .

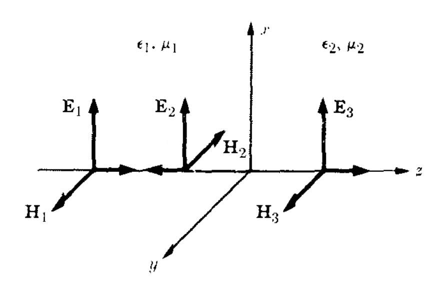
الجدول 1-16
الشروط الحدودية

g	E_t	D_n	H_t	B_n
$g_1 = g_2 = 0$	$E_{1t} = E_{2t}$	$D_{1n} = D_{2n}$	$H_{1t} = H_{2t}$	$B_{1n} = B_{2n}$
$g_2 = \infty$	$E_{2t} = 0$	$D_{2n} = 0$	$H_{2t} = 0$	$B_{2n} = 0$
	$E_{1t} = 0$	$D_{1n} = \sigma$	$H_{1t} = j_{s\perp}$	$B_{1n} = 0$
g_1, g_2 arb. $\neq \infty$	$E_{1t} = E_{2t}$	$\left(\epsilon_1 - \frac{g_1}{j\omega}\right) E_{1n} = \left(\epsilon_2 - \frac{g_2}{j\omega}\right) E_{2n}$	$H_{1t} = H_{2t}$	$B_{1n} = B_{2n}$

2-16 الانعكاس والانكسار عند الحد الفاصل بين وسطين غير موصلين والسقوط العمودي :

Reflection and refraction at the boundary of two nonconducting media. Normal incidence

تم في البند السابق اشتقاق التطبيق البناء والمهم للشروط الحدودية ، حيث تم اشتقاق معاملات الانعكاس والنقل لموجات مستوية تسقط عمودياً على السطح البيني الفاصل بين وسطين عازلين . توصف هذه الوضعية بمساعدة الشكل . (3-16)



الشكل **3-16** . الانعكاس والنفوذ للسقوط العمودي للموجات

في هذا الشكل $\mathbf{E_1}$ و $\mathbf{H_1}$ توصفان الموجة الساقطة والمنتقلة في الاتجاه الموجب للاحداثي z و $\mathbf{E_2}$ و $\mathbf{H_2}$ توصفان الموجة المنعكسة والمنتقلة في الإتجاه السالب للاحداثي z و $\mathbf{E_3}$ و $\mathbf{H_3}$ توصفان الموجة النافذة . لنأخذ السطح البيني الفاصل منطبقاً على المستوى ـ xy عند القيمة z تساوي صفراً ، حيث يكون الوسط الأول على اليسار والوسط الثاني على يمين هذا المستوي . توصف المجالات الكهربائية المستقطبة "polarized" بأتجاه الاحداثي x بالمعادلات الآتية :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{i}E_{10}e^{j(\kappa_1 z-\omega t)}, \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{i}E_{20}e^{-j(\kappa_1 z+\omega t)}, \\ \mathbf{E}_3 &= \mathbf{i}E_{30}e^{j(\kappa_2 z-\omega t)}, \end{aligned} \tag{16-24}$$

حيث أن

$$\kappa_1 = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1} \qquad \text{و} \qquad \kappa_2 = \omega\sqrt{\epsilon_2\mu_2} \tag{16-25}$$

(لاحظ المعادلات 39-15) . وتحسب المجالات المغناطيسية المناظرة للمجالات الكهربائية في اعلاه من معادلة ماكسويل :

$$\textbf{curl E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{16-26}$$

للمجالات الكهربائية من النوع المبين في المعادلة (24-16) ، فإن المعادلة (26-16) تصبح مكافئة الى الصيغة الآتية :

$$\mathbf{j}\frac{\partial E_x}{\partial z} = j\omega\mu\mathbf{H} = j\omega\mu H_y\mathbf{j}; \tag{16-27}$$

وبهذا فإن المجالات المغناطيسية التي تكون مترافقة مع المجالات الكهربائية المعطاة في أعلاه في المعادلة (16-24) ، هي :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \mathbf{j}\sqrt{\epsilon_1/\mu_1}\, E_{1,0}e^{j(\kappa_1 z-\omega t)}, \\ \mathbf{H}_2 &= -\,\mathbf{j}\sqrt{\epsilon_1/\mu_1}\, E_{2,0}e^{-j(\kappa_1 z+\omega t)}, \\ \mathbf{H}_3 &= \mathbf{j}\sqrt{\epsilon_2/\mu_2}\, E_{3,0}e^{j(\kappa_2 z-\omega t)}. \end{aligned} \tag{16-28}$$

وفقاً للشروط الحدودية المبينة في الخط الأفقي الأول من الجدول (1-16) حيث أن التوصيل النوعي يساوي صفراً ، فإن المركبات المماسية للمجالات الكهربائية والمغناطيسية فقط هي التي ستؤخذ بنظر الاعتبار ، نظراً لتلاشي المركبات العمودية للمجالات . وبتطبيق هذه الشروط في حالة $z = 0$ نجد :

$$E_{1,0} + E_{2,0} = E_{3,0} \quad \text{و} \quad \sqrt{\epsilon_1/\mu_1}\,(E_{1,0} - E_{2,0}) = \sqrt{\epsilon_2/\mu_2}\, E_{3,0}. \tag{16-29}$$

وبحل هذه المعادلات لايجاد $E_{2,0}$ و $E_{3,0}$ ، نحصل على الآتي :

$$E_{2,0} = \frac{\sqrt{\epsilon_1/\mu_1} - \sqrt{\epsilon_2/\mu_2}}{\sqrt{\epsilon_1/\mu_1} + \sqrt{\epsilon_2/\mu_2}}\, E_{1,0}; \qquad E_{3,0} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1/\mu_1}}{\sqrt{\epsilon_1/\mu_1} + \sqrt{\epsilon_2/\mu_2}}\, E_{1,0}. \tag{16-30}$$

المعادلة (16-30) تحدد المجالات الكهربائية للموجات المنعكسة والنافذة بدلالة الموجات الساقطة وكذلك بدلالة المعالم parameters الواصفة للوسط . وسعة هذه الموجات بدورها تحدد السعات للمجالات المغناطيسية من خلال المعادلات . (16-28)

ومن الأهمية بمكان تطبيق النتائج التي حصلنا عليها في أعلاه على حالة المواد الشفافة ضوئياً . ولهذه المواد تكون μ مساوية تقريباً الى μ_0، وعليه فإن معامل الانكسار يمثل أساساً بالمعادلة الآتية :

$$n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}.$$

وبأخذ :

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0,$$

يمكننا التعبير عن المعادلة (30-16) بدلالة n بالصيغة الآتية :

$$\frac{E_{2,0}}{E_{1,0}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}; \qquad \frac{E_{3,0}}{E_{1,0}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}. \qquad (16\text{–}31)$$

إن شدة الموجة المنعكسة تتناسب مع متجه بوينتيك المنعكس ، وإن شدة الموجة النافذة تتناسب مع متجه بوينتيك النافذ . ويعرف معامل النقل «tronsmission coefficient» T_n ومعامل الانعكاس « reflection coefficient» R_n بالصيغتين الآتيتين :

$$R_n = \frac{\overline{\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2}}{\overline{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1}} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2, \qquad (16\text{–}32)$$

حيث يدل الخط المتصل فوق متجه بوينتيك على وجوب أخذ معدل الكمية لعدة دورات من الزمن ، وبالمثل فإن :

$$T_n = \frac{\overline{\mathbf{E}_3 \times \mathbf{H}_3}}{\overline{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1}} = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2}\right)^2. \qquad (16\text{–}33)$$

ولسطح بينيمثالي فاصل بين هواء وزجاج ، حيث $n_2 = 1.5$ و $n_1 = 1$ ، فإن معاملا النقل والانعكاس يكونان :

$$R_n = 0.04 \qquad \text{و} \qquad T_n = 0.96.$$

وبهذا ، كما هو متوقع ، فإن جميع الطاقة الساقطة إما أن تنعكس أو تنفذ ، أذ لا يوجد مكان لخزن الطاقة في السطح البيني الفاصل .

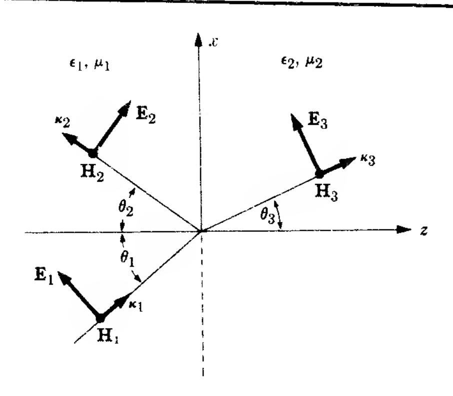
وحقيقية مهمة إضافية يمكن إيجادها من ملاحظة المعادلة (31-16) ، وبالتحديد ، لو كانت n_1 أكبر من n_2 فإن النسبة الأولى من المعادلة (31-16) تكون موجبة . وهذا مايمثل نصاً مألوفاً في البصريات وهو أنه لا يوجد تغير في الطور عند الانعكاس من الوسط الأقل كثافة ، في حين يوجد تغير في الطور مقداره π من الزوايا النصف قطرية عند الانعكاس من الوسط الأكثر كثافة .

16-3 * الانعكاس والانكسار عند الحد الفاصل بين وسطين غير موصلين والسقوط المائل

Reflection and refraction at the boundary of two nonconducting media. Oblique incidence.

هنالك حالة اكثر شمولية من التي نوقشت في البند السابق ألا وهي إنعكاس الموجاتَ المستوية الساقطة بصورة مائلة على سطحٍ بينيٍ مستوٍ عازلٍ . إن دراسة هذه الحالة تقودنا الى ثلاثة قوانين ضوئية معروفة جيداً : قانون سنيل «Snell's law» وقانون الانعكاس وقانون بروستر «Brewster's law» الذي يحدد استقطاب الضوء بواسطة الانعكاس .

الوضعية العامة لهذا الموضوع توصف بدلالة الشكل (4-16) . ولقد فرض أن متجهات الانتشار κ_1 و κ_2 و κ_3 تقع في مستوٍ واحدٍ هو xz ، وذلك لتسهيل الاشتقاقات اللاحقة . بالاضافة الى ذلك ، لقد فرضت متجهات المجال الكهربائي $\mathbf{E}_1$ و $\mathbf{E}_2$ و $\mathbf{E}_3$ بانها تقع في هذا المستوي أيضاً * . تعطى المجالات الكهربائية للموجات الساقطة والمنعكسة والنافذة بالصيغ الآتية :



الشكل 4-16. الانعكاس والانكسار ـ السقوط المائل . المستوي xz هو مستوي السقوط . إتجاه المتجهات $\mathbf{H}_1$ و $\mathbf{H}_3$ بالاتجاه الخارج من مستوي الورقة و $\mathbf{H}_2$ بالاتجاه الداخل لمستوي الورقة .

* من الممكن إثبات أن متجهات الانتشار تكون دائماً متحدة المستوي . وأن متجه المجال الكهربائي بشكل عام يمكن تحليله الى مركبة في المستوي xz (مستوي السقوط) ومركبة عمودية على هذا المستوي . ويعين انعكاس ونفوذية هاتين المركبتين بقوانين مختلفة . لقد تم الاختيار في أعلاه لغرض إيجاد قانون بروستر ، وترك الأشتقاق للحالة التي يكون فيها المجال الكهربائي عمودياً على مستوي السقوط كتمرين .

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{1,0} e^{j(\kappa_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$
$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2,0} e^{j(\kappa_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \qquad (16\text{–}34)$$
$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_{3,0} e^{j(\kappa_3 \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

حيث

$$\mathbf{E}_{1,0} = E_{1,0}(\mathbf{i} \cos \theta_1 - \mathbf{k} \sin \theta_1),$$
$$\mathbf{E}_{2,0} = E_{2,0}(\mathbf{i} \cos \theta_2 + \mathbf{k} \sin \theta_2), \qquad (16\text{–}35)$$
$$\mathbf{E}_{3,0} = E_{3,0}(\mathbf{i} \cos \theta_3 - \mathbf{k} \sin \theta_3),$$

و

$$\kappa_1 = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1}\,(\mathbf{i} \sin \theta_1 + \mathbf{k} \cos \theta_1),$$
$$\kappa_2 = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1}\,(\mathbf{i} \sin \theta_2 - \mathbf{k} \cos \theta_2), \qquad (16\text{–}36)$$
$$\kappa_3 = \omega\sqrt{\epsilon_2\mu_2}\,(\mathbf{i} \sin \theta_3 + \mathbf{k} \cos \theta_3).$$

وكما في حالة السقوط العمودي للموجة ، يمكن ايجاد شدة المجال المغناطيسي لكل موجة من معادلة ماكسويل الآتية :

$$\text{curl}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = +j\omega\mu\mathbf{H}. \qquad (16\text{–}37)$$

يمكن تقييم الالتفاف الظاهر في المعادلة (37–16) من تعريف الالتفاف ومن الصيغ الصريحة للمجالات الكهربائية وكما معطاة في المعادلات (34–16) و (35–16) و (36–16) . ومع ذلك ، فان التفاف المتجهات ذات الصيغة العامة المعطاة بالمعادلات (34–16) يحدث بشكل متكرر الى درجة تجعل من الملائم اشتقاق صيغة عامة لها . فاذا كان $\mathbf{A}$ دالة متجه كيفي ، فان :

$$\text{curl}\,(\mathbf{A}e^{j\kappa \cdot \mathbf{r}}) = e^{j\kappa \cdot \mathbf{r}}\,\text{curl}\,\mathbf{A} + \text{grad}\,(e^{j\kappa \cdot \mathbf{r}}) \times \mathbf{A}. \qquad (16\text{–}38)$$

ولكن

$$\text{grad}\, e^{j\kappa \cdot \mathbf{r}} = j\kappa e^{j\kappa \cdot \mathbf{r}}; \qquad (16\text{–}39)$$

لذا ،

$$\text{curl}\,\mathbf{A}e^{j\kappa \cdot \mathbf{r}} = e^{j\kappa \cdot \mathbf{r}}\,\text{curl}\,\mathbf{A} + j\kappa \times \mathbf{A}e^{j\kappa \cdot \mathbf{r}}. \qquad (16\text{–}40)$$

وباستخدام هذه المتطابقة مع المعادلة (37-16) ، وبملاحظة أن كلاً من المتجهات في المعادلة (35-16) ثابت ، نجد :

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\boldsymbol{\kappa}_1 \times \mathbf{E}_{1,0}}{\omega\mu_1} e^{j(\boldsymbol{\kappa}_1\cdot\mathbf{r}-\omega t)},$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{\boldsymbol{\kappa}_2 \times \mathbf{E}_{2,0}}{\omega\mu_1} e^{j(\boldsymbol{\kappa}_2\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \qquad (16\text{–}41)$$

$$\mathbf{H}_3 = \frac{\boldsymbol{\kappa}_3 \times \mathbf{E}_{3,0}}{\omega\mu_2} e^{j(\boldsymbol{\kappa}_3\cdot\mathbf{r}-\omega t)}.$$

بعد ايجاد هذه الصيغ الرياضية للموجات سوف نعرج الى الشروط الحدودية عند السطح البيني الفاصل عند $z = 0$.

لكي يتحقق الشرط الحدودي الاول ، ندرس المركبة المماسية (مركبة ـ x) للمجال الكهربائي عند $z = 0$. ان استمرارية مركبة المجال الكهربائي هذه تعطي (طالما كانت $\kappa_1 = \kappa_2$) العلاقة الآتية :

$$E_{1,0} \cos\theta_1 e^{j(\kappa_1 x \sin\theta_1-\omega t)} + E_{2,0} \cos\theta_2 e^{j(\kappa_1 x \sin\theta_2-\omega t)}$$
$$= E_{3,0} \cos\theta_3 e^{j(\kappa_3 x \sin\theta_3-\omega t)}. \qquad (16\text{–}42)$$

وبحذف العامل المشترك $e^{-j\omega t}$ من كافة الحدود الثلاثة تصبح المعادلة بالصيغة الآتية :

$$E_{1,0} \cos\theta_1 e^{j\kappa_1 x \sin\theta_1} + E_{2,0} \cos\theta_2 e^{j\kappa_1 x \sin\theta_2} = E_{3,0} \cos\theta_3 e^{j\kappa_3 x \sin\theta_3}. \qquad (16\text{–}43)$$

بما ان كافة حدود المعادلة (43-16) تعتمد على x من خلال العامل الاسي ، فان الطريقة الوحيدة التي تجعل المعادلة (43-16) متحققة لكافة قيم x هي تساوي المعاملات الاسية لحدودها ، أي :

$$\kappa_1 x \sin\theta_1 = \kappa_1 x \sin\theta_2 = \kappa_3 x \sin\theta_3. \qquad (16\text{–}44)$$

ومن الممكن تجزئة هذه النتيجة الى معادلتين هما :

$$\sin\theta_1 = \sin\theta_2, \qquad \kappa_1 \sin\theta_1 = \kappa_3 \sin\theta_3. \qquad (16\text{–}45)$$

المعادلة الاولى من (45-16) ، تكافيء بوضوح العلاقة :

$$\theta_1 = \theta_2,$$

والتي تمثل صيغة قانون الانعكاس . وبما ان :

$$\kappa = \omega\sqrt{\epsilon\mu} \quad و \quad n = \sqrt{K_e K_m},$$

فان المعادلة الثانية من (16-45) يمكن كتابتها بالصيغة الآتية :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_3,$$

والتي تمثل قانون سنيل . وبهذا أوجدنا نتيجتين مهمتين وذلك بتطبيق شرط الحدود على المركبة المماسية للمجال الكهربائي . ومازالت هنالك معلومات اضافية يمكن استنتاجها من شرط الحدود هذا فبتعويض المعادلة (16-44) في المعادلة (16-43) ، وباختصار العوامل المشتركة ، نجد :

$$E_{1,0}\cos\theta_1 + E_{2,0}\cos\theta_1 = E_{3,0}\cos\theta_3. \qquad (16\text{-}46)$$

المعادلة (16-46) تمثل معادلة واحدة والتي ينبغي ان تتحقق بـ $E_{1,0}$ و $E_{2,0}$ و $E_{3,0}$. وبالاضافة الى ذلك ، هنالك شرطان آخران ، يمكن استخراجهما من استمرارية المركبة العمودية للازاحة الكهربائية واستمرارية المركبة المماسية للشدة المغناطيسية . ان استمرارية المركبة العمودية للازاحة الكهربائية تعطي :

$$-\epsilon_1 \sin\theta_1 E_{1,0} + \epsilon_1 \sin\theta_1 E_{2,0} = -\epsilon_2 \sin\theta_3 E_{3,0}, \qquad (16\text{-}47)$$

في حين تعطي استمرارية المركبة المماسية لشدة المجال المغناطيسي العلاقة :

$$\sqrt{\epsilon_1/\mu_1}\, E_{1,0} - \sqrt{\epsilon_1/\mu_1}\, E_{2,0} = \sqrt{\epsilon_2/\mu_2}\, E_{3,0}. \qquad (16\text{-}48)$$

والواقع ان هاتين المعادلتين متطابقتان ، ويمكن ملاحظة ذلك بكتابة المعادلة (16-47) بالصيغة الآتية :

$$-\sqrt{\epsilon_1/\mu_1}\sqrt{\epsilon_1\mu_1}\sin\theta_1 E_{1,0} + \sqrt{\epsilon_1/\mu_1}\sqrt{\epsilon_1\mu_1}\sin\theta_1 E_{2,0} = -\sqrt{\epsilon_2/\mu_2}\sqrt{\epsilon_2\mu_2}\sin\theta_3 E_{3,0}. \qquad (16\text{-}49)$$

وبما ان :

$$\sqrt{\epsilon_1\mu_1} = n_1\sqrt{\epsilon_0\mu_0},$$

فان قانون سنيل يجعل من الممكن اختصار المعادلة (16-49) الى الصيغة المبينة بالمعادلة (16-48) .

لايجاد $E_{2,0}$ و $E_{3,0}$ بدلالة $E_{1,0}$ ينبغي حل المعادلتين (16-46) و (16-47) الآن . وبسهولة يمكن انجاز ذلك ، النتيجة تكون :

$$\frac{E_{3,0}}{E_{1,0}} = \frac{2\epsilon_1 \sin\theta_1 \cos\theta_1}{\epsilon_2 \sin\theta_3 \cos\theta_1 + \epsilon_1 \sin\theta_1 \cos\theta_3} \tag{16-50}$$

للمجال الكهربائي النافذ . و

$$\frac{E_{2,0}}{E_{1,0}} = \frac{\epsilon_1 \sin\theta_1 \cos\theta_3 - \epsilon_2 \sin\theta_3 \cos\theta_1}{\epsilon_2 \sin\theta_3 \cos\theta_1 + \epsilon_1 \sin\theta_1 \cos\theta_3} \tag{16-51}$$

لمجال الموجة المنعكسة . ولمعظم المواد العازلة نجد أن :

$$\mu = \mu_0 \text{ ، } n^2 = \epsilon/\epsilon_0.$$

وبفرض ان تكون هذه هي الحالة ، وباستخدام قانون سنيل ، فان المعادلة (16-51) تصبح

$$\frac{E_{2,0}}{E_{1,0}} = \frac{\sin\theta_3 \cos\theta_3 - \sin\theta_1 \cos\theta_1}{\sin\theta_3 \cos\theta_3 + \sin\theta_1 \cos\theta_1}. \tag{16-52}$$

وباستخدام المتطابقان المثلثة :

$$\sin(\theta_1 + \theta_3)\cos(\theta_1 - \theta_3) = \sin\theta_1 \cos\theta_1 + \sin\theta_3 \cos\theta_3,$$

و

$$\sin(\theta_1 - \theta_3)\cos(\theta_1 + \theta_3) = \sin\theta_1 \cos\theta_1 - \sin\theta_3 \cos\theta_3,$$

فان المعادلة (16-52) تختصر الى الصيغة الآتية :

$$\frac{E_{2,0}}{E_{1,0}} = -\frac{\tan(\theta_1 - \theta_3)}{\tan(\theta_1 + \theta_3)}. \tag{16-53}$$

فاذا كانت $\theta_1 = \theta_3$ فان $\tan(\theta_1 - \theta_3) = 0$ ، وبهذا لاتوجد موجة منعكسة . ويمكن حدوث هذا فقط عندما تكون $n_1 = n_2$ ، وهذا يعني ، عندما يكون الوسطان غير متميزين ضوئياً . ومن وجهة نظر ثانية ، اذا كانت :

$$\theta_1 + \theta_3 = \pi/2,$$

فان

$$\tan(\theta_1 + \theta_3) = \infty$$

وان سعة الموجة المنعكسة تكون صفراً مرة أخرى . وفي هذه الحالة يمكن تمييز الوسطين ضوئياً . وبما أنه من الممكن تبيان ان الاستقطاب الآخر ، عندما يكون **E** عمودياً على مستوي الموجة الساقطة ، منعكس جزيئاً ، فان سقوط الضوء غير المستقطب بزاوية تحقق العلاقة :

$$\theta_1 + \theta_3 = \pi/2$$

سوف يستقطب بالانعكاس . وقانون سنيل :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_3,$$

يمنحنا وسيلة لايجاد قيمة θ_1 . وباستخدام العلاقة :

$$\theta_3 = \pi/2 - \theta_1$$

في قانون سنيل نحصل على :

$$n_1 \sin \theta_{1p} = n_2 \cos \theta_{1p},$$

أو

$$\tan \theta_{1p} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{16-54}$$

حيث تسمى الكمية θ_{1p} بزاوية بروستر ، وتسمى العلاقة التي تربط بين هذه الزاوية ومعاملات الانكسار (المعادلة 54-16) بقانون بروستر .

المعادلتان (50-16) و (51-16) تمثلان معادلتين من مجموعة معادلات تسمى بمعادلات فرنل «Fresnel equation» ، والتي بمجموعها توصف الانعكاس والانكسار للموجات الكهرومغناطيسية لكلا الاستقطابين المحتمل حدوثها عند مستوي السطح البيني العازل كهربائياً . ومن هذه المعادلات يمكننا ايجاد معاملا الانعكاس والنقل للقدرة وهما :

$$R = \frac{\overline{\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2}}{\overline{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1}} = \left(\frac{\epsilon_1 \sin \theta_1 \cos \theta_3 - \epsilon_2 \sin \theta_3 \cos \theta_1}{\epsilon_1 \sin \theta_1 \cos \theta_3 + \epsilon_2 \sin \theta_3 \cos \theta_1}\right)^2 \tag{16-55}$$

و

$$T = \frac{\overline{\mathbf{E}_3 \times \mathbf{H}_3}}{\overline{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1}} = \frac{\sqrt{\epsilon_2/\mu_2}}{\sqrt{\epsilon_1/\mu_1}}\left(\frac{2\epsilon_1 \sin\theta_1 \cos\theta_1}{\epsilon_1 \sin\theta_1 \cos\theta_3 + \epsilon_2 \sin\theta_3 \cos\theta_1}\right)^2 \quad (16\text{–}56)$$

لموجة استقطبت كما نوقش سابقاً . فاذا كانت الاوساط عازلة كهربائياً وذات $\mu = \mu_0$ ، وبالتالي $n^2 = \epsilon/\epsilon_0$، فان من الممكن وضع هاتين المعادلتين بالصيغتين الآتيتين :

$$R = \frac{\tan^2(\theta_1 - \theta_3)}{\tan^2(\theta_1 + \theta_3)} \quad (16\text{–}57)$$

و

$$T = \frac{4 \sin\theta_3 \cos^2\theta_1 \sin\theta_1}{\sin^2(\theta_1 + \theta_3)\cos^2(\theta_1 - \theta_3)}, \quad (16\text{–}58)$$

وهاتان الصيغتان تمثلان نسبة كل من شدة الموجة المنعكسة والموجة النافذة الى شدة الموجة الساقطة على الترتيب . ويبدو من المعادلتين كما هو واضح ، عدم تضمنها معاملات الانكسار ، ومع ذلك ، يجب التذكير ان θ_1 و θ_3 ترتبطان بعلاقة من خلال قانون سنيل .

16-4 الانعكاس من مستوٍ موصل والسقوط العمودي
Reflection from a conducting plane. Normal incidence.

سندرس الآن الانعكاس والانفاذية لموجات مستوية ساقطة عمودياً على مستوي سطح بيني فاصل بين مادة موصلة وأخرى غير موصلة . توصف هذه الوضعية بشكل جوهري وفق الشكل (16-3) ، مع اضافة صفة جديدة للوسط الثاني وهي أن التوصيل النوعي للوسط الثاني g_2 لايساوي صفراً . تمثل الحالات الكهربائية والمغناطيسية $\mathbf{E}_1$ و$\mathbf{H}_1$ و $\mathbf{E}_2$ و $\mathbf{H}_2$ بالصيغ المتمثلة بالمعادلات (16-24) و (16-28) . وهي بالتحديد :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{i}E_{1,0}e^{j(\kappa_1 z - \omega t)}, & \mathbf{H}_1 &= \mathbf{j}\sqrt{\epsilon_1/\mu_1}\, E_{1,0}e^{j(\kappa_1 z - \omega t)}, \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{i}E_{2,0}e^{-j(\kappa_1 z + \omega t)}, & \mathbf{H}_2 &= -\mathbf{j}\sqrt{\epsilon_1/\mu_1}\, E_{2,0}e^{-j(\kappa_1 z + \omega t)} \end{aligned} \quad (16\text{–}59)$$

الصيغة الرياضية للموجة في الوسط الموصل تكون كالآتي :

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{i}E_{3,0}e^{j(\gamma_2 z-\omega t)}, \qquad \mathbf{H}_3 = \mathbf{j}\,\frac{\gamma_2 E_{3,0}}{\omega\mu_2}\,e^{j(\gamma_2 z-\omega t)}. \qquad (16\text{-}60)$$

حيث γ_2 وكما معرفة بالمعادلة (15-48) تساوي :

$$\gamma_2 = \alpha_2 + j\beta_2 = \sqrt{\omega^2\epsilon_2\mu_2 + j\omega g_2\mu_2}, \qquad (16\text{-}61)$$

أما الفا وبيتا فتعطيان بالصيغتين الآتيتين :

$$\alpha = \mp\omega\sqrt{\epsilon\mu}\left[\tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{1+(g^2/\omega^2\epsilon^2)}\right]^{1/2}, \qquad \beta = \frac{\omega g\mu}{2\alpha}. \qquad (16\text{-}62)$$

ومرة اخرى ، فإن شروط الحدود الملائمة هي استمرارية المركبات المماسية لشدة المجال الكهربائي $\mathbf{E}$ وشدة المجال المغناطيسي $\mathbf{H}$. النتائج هي :

$$E_{1,0} + E_{2,0} = E_{3,0} \qquad (16\text{-}63)$$

و

$$\sqrt{\epsilon_1/\mu_1}\,(E_{1,0} - E_{2,0}) = \frac{\gamma_2}{\omega\mu_2}E_{3,0}. \qquad (16\text{-}64)$$

بما أن γ_2 هي كمية مركبة ، فإن الكميتين $E_{2,0}$ و $E_{3,0}$ لا يمكن أن تكون كلتاهما حقيقيتين. وهذه الحقيقة تشير الى أنه من المحتمل أن يحدث انحراف في الطور يختلف عن الصفر و π للموجات المنعكسة والنافذة . والحل الاعتيادي للمعادلتين (16-63) و (16-64) يعطي الآتي :

$$E_{2,0} = \frac{1-(\gamma_2/\omega\mu_2)\sqrt{\mu_1/\epsilon_1}}{1+(\gamma_2/\omega\mu_2)\sqrt{\mu_1/\epsilon_1}}\,E_{1,0},$$

و

$$E_{3,0} = \frac{2}{1+(\gamma_2/\omega\mu_2)\sqrt{\mu_1/\epsilon_1}}\,E_{1,0}. \qquad (16\text{-}65)$$

ولهذا فإن التشابه الظاهر بين هذه المعادلات وتلك التي اشتقت في حالة العوازل يكون مربكاً ، إذ لمرة أخرى ، ينبغي ملاحظة أن γ_2 هو عدد مركب ولهذا يحدث انحرافات في الطور .

الحالة الخاصة لتوصيل نوعي لا نهائي هي حالة بسيطة ، في هذه الحالة تكون قيمة γ_2 مالا نهاية ، وبهذا فإن المعادلة (16-65) تختصر الى الآتي :

$$E_{2,0} = -E_{1,0}, \qquad E_{3,0} = 0, \qquad (g_2 = \infty) \tag{16-66}$$

حيث إن كل الطاقة الساقطة تنعكس ولا ينفذ شيئاً منها الى الموصل . الواقع ان الحالة العامة تكون مرهقة ومعقدة ، وعلى أية حال ، فإن التقريب التالي لحالة الموصلات الجيدة يكون نسبياً مباشراً وبنفس الوقت عملي التطبيق . لموصل جيد نلاحظ أن

$$\frac{g_2}{\omega\epsilon_2} \gg 1.$$

وفي هذه الحالة :

$$\alpha_2 = \sqrt{\omega g_2 \mu_2/2} \qquad \text{and} \qquad \beta = \sqrt{\omega g_2 \mu_2/2}. \tag{16-67}$$

ومن ثم فإن سعة المجال الكهربائي المنعكس تعطى بالمعادلة الآتية :

$$E_{2,0} = \frac{1 - \left(\frac{1+j}{\omega\mu_2}\right)\sqrt{\frac{\omega g_2\mu_2}{2}\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}}{1 + \left(\frac{1+j}{\omega\mu_2}\right)\sqrt{\frac{\omega g_2\mu_2}{2}\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}} E_{1,0} = \frac{1 - (1+j)\sqrt{\frac{\mu_1 g_2}{2\mu_2\epsilon_1\omega}}}{1 + (1+j)\sqrt{\frac{\mu_1 g_2}{2\mu_2\epsilon_1\omega}}} E_{1,0}. \tag{16-68}$$

واذا توفر لدينا بجانب المعادلة (16-68) ، الشرط الآتي :

$$g_2/\omega\epsilon_1 \gg 1,$$

لاصبح للجذرين التربيعيين في المعادلة (16-68) شأناً كبيراً في كل من البسط والمقام من الناحية الحسابية . وبقسمة البسط والمقام على (1 + j) مضروباً في الكمية الجذرية نحصل على :

$$E_{2,0} = -\frac{1 - \left(\frac{1-j}{2}\right)\sqrt{2\frac{\mu_2\omega\epsilon_1}{\mu_1 g_2}}}{1 + \left(\frac{1-j}{2}\right)\sqrt{2\frac{\mu_2\omega\epsilon_1}{\mu_1 g_2}}} E_{1,0}. \tag{16-69}$$

واذا إعتبرنا الكمية الجذرية مقداراً صغيراً فإن المعادلة (16-69) تصبح بالصيغة التقريبية الآتية :

$$E_{2,0} = -\left[1 - (1-j)\sqrt{2\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\omega\epsilon_1}{g_2}}\right] E_{1,0}. \tag{16-70}$$

وبالإمكان إيجاد معامل الانعكاس بمقارنة متجه بوينتنك المنعكس مع متجه بوينتنك الساقط . ولما كانت كلتا الموجتين الساقطة والمنعكسة تنتقلان في الوسط نفسه ، فإن ذلك يكافيء مقارنة مربع مقدار $(E_{2,0})$ الى مربع مقدار $(E_{1,0})$ ، لذا :

$$R = \frac{|E_{2,0}|^2}{|E_{1,0}|^2}. \qquad (16\text{–}71)$$

وباستخدام التقريب المعطى بالمعادلة (70–16) نحصل :

$$R = \left[1 - (1-j)\sqrt{\frac{2\mu_2\omega\epsilon_1}{\mu_1 g_2}}\right]\left[1 - (1+j)\sqrt{\frac{2\mu_2\omega\epsilon_1}{\mu_1 g_2}}\right] \qquad (16\text{–}72)$$

وبنفس التقريب المستخدم سابقاً ، نجد أن :

$$R = 1 - 2\sqrt{2(\mu_2/\mu_1)(\omega\epsilon_1/g_2)}. \qquad (16\text{–}73)$$

وبأخذ قيمة g_2 للنحاس وقدرها $g_2 = 5.6 \times 10^7$ mhos/m ، وبفرض $\mu_2 = \mu_1$ و $\epsilon_1 = \epsilon_0$ ، نجد قيمة R لتردد مقداره 10^{10}sec^{-1} (اي ما يعادل طول موجي مقداره 3 cm) ليكون R = 0.9997 . وفي حالة الترددات التي تقل عن تلك القيمة تكون الوضعية اكثر قرباً من حالة الإنعكاس التام . ان الانحراف في قيمة R عن الواحد يصبح ذا أهمية لمثل هذه الموصلات الجيدة كالنحاس والفضة والالمنيوم فقط في حالة الاشعاع الذي يكون طوله الموجي قصيراً جداً . ولما كان العمق القشري لهذه المواد صغيراً ، فإن من السهولة معرفة لماذا توفر الصفائح الرقيقة المصنوعة من موصلات جيدة موانع ممتازة للترددات الراديوية .

16–5 الانتشار بين الواح موصلة متوازية :
Propagation between parallel conducting plates

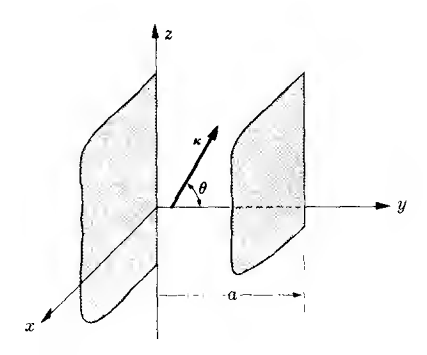
كبداية لدراسة دلائل الموجة "waveguides" ، سندرس الآن انتشار الموجات الكهرومغناطيسية في المنطقة المحصورة بين لوحين موصلين متوازيين . يبين الشكل (5–16) المنطقة المقصودة التي تنتشر فيها الموجة . بما أنه يتعذر التمييز بين اتجاهي x و z فيزيائياً ، فإن صفة الشمولية لن تضيع بأخذ تلك الموجات التي تقع

متجهاتها الموجية في المستوي yz فقط ـ وبالأخص ، تلك الموجات التي تصنع متجهاتها زاوية θ مع إتجاه الاحداثي y . هذه الموجات عند ارتطامها بالسطح الموصل التام عند البعد y = a فإنها تنعكس كموجات ذات متجهات انتشار تصنع زاوية θ مع الإتجاه السالب للاحداثي y . وعند انعكاس هذه الموجات للمرة الثانية عند السطح الواقع عند البعد y = 0 ، فإنها ستصبح مرة أخرى موجات من النوع الأول . وبهذا فإنه من الواضح امكانية وصف الانتشار بين لوحين مستويين موصلين متوازيين بدلالة العوامل الأسية الآتية :

$$e^{j[\kappa(y \cos \theta + z \sin \theta) - \omega t]}$$

و

$$e^{j[\kappa(-y \cos \theta + z \sin \theta) - \omega t]} \quad (16\text{–}74)$$



الشكل 5-16 . انتشار الموجة بين مستويين متوازيين تامي التوصيل .

لمثل هذه الموجات هنالك احتمالان للاستقطاب ، يمكن وصفها بقولنا إن المتجه **E** للاستقطاب الأول يكون موازياً للأحداثي x ، وللاستقطاب الآخر يكون المتجه **H** موازياً للأحداثي x . وهاتان الحالتان تعرفان بالاسمين TE (موجات كهربائية مستعرضة) و TM (موجات مغناطيسية مستعرضة) على الترتيب . وسوف نركز دراستنا على الموجات TE فقط في هذا البند ، في حين نترك معالجة الموجات TM كتمرين للقاريء .

في حالة الموجات TE ، فإن المجال الكهربائي في المنطقة المحصورة بين مستويين موصلين يعطى بالمعادلة الآتية :

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}\{E_1 e^{j[\kappa(y\cos\theta + z\sin\theta) - \omega t]} + E_2 e^{j[\kappa(-y\cos\theta + z\sin\theta) - \omega t]}\}. \quad (16\text{-}75)$$

وهذا المجال يجب أن يتلاشى عند $y = 0$ ، نظراً لتلاشي E_t عند الحدود لموصل تام . وان هذا الشرط يتحقق بوضوح لكافة قيم z و t . عندما تكون :

$$E_1 = -E_2 = E.$$

عندئذ تعطى $\mathbf{E}$ بالصيغة الآتية :

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E(e^{j\kappa y\cos\theta} - e^{-j\kappa y\cos\theta})e^{j(\kappa z\sin\theta - \omega t)}. \quad (16\text{-}76)$$

بالإضافة الى ذلك ، يجب تلاشي $\mathbf{E}$ عند $y = a$ لكافة قيم z و t . وهذا يتطلب توفير الشرط الآتي :

$$\kappa a\cos\theta = n\pi. \quad (16\text{-}77)$$

وبهذا نحصل على $\kappa = \omega/c$ لتردد معين قدره ω ، وتكون الزاوية التي تصنعها الموجات مع الاحداثي y ثابتة وفق المعادلة (16-77) . وبثبوت هذه الزاوية ، فإن السرعة الظاهرة بإتجاه z تكون :

$$v_p = c/\sin\theta,$$

والتي تكون دائماً أكبر من سرعة الضوء في الفضاء الطليق «free space». إن هذا التناقض الظاهر مع النظرية النسبية الخاصة سيناقش لاحقاً بتفصيل أدق .

من الملائم التعبير عن التغير بالمجال الكهربائي في الاتجاهات y و z بدلالة الأطوال الموجية . وهذه الأطوال الموجية هي :

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\kappa\sin\theta} = \frac{\lambda_0}{\sin\theta} \qquad \left(\lambda_0 = \frac{2\pi}{\kappa} = \frac{2\pi c}{\omega}\right) \quad (16\text{-}78)$$

بالنسبة للإتجاه ـ z . و

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\kappa\cos\theta} = \frac{\lambda_0}{\cos\theta} \quad (16\text{-}79)$$

بالنسبة للإتجاه ـ y . فبدلالة هذه الاطوال الموجية تصبح قيمة المجال الكهربائي المتمثل بالمعادلة (16-75) كالآتي*

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E' \sin \frac{2\pi y}{\lambda_c} e^{j[(2\pi z/\lambda_g) - \omega t]}, \tag{16-80}$$

في حين تأخذ المعادلة (16-77) الصيغة الآتية :

$$\frac{a}{\lambda_c} = \frac{n}{2}. \tag{16-81}$$

ومن المعادلتين (16-78) و (16-79) نستنتج مباشرة أن :

$$\frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{1}{\lambda_0^2}. \tag{16-82}$$

وبفرض $\lambda_c = 2a,$ ، والذي يطابق الفرض n = 1 في المعادلة (16-81) ، نجد أنه عند تزايد λ_0 ، أي عندما تقل ω ، سنصل الى حد معين حيث يجب أن يكون $1/\lambda_g^2$ مقداراً سالباً ، لكي تتحقق المعادلة (16-82) . ففي هذه الحالة يكون معامل z في المعادلة (16-80) مقداراً تخيلياً ، وبدلاً من أن يكون المقدار الأسي متذبذباً حسب قيمة z سيصبح مقداراً متضائلاً أسياً . لنشرح هذا بطريقة أخرى : بفرض أن $\lambda_0 > 2a$ فإن الموجة الكهرومغناطيسية سوف تتضاءل أسياً بإتجاه z بدلاً من انتشارها . فإذا أخذنا n تساوي 2 . فإن :

$$\lambda_c = 2a/2 = a$$

وإن أطول طول موجي للموجة المنتشرة يكون a . واضح الآن تفسير الرمز السفلي c ، الذي يعني « قطعاً » . طول موجة القطع «cutoff wavelength» هو أطول طول موجي يمكن أن ينتشر بمنوال «mode» معين (بقيمة n) .

إن السرعة v_p التي وجدت سابقاً ، تتجاوز دائماً سرعة الضوء ، والحقيقة إنها تصبح مالانهاية عندما يكون الطول الموجي في الفضاء الطليق مساوياً لـ λ_c أي عندما تكون $\theta = 0$. هذه السرعة هي سرعة الطور «phase velocity» ، والتي تعني ، سرعة نقطة ذات طور ثابت على الموجة . وبدون الإمعان في الجوانب النسبية للسؤال ، فإن هذا يمثل تناقضاً ظاهراً للفرضية التي توضح بأنه لا يمكن لإشارة أن تنتشر بسرعة أكبر من سرعة الضوء . وتحليل هذه المعضلة الظاهرة هو

* كتبت $E^{\sim}$ لتمثل المقدار **2jE** .

إن الطاقة تنتشر داخل دليل الموجة بسرعة أقل من سرعة الضوء ، وبالتحديد بسرعة يطلق عليها سرعة المجموعة «group velocity» . وبهذا فإن الاشارات تنتقل بسرعة المجموعة ، ولا تنتقل بسرعة الطور .

لايجاد سرعة إنتشار الطاقة ينبغي حساب كثافة الطاقة . إن حاصل ضرب كثافة الطاقة في سرعة المجموعة يمثل فيض الطاقة أو متجه بوينتك «Poynting vector» . ولهذا يمكننا إيجاد سرعة انتشار الطاقة بقسمة متجه بوينتك على كثافة الطاقة .

نحصل على الحث المغناطيسي **B** في دليل الموجة مباشرة من :

$$\mathbf{curl\,E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{16-83}$$

وباستخدام المعادلة (16-80) لشدة المجال الكهربائي **E** . وبفرض :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-j\omega t},$$

نجد :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}E'\frac{2\pi}{\omega\lambda_g}\sin\frac{2\pi y}{\lambda_c}e^{j[(2\pi z/\lambda_g)-\omega t]} + j\mathbf{k}E'\frac{2\pi}{\omega\lambda_g}\cos\frac{2\pi y}{\lambda_c}e^{j[(2\pi z/\lambda_g)-\omega t]} \tag{16-84}$$

كثافة الطاقة هي :

$$w = \tfrac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}), \tag{16-85}$$

في حين متجه بوينتك هو :

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}. \tag{16-86}$$

لقد استخدمت الصيغ المركبة لكل من **E** و **B** ، على أن يفترض ضمناً أخذ الأجزاء الحقيقية لكل من تلك الصيغ . وعند حساب w و **S** ينبغي أن تؤخذ الأجزاء الحقيقية وتضرب رياضياً مع بعضها . ولما كانت الكميات المستخدمة في حساب سرعة المجموعة هي المعدلات الزمنية للمعادلتين (16-85) و (16-86) ، فإن بالامكان استخدام إحدى نظريات التحليل العقدي لتحديد طريقة أخذ الاجزاء الحقيقية .

واذا كان :

$$g = g_0 e^{j\omega t}, \qquad \text{و} \qquad f = f_0 e^{j\omega t}$$

اذ قد تعتمد الكميتان f_0 و g_0 على متغيرات أُخرى ، ولكنها لاتعتمدان على الزمن ، فإن :

$$\overline{\operatorname{Re} f \operatorname{Re} g} = \tfrac{1}{2} \operatorname{Re} f^* g. \tag{16-87}$$

يرمز الخط المتصل فوق الطرف الايسر من المعادلة الى المتوسط الزمني للكمية . ولإثبات صحة هذه العلاقة رياضياً ، اجعل :

$$g_0 = \xi + j\eta \quad ، \quad f_0 = u + jv$$

وبهذا نحصل على :

$$\operatorname{Re} f \operatorname{Re} g = (u \cos \omega t - v \sin \omega t)(\xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t), \tag{16-88}$$

في حين ينتج أن :

$$\operatorname{Re} f^* g = u\xi + v\eta. \tag{16-89}$$

وبسهولة يمكن اثبات التكاملات الآتية :

$$\left.\begin{aligned} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t\, dt &= \tfrac{1}{2}, \\ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t\, dt &= \tfrac{1}{2}, \\ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t\, dt &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{16-90}$$

وباستخدام هذه التكاملات ، نجد المعدل الزمني للمعادلة (16-88) ويساوي

$$\overline{\operatorname{Re} f \operatorname{Re} g} = \tfrac{1}{2}(u\xi + v\eta). \tag{16-91}$$

وبمقارنة المعادلة (16-91) مع المعادلة (16-89) يمكن إثبات النظرية المتمثلة في المعادلة (16-87) .

إن المعدل الزمني لكثافة الطاقة يساوي :

$$\overline{w} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Re}\,[\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{H}] = \frac{1}{4}\,\mathrm{Re}\left[\epsilon_0 E'^*E' \sin^2\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\mu_0} E'^*E' \left(\frac{2\pi}{\omega\lambda_g}\right)^2 \sin^2\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right) + \frac{1}{\mu_0} E'^*E' \left(\frac{2\pi}{\omega\lambda_c}\right)^2 \cos^2\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right)\right]. \quad (16\text{–}92)$$

وبتكامل المعادلة (16-92) في اتجاه - y ، عبر دليل الموجة ، وباستبدال كل من الكميتين :

$\sin^2(2\pi y/\lambda_c)$ و $\cos^2(2\pi y/\lambda_c)$ بالمقدار $a/2$ ينتج

$$\int_0^a \overline{w}\,dy = \frac{1}{4}E'^*E'\,\frac{a}{2}\left[\epsilon_0 + \frac{1}{\mu_0}\,\frac{4\pi^2}{\omega^2}\left(\frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{4}E'^*E'\epsilon_0 a. \quad (16\text{–}93)$$

المعدل الزمي للمركبة - z لمتجه يوينتنك ، يساوي :

$$\overline{S}_z = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,E_x^* H_y$$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[E'^* \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right)\frac{1}{\mu_0}E'\,\frac{2\pi}{\omega\lambda_g}\sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right)\right] \quad (16\text{–}94)$$
$$= \frac{1}{2}E'^*E'\,\frac{2\pi}{\mu_0\omega\lambda_g}\sin^2\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right)$$

بتكامل هذه الصيغة من $y = 0$ الى $y = a$ ينتج المعدل الكلي للقدرة (لوحدة الطول بإتجاه x) المنتقلة عبر طول دليل الموجة ،

$$\int_0^a \overline{S}_z\,dy = \frac{1}{4}E'^*E'\,\frac{2\pi}{\mu_0\omega\lambda_g}\,a. \quad (16\text{–}95)$$

سرعة انتشار الطاقة تساوي حاصل قسمة المعادلة (16-95) على المعادلة (16-93) ، وبهذا :

$$v_g = \frac{2\pi}{\epsilon_0\mu_0\omega\lambda_g} = \frac{2\pi c^2}{\omega\lambda_g} = c\,\frac{\lambda_0}{\lambda_g}. \quad (16\text{–}96)$$

نلاحظ من المعادلة (16-78) أن λ_g إكبر من λ_0 ، ونظراً لأن $\omega\lambda_g/2\pi$ اكبر من c ، فإن المعادلة (16-96) ستوضح أن v_g أقل من c .

يمكن تعزيز فهمنا للفرق بين سرعة المجموعة v_g وسرعة الطور v_p بملاحظة ذلك من المعادلة (78-16) ، $\lambda_g = \lambda_0/\sin\theta$. وباستخدام هذه النتيجة في المعادلة (96-16) ، نجد :

$$v_g = c\sin\theta, \qquad (16\text{-}97)$$

ولقد وجدنا قبل قليل أن :

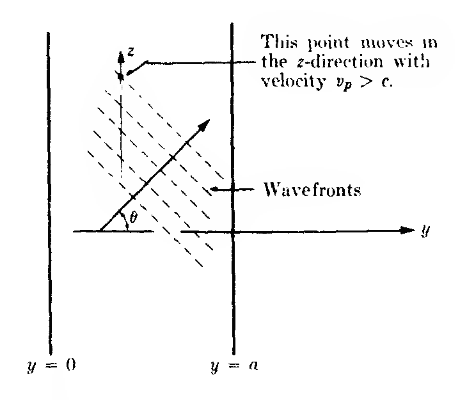
$$v_p = \frac{c}{\sin\theta}. \qquad (16\text{-}98)$$

وبسهولة يمكننا ايجاد :

$$v_g v_p = c^2, \qquad (16\text{-}99)$$

والتي تعدُّ صحيحة للانتشار في دليل الموجة . [لاحظ أن المعادلة (99-16) ليست بالضرورة يصح تطبيقها على أنواع أخرى لانتشار الموجة ، وبالتحديد ، إنها لا تطبق على موجات مستوية في أوساط غير انتشارية **nondispersive** حيث تكون سرعتا الضوء والمجموعة متماثلتين .] . نذكر ان θ تمثل الزاوية المحصورة بين اتجاه انتشار إحدى مركبات الموجة والاحداثي y ، ولتسهيل فهم الحالة لاحظ الشكل (6-16) ، الذي يبين مقطعاً في المستوي yz للمنطقة بين اللوحين الموصلين . تتحرك نقطة تقاطع جبهة الموجة مع الاحداثي z بسرعة v_p التي تساوي :

$$v_p = c/\sin\theta;$$



الشكل **6-16** . تفاصيل حركة جبهات الموجة خلال انتشار الموجة بين مستويين موصلين .

ومن ناحية أخرى فإن مركبة سرعة الضوء (c) بإتجاه الاحداثي z تكون :

$$c \sin \theta = v_g.$$

معظم النتائج المستحصلة لدليل الموجة البسيط ذي اللوحين المتوازيين تطبق على حالات اكثر تعقيداً . وبالتحديد ، دليل الموجة المستطيل الشكل الشائع الاستعمال له صفات مشابهة جداً لدليل الموجة البسيط . وفي البند القادم سندرس بعض الملامح العامة لأنواع أخرى من دلائل الموجة ، مع تركيز متميز لدليل الموجة المستطيل .

16-6 دلائل الموجة Waveguides

بينا في البند (4-15) بأن E و H يحققان معادلة الموجة في الفضاء الطليق ،

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad \nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \qquad (16\text{–}100)$$

ولموجات أحادية الطول الموجي وممثلة بالصيغة الآتية :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-j\omega t},$$

فإن هذه المعادلات تصبح :

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2\epsilon_0\mu_0 \mathbf{E} = 0, \qquad \nabla^2 \mathbf{H} + \omega^2\epsilon_0\mu_0 \mathbf{H} = 0. \qquad (16\text{–}101)$$

بالاضافة الى هذه المعادلات الموجية المتحققة ، فإن كلاً من E و H يجب أن تحقق معادلات ماكسويل ايضاً . وفي حالة انتشار الموجات الكهربائية المستعرضة (TE) بإتجاه z تكون المركبة E_z مساوية للصفر ، علاوة على ذلك ، فإن الموجات المنتشرة بالاتجاه z ستأخذ كميات المجال الخمس الباقية والتي جميعها تتناسب مع $e^{j2\pi z/\lambda_g}$. معادلات الالتفاف لماكسويل لهذه الحالة هي :

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} - j\mu_0\omega \mathbf{H} = 0:$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} - j\mu_0\omega H_z = 0, && \text{(a)}\\
&E_x = +\frac{\mu_0\omega\lambda_g}{2\pi} H_y, && \text{(b)}\\
&E_y = -\frac{\mu_0\omega\lambda_g}{2\pi} H_x. && \text{(c)}
\end{aligned}\right\} \quad (16\text{–}102)$$

$\textbf{curl H} + j\epsilon_0\omega\mathbf{E} = 0$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{2\pi j}{\lambda_g} H_y + j\epsilon_0\omega E_x &= 0, &\text{(a)}\\ \frac{2\pi j}{\lambda_g} H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} + j\epsilon_0\omega E_y &= 0, &\text{(b)}\\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 0. &\text{(c)}\end{aligned}\right\} \quad (16\text{–}103)$$

من الواضح أن المعادلة (16-103a) والمعادلة (16-102b) تدل على :

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \left(\frac{2\pi j}{\lambda_g} - j\,\frac{\epsilon_0\mu_0\omega^2\lambda_g}{2\pi}\right) H_y, \qquad (16\text{–}104)$$

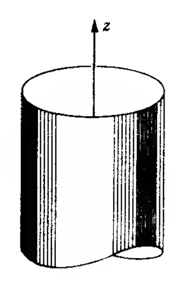
ولذلك ، فمن الممكن إيجاد H_y من خلال معرفة H_z . وبالمثل ، من المعادلتين (16-102c) و (16-103b) يمكن إيجاد H_x من H_z . وأخيراً ، نجد E_x و E_y ترتبطان بالكميتين H_y و H_x حسب العلاقتين (16-102b) و (16-102c) . وعلى هذا الأساس اذا عُرفت H_z ، فإن كافة مقادير المجال الأخرى يمكن إيجادها بأخذ المشتقة مباشرة . ان H_z يجب ان تحقق المعادلة (16-100) . لذلك ، اذا عُرف اعتماد الكمية $e^{j2\pi z/\lambda_g}$ على z ، لأصبح بالامكان كتابة الآتي :

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \left(\omega^2\epsilon_0\mu_0 - \frac{4\pi^2}{\lambda_g^2}\right) H_z = 0. \qquad (16\text{–}105)$$

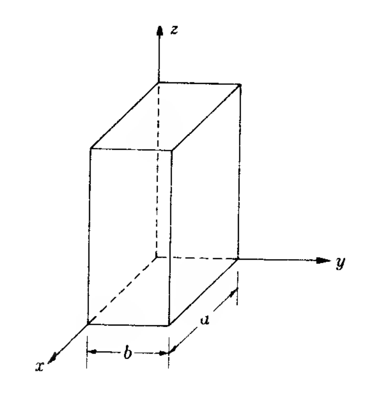
وكل ماتبقى هو معرفة شروط الحدود اللازم فرضها على حلول المعادلة (16-105) .

اذا توفر لدينا دليل موجة اسطواني الشكل ذو سطوح تامة التوصيل كما مبين في الشكل (16-7) ، فإن شروط الحدود الملائمة تكون : تلاشي المركبة الماسية لشدة المجال الكهربائي **E** والمركبة العمودية للحث المغناطيسي **B** عند السطح **S** . أما المركبة الماسية لشدة المجال المغناطيسي **H** والمركبة العمودية للإزاحة الكهربائية **D** فتؤخذان بشكل كيفي . وبفرض هذه الشروط نحصل على العلاقة الرياضية التي تربط بين λ_g, ω وابعاد دليل الموجة ، تماماً كما تفعل المعادلة (16-82) في حالة السطح المتوازي .

ولفهم الموضوع بشكل أفضل ، خذ دليل موجة متعامد الوجوه كما مبين في الشكل (16-8) . ويمكن عزل متغيرات المعادلة (16-105) بطريقة عزل المتغيرات المألوفة . يتألف الحل العام من مجموع حدود بالصيغة الآتية :



الشكل 16-7 . انتشار الموجة داخل اسطوانة موصلة .



الشكل 16-8 . دليل موجة مستطيل الشكل

$$H_z(x, y, z) = (A \cos \kappa_x x \cos \kappa_y y + B \cos \kappa_x x \sin \kappa_y y + C \sin \kappa_x x \cos \kappa_y y + D \sin \kappa_x x \sin \kappa_y y) e^{2\pi j z/\lambda_g}, \quad (16\text{–}106)$$

مع اعتبار :

$$-(\kappa_x^2 + \kappa_y^2) + [\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - (4\pi^2/\lambda_g^2)] = 0. \quad (16\text{–}107)$$

ومن هذه القيمة للكمية H_z ، نجد E_x :

$$E_x = -\frac{\mu_0 \omega \lambda_g}{2\pi} \left(\frac{2\pi j}{\lambda_g} - j \frac{\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \lambda_g}{2\pi} \right)^{-1} \frac{\partial H_z}{\partial y}. \quad (16\text{–}108)$$

اعتيادياً يغير التفاضل الجزئي كل $\cos \kappa_y y$ الى $\sin \kappa_y y$ ، وبالعكس . وبما أن E_x ينبغي ان تتلاشى عند $y = 0$ وعند $y = b$ ، لذلك ستبقى الحدود المشتملة على $\sin \kappa_y y$ في صيغة E_x وهذه الحدود يجب ان تتضمن $\kappa_y = n\pi/b$. وبهذا تبقى الحدود المتضمنة $\cos \kappa_y y$ فقط في المعادلة (106-16) . وبمناقشة مشابهة نبين أن الحدود التي ستبقى هي حدود $\cos \kappa_x x$ فقط ، وهذه الحدود يجب أن تتضمن $\kappa_x = m\pi/a$. الحلول المسموح بها لـ H_z والتي تحقق تلاشي المركبات المماسية لشدة المجال الكهربائي **E** عند الحدود تأخذ الصيغة الآتية :

$$H_z = A \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{2\pi j z/\lambda_g}. \qquad (16\text{–}109)$$

كل زوج من القيم المحتملة لـ m و n يطلق عليه اسم المنوال «mode» . يستخدم الرمز TE_{mn} للمنوال ذي الصيغة المتمثلة بالمعادلة (109-16) . و TE تعني الموجات الكهربائية المستعرضة ، و n و m يمثلان عدد أنصاف الموجات في كل من البعدين الضيق (n) والعريض (m) على الترتيب .

نعود الآن للمعادلة (107-16) ونستخدم :

$$\kappa_x = m\pi/a \quad \text{و} \quad \kappa_y = n\pi/b,$$

لنجد

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2, \qquad (16\text{–}110)$$

والتي تشير بوضوح في حالة ثبوت λ_0 ، فإن طول موجة الدليل ، ومن ثم سرعة الموجة المتمثل بالعلاقة ،

$$v_g = c\lambda_0/\lambda_g,$$

يعتمد على المنوال . ونلاحظ أيضاً ، أن هنالك اطوال موجية قصوى للانتشار بمناويل مختلفة . اذا كانت λ_0 كبيرة نسبياً ، فإن المقدار $(2\pi/\lambda_0)^2$ سيكون أصغر من المقدار $(n\pi/b)^2 + (m\pi/a)^2$ ، ففي هذه الحالة يصبح الطرف الأيمن من المعادلة (110-16) مقداراً سالباً ، وبالتالي فإن قيمة λ_g تكون تخيلية . وهذا يقودنا الى توهين «attenuation» الموجة عوضاً عن انتشارها .

موجهات الموجة المستطيلة الشكل ذات استخدام واسع في انتقال قدرة الموجة المايكروية ، واعتيادياً يتم اختيار حجم دليل الموجة بحيث ينتشر فيه المنوال TE_{10} فقط عند التردد المطلوب . الحجم الشائع لدليل موجة هو 0.4 in.×0.9 in. للابعاد الداخلية . وتحسب القيمة القصوى للطول الموجي الذي سوف ينتشر

بالمنوال TE_{10} بتعويض $m = 1$ و $n = 0$ و $a = 0.9\ in = 2.28\ cm$ و $b=0.4\ in=1.01 cm$ في المعادلة (110-16) . والنتيجة التي نحصل عليها هي : $\lambda_{0,max.} = 4.57\ cm$ وقد حسبت بتعويض $\lambda_g = \infty$. إن الاطوال الموجية التي يزيد طولها عن القيمة السابقة سوف لن تنتشر في الدليل ، في حين سوف تنتشر الاطوال الموجية الاقصر من تلك القيمة . والمنوال المصاحب لطول موجة القطع اللاحقة والاكثر قصراً هو TE_{11} أو TE_{20} معتمداً على أبعاد الموجة . اذا كانت $b < a/\sqrt{3}$ ، فإن طول موجة القطع للمنوال TE_{20} يكون أكبر منه للمنوال TE_{11} . إن حساب طول الموجة للمنوال TE_{20} سهلٌ للغاية ، حيث إنه يمثل نصف طول موجة القطع للمنوال TE_{10} ، أي 2.28 cm . العيوب في صناعة دلائل (أو موجهات) الموجة ، والفقدان العالي عند الطول الموجي المقارب من طول موجة القطع للمنوال TE_{10} تجعل من الضروري تحديد نطاق TE_{10} لموجهات الموجة التجارية الصنع بالحدود العملية وهي : من 2.42 cm الى 4.35 cm .

16-7 التجاويف الرنانة Cavity resonators

يعد التجويف الرنان نوع آخر من الاجهزة قريبة العلاقة بدلائل الموجة وذات اهمية عملية مدهشة . تظهر التجاويف الرنانة الصفات المثالية للدوائر الكهربائية الرنينية ، ولهذا يمكنها خزن طاقة في المجالات الكهربائية والمغناطيسية المتذبذبة . علاوة على ذلك ، فإن التجاويف الرنانة العملية تبدد جزءاً من الطاقة المخزونة في كل دورة من دورات التذبذب . من وجهة النظر الاخيرة ، فإن التجاويف الرنانة تفوق اعتيادياً دوائر L–C المعروفة بعامل يقدر بحوالي عشرين ضعفاً ، وهذا يعني ، أن جزء الطاقة المخزونة المبدد في دورة واحدة في التجويف الرنان يمثل حوالي 1/20 من الطاقة المبددة في دورة واحدة من دوائر L–C . وفائدة أخرى مضافة هي ان التجاويف الرنانة ذات الحجم العملي تمتلك ترددات رنينية يمتد مداها من بضعة مئات من ملايين الدورات فأكثر . ولهذا المدى من الترددات يستحيل بناء دوائر L–C إعتيادية .

ابسط انواع التجاويف الرنانة يكون بشكل متوازي مستطيلات ذي سطوح تامة التوصيل . شروط الحدود الملائمة ، لمثل هذا التجويف هي تلاشي المركبة الماسية لشدة المجال الكهربائي **E** والمركبة العمودية للحث المغناطيسي **B** عند الحدود ، وان تكون المركبتان الماسية لشدة المجال المغناطيسي **H** والعمودية

للازاحة الكهربائية **D** كيفيتين . والمجالات الكهربائية والمغناطيسية يجب أن تحقق معادلات الموجة (100-16) . وبالتالي ، فإن E_x يجب ان تحقق العلاقة :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = 0. \qquad (16\text{–}111)$$

فإن كان التجويف يتمثل بالمنطقة المحددة بالمستويات الستة $x = 0$ و $x = a$ و $y = 0$ و $y = b$ و $z = 0$ و $z = d$ ، فإن E_x يجب ان تأخذ الصيغة :

$$E_x = E_1 f_1(x) \sin \kappa_y y \sin \kappa_z z e^{-j\omega t}, \qquad (16\text{–}112)$$

بحيث $\kappa_y = m\pi/b$ و $\kappa_z = n\pi/d$ لكي تتلاشى E_x عند $y = 0$ و $z = 0$ و $y = b$ و $z = d$. بالاضافة الى ذلك ، فإن E_x وحدها لا يمكن أن تمثل حلاً إلا إذا كانت $f_1(x)$ تساوي مقداراً ثابتاً ، وذلك لوجوب تلاشي **divE** لكي تحقق إحدى معادلات ماكسويل . وفي حالة المركبتين E_y و E_z فإن الوضعة تكون مشابهة لتلك في حالة E_x ، والحلول تأخذ الصيغ الآتية :

$$\begin{aligned} E_y &= E_2 \sin \kappa_x x \, f_2(y) \sin \kappa_z z \, e^{-j\omega t}, \\ E_z &= E_3 \sin \kappa_x x \sin \kappa_y y \, f_3(z) e^{-j\omega t}, \end{aligned} \qquad (16\text{–}113)$$

حيث κ_y و κ_z كما عُرفتا في المعادلة (112-16) و $\kappa_x = l\pi/a$. فإذا تلاشت قيمة تباعد المتجه **E** ، يجب أن تتحقق المعادلة :

$$\left(E_1 \frac{df_1}{dx} \sin \kappa_y y \sin \kappa_z z + E_2 \sin \kappa_x x \frac{df_2}{dy} \sin \kappa_z z + E_3 \sin \kappa_x x \sin \kappa_y y \frac{df_3}{dz}\right) e^{-j\omega t} = 0 \qquad (16\text{–}114)$$

ويتم هذا التحقق إذا كان :

$$f_1 = \cos \kappa_x x, \quad \text{و} \quad f_2 = \cos \kappa_y y, \quad \text{و} \quad f_3 = \cos \kappa_z z,$$

وكذلك

$$\kappa_x E_1 + \kappa_y E_2 + \kappa_z E_3 = 0, \qquad (16\text{–}115)$$

وهذه المعادلة تمثل بالضبط الشرط اللازم لكي يكون المتجه κ عمودياً على شدة المجال الكهربائي **E** . لنعود الى معادلة الموجة ، إنه من الجلي أن الترددات الرنانة للتحويف تعطى بالصيغ الآتية :

$$\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0, \qquad (16\text{–}116)$$

أو

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{d^2} - \frac{4f^2}{c^2} = 0. \qquad (16\text{–}117)$$

وإن تصميم تجويف نموذجي من دليل موجة ذي ابعاد 0.4 in. × 0.9 in. يميز بالقيم $l = 1$ ، $m = 0$ ، $n = 2$ (يطلق عليه تجويف TE_{102}) . يستخرج التردد الرنان لمثل هذا التجويف بواسطة البعد المأخوذ على الاحداثي z ، اي d ، إن جوانباً كثيرة أخرى لمسائل التجويف الرنان متعامد الوجوه يمكن معالجتها بالتفصيل ، وقد تركت بعضها كتمارين للقارىء .

وقد تصمم أشكال اخرى من تجاويف رنانة ، ولكن التجاويف التي تكون بشكل الاسطوانة القائمة وبشكل متوازي الاضلاع هي التي يمكن تصنيعها بسهولة وجعلها تخضع لمعالجة رياضية دقيقة . وان المعالجات الرياضية للتجويف الاسطواني القائم تشتمل على دوال رياضية اكثر تعقيداً من دوال الجيوب والجيوب تمام ، خصوصاً دوال بسل . وتحقيق شروط الحدود يتطلب ايجاد الأصفار لهذه الدوال بالطريقة نفسها التي استخدمت لايجاد الأصفار لدوال الجيوب الداخلة في معادلات مسألة تجويف متوازي المستطيلات . وبدلاً من الدخول في المناقشة التفصيلية التي تنتج لهذه الحالة ، نشير الى القارىء المهتم بالموضوع بالرجوع الى كتاب "تكنيك قياسات الموجات الميكروية" لمؤلفه مونتغمري ، في صفحته 297 :

"Montgomery, Technique of Microwave Measurements, Mc-Graw Hill, New Yourk, 1947, P. 297."

حيث يوجد مختصر مفيد جداً لمعالجة التجويف الاسطواني الرنان .

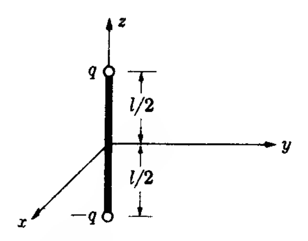
16-8 الاشعاع من ثنائي قطب متذبذب :

Radiation from an oscillating dipole

مثال بسيط عن اشعاع ناتج عن توزيع تيار – شحنة معين ومعتمد على الزمن نحصل عليه بحساب الاشعاع الناتج عن ثنائي قطب كهربائي متذبذب . سنفرض ان

ثنائي القطب متكون من كرتين موضوعتين عند $z = \pm l/2$ وموصولتين بسلك ذي سعة كهربائية مهملة كما مبين بالشكل (9-16) . أفرض ان مقدار الشحنة التي تحملها الكرة العليا q ، والشحنة التي تحملها الكرة السفلى q- . يتطلب قانون حفظ الشحنة أن يعطى التيار الكهربائي في السلك الموصل بالصيغة الآتية :

$$I = +\dot{q}, \qquad (16\text{–}118)$$



شكل (9-16) . ثنائي قطب كهربائي متذبذب .

حيث I كمية موجبة بالاتجاه الموجب للاحداثي z . ينبغي ملاحظة أن شرط أهمال السعة الكهربائية للسلك وبقاء التيار منتظماً فيه يمكن تحققه فقط اذا كان طول ثنائي القطب l صغيراً اذا ما قورن مع الطول الموجي للاشعاع (أنظر المناقشة في بداية الفصل الثالث عشر) .

الجهد المتجه الناشيء عن توزيع التيار الموصف بالمعادلة (118-16) . يكون :

$$A_z(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I(z', t - \sqrt{\epsilon\mu}|\mathbf{r} - z'\mathbf{k}|)\, dz'}{|\mathbf{r} - z'\mathbf{k}|}. \qquad (16\text{–}119)$$

الواقع ان هذه الصيغة مرهقة ويمكن تبسيطها فيما اذا درسنا الكمية$|\mathbf{r}-\mathbf{k}z'|$، إذ يتضح أن :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{k}z'| = (r^2 - 2z'\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + z'^2)^{1/2}. \qquad (16\text{–}120)$$

اذا كانت l صغيرة بالنسبة الى r و اذا أخذنا المجال عند مسافات كبيرة عن ثنائي القطب ، فان بالامكان ايجاد مفكوك الطرف الايمن من المعادلة (119-16) حسب الصيغة الآتية :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{k}z'| = r - z'\cos\theta, \qquad (16\text{-}121)$$

حيث θ تمثل الزاوية المحصورة بين $\mathbf{r}$ والاحداثي z . وهذه الصيغة تتكرر مرتين في المعادلة (16-119) مرة في البسط وأخرى في المقام . ففي المقام ، يمكن اهمال $z'\cos\theta$ ببساطة فيما اذا كانت r كبيرة نسبياً . وفي حد التعويق «retardation term» ، من ناحية ثانية ، يمكن اهمال $z'\cos\theta$ بشرط ان يكون $z'\cos\theta\sqrt{\epsilon\mu}$ مهملاً بالمقارنة مع الزمن الذي يتغير خلاله التيار بشكل ملحوظ ، أي ، بالمقارنة مع زمن الذبذبة لتيارات تتغير توافقياً . بما ان $v = (\epsilon\mu)^{-1/2}$ يمثل سرعة الموجات الكهرومغناطيسية أو $z'\cos\theta \lessgtr l/2$ ، وهذا يعني ، امكانية اهمال $z'\cos\theta$ في حد التعويق فقط ، عندما يكون :

$$\frac{l}{2} \ll vT = \lambda. \qquad (16\text{-}122)$$

واذا كان ثنائي القطب صغيراً بالمقارنة مع طول موجي واحد . وكانت نقطة التقصي بعيدة عن ثنائي القطب بالمقارنة مع l . فان $\mathbf{A}$ تمثل بالمعادلة الآتية :

$$A_z(r, t) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{r} l I\left(t - \frac{r}{v}\right). \qquad (16\text{-}123)$$

يمكن ايجاد الجهد اللامتجه φ اما بتطبيق شرط لورنتز ، أو باستخدام الصيغة المناسبة للجهد المعوق . ان كلتا الطريقتين تعطيان النتيجة النهائية نفسها ، ومع ذلك ، فان الجهد الكهربائي الناشيء عن ثنائي القطب يمثل بالفرق بين حدين كبيرين ، لذلك ينبغي اجراء التقريب الرياضي للجهد المعوق بحذر شديد . وبما أن هذه الصعوبة يمكن التغلب عليها عند حساب شرط لورنتز ، فان الجهد اللامتجه يمكن الحصول عليه بحل المعادلة :

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \epsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \qquad (16\text{-}124)$$

حيث تعطى $\mathbf{A}$ بالمعادلة (16-123) . وبهذا ينتج :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{l}{4\pi\epsilon}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}I\left(t - \frac{r}{v}\right)$$

$$= \frac{l}{4\pi\epsilon}\left[\frac{z}{r^3}I\left(t - \frac{r}{v}\right) + \frac{z}{r^2 v}I'\left(t - \frac{r}{v}\right)\right], \qquad (16\text{-}125)$$

حيث I' تمثل مشتقة I بالنسبة الى ازاحتها الزاوية . ويجرى تكامل هذه المعادلة بيسر بملاحظة أن $I = +\dot{q}'$ ، وبالتالي فان :

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{l}{4\pi\epsilon}\,\frac{z}{r^2}\left[\frac{q(t - r/v)}{r} + \frac{I(t - r/v)}{v}\right]. \qquad (16\text{–}126)$$

وبايجاد الجهد اللامتجه والجهد المتجه ، فان كل ماتبقى لدينا هو أخذ مشتقة هذين الجهدين لايجاد المجال الكهرومغناطيسي . وقبل أخذ المشتقة من المناسب تخصيص التوزيع (شحنة ـ تيار) للحالة التي تتغير توافقياً مع الزمن . والاختيار الملائم لذلك هو :

$$q\left(t - \frac{r}{v}\right) = q_0 \cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right),$$

$$I = I_0 \sin\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) = -\omega q_0 \sin\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) \qquad (16\text{–}127)$$

وبتحليل **A** بدلالة الاحداثيات الكروية ، نحصل على :

$$A_r = \frac{\mu}{4\pi}\,\frac{I_0 l}{r}\cos\theta\sin\omega\left(t - \frac{r}{v}\right),$$

$$A_\theta = -\frac{\mu}{4\pi}\,\frac{I_0 l}{r}\sin\theta\sin\omega\left(t - \frac{r}{v}\right), \qquad (16\text{–}128)$$

$$A_\phi = 0,$$

من الواضح عندئذٍ أن مركبة ϕ للحث المغناطيسي **B** هي الوحيدة التي لا تساوي صفراً ، وان هذه المركبة هي :

$$B_\phi = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r}\,\frac{\partial A_r}{\partial\theta}$$

$$= \frac{\mu}{4\pi}\,\frac{I_0 l}{r}\sin\theta\left[\frac{\omega}{v}\cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) + \frac{1}{r}\sin\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right]. \qquad (16\text{–}129)$$

وحساب المجال الكهربائي سيكون الى حد ما أكثر تعقيداً ، نظراً لشمولها على φ بالاضافة الى **A** . تصبح النتيجة بعد إتمام المشتقات كالآتي :

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial t} = \frac{2lI_0\cos\theta}{4\pi\epsilon}\left[\frac{\sin\omega(t - r/v)}{r^2 v} - \frac{\cos\omega(t - r/v)}{\omega r^3}\right].$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial t}$$

$$= -\frac{lI_0 \sin\theta}{4\pi\epsilon}\left[\left(\frac{1}{\omega r^3} - \frac{\omega}{rv^2}\right)\cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) - \frac{1}{r^2 v}\sin\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right],$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial t} = 0. \quad (16\text{–}130)$$

ان حساب المعدل الزمني لإشعاع الطاقة من قبل ثنائي القطب يعد ذا أهمية ، ويمكن حساب ذلك من تكامل المركبة العمودية لمتجه بوينتنك حول كرة ذات نصف قطر R ، لذا :

$$\oint \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\,da = \frac{1}{\mu}R^2\int_0^\pi E_\theta B_\phi 2\pi\sin\theta\,d\theta. \quad (16\text{–}131)$$

وتشير المعادلتان (129–16 و 130–16) الى أن من الممكن ايجاد التكامل المبين في المعالة (131–16) . ومع ذلك ، ربما يكون من الاوضح حساب ذلك الجزء الذي لا يتلاشى عندما تقترب R من مالانهاية فقط . ويمكن انجاز ذلك بأختبار الحد الذي يتناسب مع 1 / r في صيغتي E_θ و B_ϕ . النتيجة تصبح كالآتي :

$$\oint \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\,da = \frac{(I_0 l)^2}{6\pi\epsilon}\frac{\omega^2}{v^3}\cos^2\omega\left(t - \frac{r}{v}\right). \quad (16\text{–}132)$$

وهذه الصيغة تمثل قدرة الاشعاع الآنية ، وأما متوسط قدرة الاشعاع فتكون (حيث ان القيمة المتوسطة لمربع الجيب التام تساوي نصفاً) :

$$\overline{P} = \frac{l^2\omega^2}{6\pi\epsilon v^3}\frac{I_0^2}{2}. \quad (16\text{–}133)$$

يمكننا ايجاد صيغة مألوفة أكثر للمعادلة (133–16) ، وذلك بتعويض :

$$\lambda = 2\pi v/\omega \quad \text{و} \quad v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}.$$

النتيجة هي :

$$\overline{P} = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\frac{I_0^2}{2}. \quad (16\text{–}134)$$

مقاومة مقدارها R تحمل تياراً مقداره $I_0\cos\omega t$ تبدد طاقة بمعدل زمني قدره $\overline{P} = RI_0^2/2.$. وبمقارنة هذه النتيجة بالمعادلة (134–16) ، نستنتج انه من المناسب تعريف مقاومة الاشعاع «radiation resistance» لثنائي القطب بالمعادلة :

$$R_r = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \qquad (16\text{–}135)$$

وفي الفضاء الطليق تكون : $\mu = \mu_0, \epsilon = \epsilon_0$ ، لذلك تعطى مقاومة الاشعاع وفق المعادلة :

$$R_r = 787\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \text{ ohms}, \qquad \text{(free space).}$$

ربما يحثنا هذا على استخدام المعادلة (135-16) لوصف الاشعاع الصادر عن هوائي الراديو . والمؤسف له ، هنالك عدة عيوب تمنع ايجاد نتائج جيدة بهذه الطريقة . العيوب الأساسية هي : **أولاً** : أهمال التأثير الناشيء عن القرب من سطح الأرض ، **ثانياً** : الهوائيات الاعتيادية لا تحتوي على حمل سعوي عند النهايات ، **ثالثاً** : الهوائيات نادراً ماتكون قصيرة جداً بالمقارنة مع الطول الموجي لاشعاعها . وازالة هذين العيبين الأخيرين سوف تناقش في البند اللاحق ، لكن مناقشة تأثير التشويش الأرضي يفوق الغرض المنشود لهذا الكتاب .

16-9 الاشعاع من هوائي نصف - موجي
Radiation from a half-wave antenna

بالامكان ازالة القيد الموضوع للأطوال الصغيرة مقارنة مع الطول الموجي في بعض الحالات بطرق بسيطة نسبياً . وبالتخصيص ، من الممكن تجزئة سلك طوله نصف طول موجي واحد الى عناصر صغيرة جداً ، والتي يمكن تطبيق الطريقة الموضحة في البند السابق على كل منها . افرض ان السلك يمتد على طول الاحداثي z من $+\lambda/4$ الى $-\lambda/4$ ويحمل تياراً كهربائياً مقداره :

$$I(z', t) = I_0 \sin \omega t \cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right). \qquad (16\text{–}136)$$

العنصر الطولي dz' عند الموقع z' ، يساهم بتكوين مجال مقداره

$$dE_\theta = I_0 \frac{\sin\theta}{4\pi\epsilon R v^2}\,\omega \cos\left(\omega t - \frac{R\omega}{v}\right)\cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right) dz' \qquad (16\text{–}137)$$

هنا يمثل R المسافة من dz' الى النقطة المعنية . كما اهملت الحدود ذات الرتبة $1/R^2$. وبالطريقة نفسها نجد :

$$dB_\phi = \frac{\mu}{4\pi}\,\frac{I_0\omega}{Rv}\sin\theta\cos\omega\left(t - \frac{R}{v}\right)\cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right)dz'. \qquad (16\text{–}138)$$

والمشكلة في حساب E_θ و B_ϕ يمكن أن تختصر لإيجاد :

$$K = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{R}\cos\omega\left(t - \frac{R}{v}\right)\cos u\,du, \qquad (16\text{–}139)$$

حيث $u = 2\pi z'/\lambda$. وكما مر سابقاً فإن $R = r - z'\cos\theta$ ، ولهذا السبب اذا اختير البعد r بحيث يكون كبيراً نسبياً لأمكن إهمال $z'\cos\theta$. بيد أن الامر يتطلب إهتماماً أكبر في حالة الازاحة الزاوية لدالة الجيب تمام . وبهذا يمكن كتابة K بالصيغة :

$$K = \frac{1}{r}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) + u\cos\theta\right]\cos u\,du.$$

وبأخذ مفكوك الجيب التمام ، نحصل على :

$$K = \frac{1}{r}\cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(u\cos\theta)\cos u\,du$$
$$- \frac{1}{r}\sin\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin(u\cos\theta)\cos u\,du.$$

وبتلاشي التكامل الثاني ، وايجاد التكامل الأول بالتعبير عن دالة الجيب التمام كدالة أسية ، أو بأستخدام جداول التكاملات القياسية ، تكون النتيجة :

$$K = \frac{2}{r}\cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\frac{\cos[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin^2\theta}. \qquad (16\text{–}140)$$

وبإيجاد قيمة K ، نجد أن :

$$E_\theta = \frac{I_0}{2\pi\epsilon r v}\cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\frac{\cos[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin\theta}$$
$$B_\phi = \frac{\mu I_0}{2\pi r}\cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\frac{\cos[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin\theta}. \qquad (16\text{–}141)$$

وعندئذ يأخذ تكامل متوسط متجه بوينتنك الصيغة :

$$\bar{P} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\,I_0^2\int_0^\pi\frac{\cos^2[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin^2\theta}\sin\theta\,d\theta. \qquad (16\text{–}142)$$

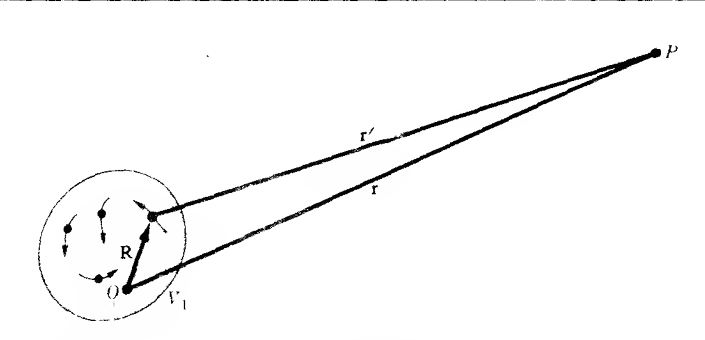
التكامل المتبقي يمكن ايجاده في حالة عدّهِ مسلسلة لا نهائية فقط ، ولكننا نلاحظ ببساطة أن النتيجة لهوائي نصف موجي تكون :

$$\overline{P} = 73.1 \text{ ohms} \frac{I_0^2}{2} . \qquad (16\text{–}143)$$

ومن الممكن تطبيق هذه الطريقة لمسائل اكثر تعقيداً ، ولكن التفاصيل الرياضية ستصبح مطولة من غير ريب .

16-10 الاشعاع من مجموعة شحنات متحركة
Radiation from a group of moving charges

في هذا البند سنشتق صيغة رياضيةٍ للقدرة المنبعثة من مجموعة من الشحنات المتحركة ، أو من التوزيع تيار ـ شحنة . حركة الشحنات تكون كيفية ماعدا القيود الآتية : خلال الزمن اللازم لكي ينتشر الاشعاع من المنطقة المجاورة للشحنة الى نقطة المراقبة ، يمكننا أن نتخيل أن كافة الشحنات والتيارات المشمولة في التوزيع محتواة في حجم V_1 أبعاده صغيرة مقارنة مع المسافة بين المصدر ونقطة المراقبة (انظر الشكل 10-16) . بالاضافة الى ذلك ، فإن أبعاد الحجم V_1 صغيرة مقارنة مع الأطوال الموجية السائدة للاشعاع المنبعث . القيود في أعلاه تدل ضمناً على أن الشحنات تتحرك ببطءٍ مقارنة مع سرعة الضوء . لقد أفترض أن الشحنات تتحرك في الفراغ .



الشكل 10-16 . شحنات متحركة بشكل كيفي محتواه في الحجم V_1 . المطلوب حساب المجالات عند النقطة P .

كخطوة أولى بـــاتجـــاه حـــل المسألـــة ، ينبغي علينـــا حساب الجهود الكهرومغناطيسية . وهذه الجهود هي بالضبط جهود مُعَوَّقة نوقشت في البند (8-15) . لنأخذ نقطة أصل الاحداثيات 0 داخل الحجم V_1 ونرمز لموقع عنصر الشحنة بـ R (انظر الشكل 10-16) . نقطة المجال P تقع على مسافة r من نقطة الأصل . وكوسيلة ملائمة نأخذ المسافة المساعدة r' التي تدل على موقع نقطة المجال بالنسبة الى عنصر الشحنة . من الواضح إن :

$$\mathbf{r}' + \mathbf{R} = \mathbf{r}. \tag{16-144}$$

وبما أن $r \gg R,$ ينتج :

$$r' = |\mathbf{r} - \mathbf{R}| \approx r - \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}}{r}. \tag{16-145}$$

الجهد اللامتجه المعوق φ عند نقطة المجال P يأخذ الآن الصيغة الآتية :

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V_1}\frac{\rho(\mathbf{R}, t - r'/c)\, dv_R}{r'} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V_1}\frac{\rho(\mathbf{R}, t - r/c + \mathbf{R}\cdot\mathbf{r}/cr)\, dv_R}{r - (\mathbf{R}\cdot\mathbf{r})/r}.\end{aligned} \tag{16-146}$$

باستخدام نظرية ذي الحدين :

$$\left(r - \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}}{r}\right)^{-1} = r^{-1} + r^{-2}\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}}{r} + \cdots, \tag{16-147}$$

ومفكوك مسلسلة تايلر :

$$\rho\left(\mathbf{R}, t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}}{cr}\right) = \rho\left(\mathbf{R}, t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}}{cr}\frac{\partial\rho}{\partial t}\bigg|_{\mathbf{R}, t-r/c} + \cdots, \tag{16-148}$$

نجد الآتي :

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\int_{V_1}\rho\left(\mathbf{R}, t - \frac{r}{c}\right) dv_R + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\mathbf{r}\cdot\int_{V_1}\mathbf{R}\rho\left(\mathbf{R}, t - \frac{r}{c}\right)dv_R \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2 c}\mathbf{r}\cdot\frac{d}{dt}\int_{V_1}\mathbf{R}\rho\left(\mathbf{R}, t - \frac{r}{c}\right)dv_R + \text{حدود ذات رتب عليا}\end{aligned} \tag{16-149}$$

يمثل التكامل الأول في المعادلة (16-149) الشحنة الكلية Q للتوزيع ، وهي كمية ثابتة ولا تعتمد على الزمن . التكامل الثاني (وكذلك الثالث) يمثل عزم ثنائي القطب الكهربائي **p** للتوزيع الشحني ، وقد حسب عند الوقت t-r/c . حدود الرتب العليا إما أن تتضاءل بسبب الأس الكبير لـ r أو أن تعتمد على عزم متعدد الاقطاب ذي الرتب العليا للتوزيع الشحني . وبسبب القيود التي فرضت في بداية هذا البند ، فإن هذه الحدود لا تساهم بقدر يذكر (انظر الى ما يأتي) الى المجال الكهرومغناطيسي البعيد للتوزيع الشحني . وبهذا نجد أن :

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}(t - r/c)}{r^3} + \frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{cr^2}\right], \quad (16\text{–}150)$$

حيث $\dot{\mathbf{p}} = dp/dt$ وكنتيجة لمفكوك مسلسلة تايلر يظهر زمن تعويق «retarded time» واحد في الحدود المتبقية على نحو واضح .

الجهد المتجه المعوَّق **A** عند نقطة المجال ، يعطى بالصيغة الآتية :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_1}\frac{\mathbf{J}(\mathbf{R}, t - r/c + \mathbf{R}\cdot\mathbf{r}/cr)\, dv_R}{r - (\mathbf{R}\cdot\mathbf{r})/r}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r}\int_{V_1}\mathbf{J}\left(\mathbf{R}, t - \frac{r}{c}\right) dv_R + \text{حدود ذات رتب عليا} \quad (16\text{–}151)$$

وهنا لا نجد ضرورة لكتابة حدود الرتب العليا بشكل واضح ، وذلك لأنها إما أن تتضاءل بشكل سريع جداً أو تعتمد على عزم متعدد الاقطاب لتوزيع شحني ذي رتب عليا . بعبارات أخرى ، المعادلة (16-151) تتوافق الآن مع المعادلة (16-149) . وباستخدام نتائج المسألة (2-7) يمكننا أن نكتب المعادلة الأخيرة بالشكل الآتي :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right). \quad (16\text{–}152)$$

وقد تحسب المجالات الكهربائية والمغناطيسية من العلاقات الرياضية الاعتيادية الآتية :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad}\,\varphi, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{curl}\,\mathbf{A}.$$

سنركز اهتمامنا على مجالات منطقة الاشعاع ، أي ، على أسهامات المجالين **E** و **B** التي تتناقص كتناقص r^{-1} ، نظراً لأن هذه الإسهامات تكفي لايجاد القدرة

المنبعثة عن التوزيع الشحني . ان حساب الكمية $\partial \mathbf{A} / \partial t$ واضحاً . وللحصول على $\operatorname{grad} \varphi$ نلاحظ أنه طالما كانت $\dot{\mathbf{p}}$ دالة لـ $t-r/c$ ، نجد :

$$\frac{\partial}{\partial r} \dot{\mathbf{p}} \equiv -\frac{1}{c} \ddot{\mathbf{p}}. \tag{16-153}$$

لذا

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{-\mu_0}{4\pi r} \ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{c^2 r^3} \mathbf{r}$$

$+$ حدود تتضاءل بسرعة اكبر من $(1/r)$. (16-154)

لحساب $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ يجب علينا أخذ الالتفاف للمعادلة (16-152) .

إن من الملائم فرض منظومة احداثيات (احداثيات كروية) ، مع وضع إتجاه r موازياً للمتجه **r** (الذي يمتد من توزيع الشحنة الى نقطة المجال) . الاحداثي z ، أو الاحداثي القطبي ، قد يوجه بشكل كيفي . وبالرجوع لصيغة الالتفاف في الاحداثيات الكروية (الملحق IV) ، نلاحظ أن العديد من الحدود في الالتفاف قد تهمل نظراً لأنها تتضاءل بسرعة اكثر من تضاؤل r^{-1} . والحقيقة ، إن حدين فقط يساهمان في مجال الاشعاع :

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &\approx -\mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r c}\left[\mathbf{a}_\theta \ddot{p}_\phi\left(t - \frac{r}{c}\right) - \mathbf{a}_\phi \ddot{p}_\theta\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \\
&= \frac{-\mu_0}{4\pi c r^2} \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right).
\end{aligned} \tag{16-155}$$

الخطوة الوسطية تستخرج من استعمال المعادلة (16-153) . لذلك تعطى مجالات منطقة الاشعاع بالصيغ الآتية :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi c r^2} \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}}, \tag{16-156}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[\frac{(\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}})\mathbf{r} - r^2 \ddot{\mathbf{p}}}{r^3}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}}) \\
&= -\frac{c}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t),
\end{aligned} \tag{16-157}$$

حيث استخرجت $\ddot{\mathbf{p}}$ عند زمن التعويق .

إنه من الواضح أن $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ متعامدان احدهما على الآخر وكلاهما عمودي على $\mathbf{r}$. وبهذا نجد أن متجه بوينتنك :

$$\mathbf{S} = (1/\mu_0)(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

له اتجاه $\mathbf{r}$ ، ويمثل بالمعادلة الآتية :

$$\mathbf{S} = \frac{c}{\mu_0 r} \mathbf{B} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = \frac{c}{\mu_0 r} \mathbf{r} B^2 \tag{16-158}$$

أو

$$\mathbf{S} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^5} \mathbf{r}(\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}})^2. \tag{16-159}$$

تحسب قدرة الاشعاع الكلية من تكامل متجه بوينتنك حول سطح مغلق يحيط بالتوزيع الشحني ، والاختيار المناسب لمثل هذا السطح هو كرة تتمركز عند التوزيع الشحني ، وذات نصف قطر كبير نسبياً بحيث إن كافة أجزاء سطحها تكون في منطقة الاشعاع . فإذا ، بالاضافة الى ذلك ، أخذنا الاحداثي z بأتجاه $\ddot{\mathbf{p}}$ ، فإن :

$$P_R = -\frac{dW}{dt} = \oint_s \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}\, da$$
$$= \frac{\ddot{p}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r^5} \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} r^2 \sin \theta\, d\theta\, d\phi,$$

ومن هذه المعادلة نجد بسهولة النتيجة المهمة الآتية :

$$P_R = -\frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{\ddot{p}^2}{c^3} \tag{16-160}$$

لمقدار القدرة المشَعَّة عن مجموعة شحنات تتحرك ببطء مقارنة مع سرعة الضوء .

المعادلة (160-16) تمثل صيغة لمقدار القدرة المشعة من شحنات تتحرك كيفياً بدلالة عزم ثنائي قطبها الكهربائي $\mathbf{p}$. وان الصيغة المشتقة سابقاً للاشعاع من ثنائي

قطب متذبذب (معادلة 16-133) تمثل حالة خاصة للمعادلة (16-160). وفي تلك الحالة الخاصة نجد أن:

$$p = (lI_0/\omega) \cos \omega(t - r/c).$$

فمن الممكن الآن حدوث تلاشي عزم ثنائي القطب أو عدم اعتماده على الزمن نتيجة لتناظر خاص في المنظومة. وفي هذه الحالة تصبح القدرة المشعة لا تساوي صفراً. ولكن ينبغي ابقاء عدد أكثر من الحدود في مفكوك φ و $\mathbf{A}$ (المعادلات 16-149 و 16-151) لغرض اجراء الحساب. والحقيقة اننا سنجد في هذه الحالة ان القدرة المشعة تعتمد على عزم الرتب العليا لمتعددات أقطاب المنظومة. الاشعاعات المنبعثة من متعددات الاقطاب المختلفة تصبح أقل شدة بالتدريج كلما زادت مرتبة متعدد الاقطاب. أي أن أشعاع رباعي القطب يكون أقل تقريباً بمعامل $(a/\lambda)^2$ من اشعاع ثنائي القطب، حيث a يمثل بعد المنظومة و λ طول موجة الاشعاع المنبعث. وبهذا فاذا كان $\ddot{\mathbf{p}}$ لا يساوي صفراً للمنظومة المدروسة. فإن المعادلة (16-160) تعطي الاسهام الرئيس للقدرة المشعة.

المعادلات (16-156) و (16-157) و (16-160) يمكن تطبيقها أيضاً على الاشعاع الصادر عن شحنة منفردة معجلة q. عزم ثنائي القطب للشحنة يساوي $q\mathbf{R}$، حيث تقاس $\mathbf{R}$ من نقطة أصل كيفية. وبهذا:

$$\dot{\mathbf{p}} = q\dot{\mathbf{R}} = q\mathbf{v},$$

حيث $\mathbf{v}$ تمثل سرعة الشحنة، وأخيراً:

$$\ddot{\mathbf{p}} = q\dot{\mathbf{v}},$$

حيث $\dot{\mathbf{v}}$ تمثل تعجيل الشحنة. بتعويض هذه النتيجة الاخيرة في المعادلة (16-160)، نجد:

$$P_R = -\frac{dW}{dt} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{2}{3}\frac{\dot{v}^2}{c^3} \qquad (16\text{-}161)$$

للقدرة المُشَعَّة من شحنة معجلة تتحرك ببطء.

مسائل

16-1 حزمة ضوئية أحادية الطول الموجي (ترددها ω) سقطت في الفراغ بصورة عمودية على غشاء عازل رقيق ذي معامل انكسار $n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$، ثخن الغشاء d . أحسب معامل الانعكاس للموجة المنعكسة كدالة لـ d و n . [ملحوظة : افرض انتقال موجتين باتجاهين متعاكسين داخل الغشاء] .

16-2 أوجد الكثافة السطحية للشحنة والتيار لوحدة العرض على السطح لموصل تام الذي تسقط عليه موجات كهرومغناطيسية مستوية . عندما يكون المتجه الكهربائي : أولاً ــ عمودياً على سطح السقوط ، وثانياً ــ موازياً لسطح السقوط .

16-3 موجة مستوية تسقط بصورة مائلة على السطح البيني الفاصل بين وسطين عازلين غير موصلين (1,2) ، متجهات المجال $\mathbf{E}_1$ و $\mathbf{E}_2$ و $\mathbf{E}_3$ جميعها عمودية على سطح السقوط . طبق شروط الحدود ، وبّين امكانية ايجاد معادلتين مستقلتين اضافة الى قانون سنيل وقانون الانعكاس .

16-4 أوجد معادلات فرينل [المناظرة للمعادلتين (16-50) و (16-51)] للحالة التي وصفت في التمرين السابق .

16-5 (أ) أفرض $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0,$ واستخدم قانون سنيل ، لاعادة كتابة المعادلتين (16-50) و (16-51) بدلالة معاملات الانكسار ودوال θ_1 فقط . وبعبارة أخرى ، اختزل θ_3 من المعادلات . (ب) استخدم نتائج الفرع (أ) من التمرين لمناقشة الانعكاس والانفاذ عند السطح البيني الفاصل بين عازلين للحالة التي تكون فيها :

$$n_2 < n_1 \quad و \quad \sin\theta_1 = n_2/n_1.$$

16-6 وضح ان معامل الانعكاس R عند السطح البيني الفاصل بين فراغ وموصل يكتب بالصيغة الآتية :

$$R = 1 - 4\pi \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\delta}{\lambda_0},$$

حيث δ يمثل العمق القشري .

16-7 أوجد E و B لموجات TM المنتشرة في المستوي ــ yz بين لوحين متوازيين تامي التوصيل ، عند $y = 0$ وعند $y = a$.

16-8 أكتب المجالات E و H للمنوال TE_{101} لتجويف مكعب الشكل طول ضلعه a . ارسم مخططاً لطبيعة توزيعات المجال خلال المكعب .

16-9 أوجد قيم الغاية للعرض a لدليل موجة ذي مقطع مربع الشكل لكي ينقل موجة طولها λ في المنوال TE_{10} ولكن ليس في المنوال TE_{11} أو TM_{11} .

16-10 (أ) أوجد متوسط كثافة القدرة المشعة في الفراغ من ثنائي قطب متذبذب كدالة للزاويتين θ و ϕ . (ب) احسب القدرة الكلية المنبعثة من ثنائي قطب طوله 10 ft ، عند تردد قدره 500 kc/sec ، إذا كانت القيمة الفعالة للتيار في ثنائي القطب تساوي 2 amp . (جـ) ماقيمة مقاومة الاشعاع لثنائي القطب المتذبذب في الفرع (ب)؟

16-11 . سلك بشكل حلقة دائرية يحمل تياراً قدره :

$$I = I_0 \cos \omega t$$

يمكن عدّه كثنائي قطب مغناطيسي متذبذب . أوجد المجالات المشعة **E** و **B** لهذا المتذبذب ، ومقدار القدرة الكلية المنبعثة .

16-12 كمصادر لإشعاع كهرومغناطيسي ، أوجد الكفاءة النسبية لثنائي قطب كهربائي طوله مترين بالمقارنة مع ثنائي قطب مغناطيسي له القطر نفسه عند تردد قدره 1 Mc/sec. .

16-13 عند انتقال موجة كهرومغناطيسية خلال مادة تحتوي على الكترونات طليقة (أو تكون الالكترونات فيها شبه طليقة) ، تجبر الالكترونات على التذبذب بتردد مساوٍ لتردد الموجة الكهرومغناطيسية . استخدم الصيغ الرياضية في البند (10-16) ، ووضح بأن القدرة الكلية المنبعثة من الكترون في مجال موجة كهرومغناطيسية معطاة بالعلاقة :

$$E = E_0 \sin \omega(t - z/c)$$

يكون :

$$P_R = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{e^4 E_0^2}{m_e^2 c^3}.$$

16-14 حزمة أشعة أكس غير مستقطبة ذات شدة قدرها I_0 تسقط على مادة تحتوي على الكترونات طليقة . افرض الكتروناً واحداً فقط واستخدم الصيغ الرياضية المعطاة في البند (10-16) ، وضح أن شدة الحزمة المشتتة تعطى بالصيغة الآتية :

$$I_s = \frac{1}{2} I_0 \frac{e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 m_e^2 c^4 r^2} (1 + \cos^2 \beta),$$

حيث β تمثل الزاوية المحصورة بين OP وبإتجاه حزمة أشعة أكس الأصلية . نقطة O تمثل موقع الالكترون و P تمثل النقطة التي عندها تقاس شدة الحزمة المشتتة .

الفصل السابع عشر

النظرية النسبية الخاصة
THE SPECIAL THEORY OF RELATIVITY

يوصف التأثير المتبادل بين مجموعات من الشحنات (او التيارات) كما نوقش في الفصلين الثاني والسابع بفصل الظواهر الى جزأين: أولاً - تكوين المجال الكهرومغناطيسي الناشيء عن المصدر، وثانياً - التأثير المتبادل بين المجموعة الثانية من الشحنات (و/ او التيارات) مع المجال. وقد يتم اختبار المجال من قبل مراقب مستخدماً شحنات اختبارية وتيارات. هذا التحليل للتأثير المتبادل ليس بالتأثير الوحيد، والحقيقة، ان تفاصيل طبيعة المجال الكهرومغناطيسي تعتمد على الحالة الحركية للمراقب.

مثلاً، افرض وجود مراقبين A و B . المراقب A في حالة سكون بالنسبة الى مجموعة من شحنات ثابتة، ويرقب المجال الكهربائي المرافق لتلك الشحنات فقط. والمراقب B في حالة حركة بالنسبة الى المراقب A، وبهذا فإنه يرقب مجموعة من شحنات متحركة ومن ثم يرقب مجالاً مغناطيسياً بالاضافة الى مجالٍ كهربائي.

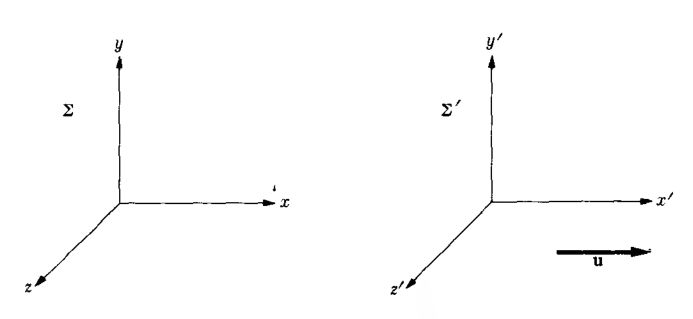
هل يصح لكلا المراقبين استخدام معادلات ماكسويل لوصف ملاحظاتهم الفيزياوية؟ واذا كان كذلك، كيف يقوم مراقب بتحويل المجالات الكهربائية والمغناطيسية في مرجع ثابت معين لكي يعطي مركبات المجال في مرجعٍ ثانٍ متحرك بالنسبة الى الأول؟ سنحاول الاجابة على هذه الاسئلة في الفصل الحالي.

17-1 الفيزياء قبل عام 1900 (Physics before 1900)

الأفكار الأساسية لماكسويل حول المجال الكهرومغناطيسي كانت قد نشرت لأول مرة في عام 1862 . وفي السنوات الأربعين اللاحقة تطورت تدريجياً التراكيب الرياضية لقوانين الكهربائية والمغناطيسية (خصوصاً على يد لورنتز Lorentz, H.A.) ، وقد تم تحقيق العديد من النتائج لهذه النظرية تجريبياً . علاوة على ذلك بقي هنالك عدد من المشاكل التي أربكت الفيزيائيين النظريين وخصوصاً تلك التي تتعلق بالتراكيب الرياضية لقوانين فيزياوية .

كافة التجارب السابقة والمتعلقة بحركة الموجة تشير الى أنها تتطلب وسط لانتشارها . وقد وضحنا في الفصل الخامس عشر أن معادلات ماكسويل في الفضاء الطليق منسجمة مع (والواقع تقودنا الى) معادلة موجة ، التي فيها تنتشر الموجات بسرعة $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. ولهذا فإنه من الطبيعي فرض نوع من الوسط الاثيري (غير المادي) ليعم كل الفضاء (بضمنه الفراغ) لانتشار الموجات الكهرومغناطيسية . لمس ماكسويل الحاجة لمثل هذا الوسط واطلق عليه الأثير . ولكن وجود الوسط أظهر مشكلة لكونه ادخل مفهوم المرجع "reference frame" المفضل ، وبالتحديد ، المرجع الذي فيه الوسط يكون ساكناً .

من المعلوم أن قوانين نيوتن للحركة لا تتأثر بتحويلات غاليلو "Galilean transformation" ، اي انها لا تتأثر بتحويلات الاحداثيات بين مرجعين (منظومتين للاحداثيات) "frame of reference" في حالة حركة نسبية . مثال على ذلك ، لتكن Σ منظومة احداثيات مستقرة ، ولتكن Σ′ منظومة احداثيات اخرى متحركة في اتجاه x وبسرعة منتظمة **u** (انظر الشكل 1-17) .



شكل (1-17) منظومتان احداثيتان في حالة حركة نسبية (في اتجاه x) وبسرعة ثابتة مقدارها **u** .

العلاقة بين الاحداثيات والازمان في المنظومتين تمثل بالصيغ الآتية (تحويلات غاليلو) :

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \qquad (17\text{–}1)$$

قوانين نيوتن الأساسية للحركة تكون ذات الصيغة نفسها في كلا المنظومتين Σ و Σ' . والحقيقة ، إن من غير الممكن ايجاد السرعة المطلقة لأي مرجع مستخدمين تجارب الميكانيك .

ماذا يحدث لمعادلات ماكسويل في ظل تحويلات غاليلو ؟ نحن الآن ليس في وضع يمكننا على إجابة هذا السؤال لأننا لا نعرف الى حد هذا الموضع من الكتاب كيفية تحويل المجالات ، ولكن يمكننا النظر الى السؤال من جانب آخر بدلالة معادلة الموجة (التي تكون متجانسة وتشتمل على مركبة واحدة للمجال فقط) . في الفضاء الطليق لدينا :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \qquad (17\text{–}2)$$

حيث φ تمثل واحدة من مركبات المجال . بتعويضنا :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} + \cdots$$

في المعادلة (2–17) وباستخدام المعادلة (1–17) لايجاد $\partial x'/\partial t,$ ، الخ ، نجد أن معادلة الموجة المحولة ستصبح بصيغة مغايرة عن تلك في المعادلة (2–17) . وهذه تمثل نص رياضي للحقيقة التي نعلم بأنها صحيحة لموجات ميكانيكية ، حيث تنتشر حركة الموجة بسرعة ثابتة بالنسبة الى الوسط المستقر . ولكن لمرجع متحرك بالنسبة الى الوسط فإن انتشار الموجة سيظهر اكثر تعقيداً .

اذن ، ماهي الوضعية فيما يتعلق بقوانين الكهربائية والمغناطيسية ؟ اقتُرِحَ عدد من الاحتمالات قبل تفسير الموضوع من قبل لورنتز وبوينكير "Poincare" وبصفة خاصة من قبل اينشتين "Einstein" في عام 1905 . هذه الاحتمالات تنص باختصار على ما يأتي :

أولاً ــ معادلات ماكسويل لا تفي لشرح وتفسير ظواهر كهرومغناطيسية .

ثانياً ـ هنالك مرجع مفضل ألا وهو الأثير الساكن ، ولذلك تتطلب معادلات ماكسويل تعديلات في المراجع الأخرى .
ثالثاً ـ لمعادلات ماكسويل الصيغ نفسها في كافة المراجع المتحركة بسرعة منتظمة الواحد بالنسبة للآخر . وان تحويلات غاليلو غير ملائمة لربط المراجع المختلفة عندما تتضمن مجالات كهرومغناطيسية .

كما نعلم الآن ، فإن الاختيار الثالث المقدم هنا هو الصحيح ، والحقيقة انه يمثل نص جزئي لمبدأ النسبية . أن تنبؤآت معادلات ماكسويل قد برهنت تجريبياً ، واما المحاولات لقياس أو تحديد المرجع الأثيري المطلق لم يكتب لها النجاح ، على الأقل في بيئتنا الأرضية . وبنفس الوقت لاتوجد هناك أي تجربة تضع حداً لفرضية الأثير وتجبرنا على قبول النسبية ، ولكن النتائج الموحدة لعدد كبير من التجارب تثبت عدم انسجامها مع أي فرضية أخرى . التجارب الأساسية الثلاثة هي* :

أولاً ـ انحراف ضوء النجوم (التغيير الصغير في الموقع الظاهري لنجوم بعيدة في اتجاه الحركة المدارية للارض) .
ثانياً ـ قياس سرعة الضوء في موائع متحركة (فيزو Fizeau 1859) .
ثالثاً ـ تجربة مايكلسن ـ مورلي Michelson-Morley (1887) .

تحاول تجربة مايكلسن ـ مورلي قياس سرعة الارض بالنسبة الى مرجع مطلق (الذي تنتشر به موجات الضوء بسرعة c) . النتائج المستحصلة من التجربة تشير الى عدم وجود مرجع مفضل أو أن تكون الارض في المرجع المفضل دائماً . وان هذه التجربة تبطل فرضية المرجع الاثيري المطلق ، نظراً لأن الارض تغير باستمرار سرعتها خلال حركتها حول الشمس . ومع ذلك ، فمن الممكن للارض أن تبقى في المرجع المفضل اذا ماهي سحبت الاثير معها . أي أن جسماً سماوياً ثقيلاً كالارض ربما يتمكن من سحب الأثير معه خلال حركته .

---

* نشير الى القاريء الراغب في دراسة تأريخ النظرية النسبية بتفصيل اكثر الى المراجع الآتية :

R. S. Shankland, "Michelson-Morley Experiment," *Am. J. Phys.* **32**, 16 (1964); A. Einstein, H. A. Lorentz, H. Minkowski, A. Weyl, *The Principle of Relativity* (Dodd, Mead and Co., New York, 1923); E. T. Whittaker, *History of the Theories of Aether and Electricity*, Vol. II (Philosophical Library, New York, 1951).

من جهة اخرى ، التجربتان الاوليتان بينتا عدم انسجامها مع فرضية "سحب الاثير" "ether drag" . ومن قياسات أجريت خلال فترة سنة واحدة ، لوحظ أن الموضع الظاهري لنجم يشكل مساراً بيضوياً صغيراً في القبة السماوية "celestial sphere" ، وان الانحراف الزاوي في الموقع يكون بحدود v/c ، حيث v تمثل الانطلاق المداري للارض . تخميناً يجب ان يكون هذا الانحراف في ضوء النجوم يساوي صفراً فيما اذا سحبت الارض الأثير معها خلال حركتها . ومن الممكن جعل التجارب التي تجرى بالموائع المتحركة منسجمة مع فرضية سحب الأثير اذا فرض (بالاحرى اصطناعياً) إنَّ اجساماً اقل ثقلاً من الارض تنجح جزئياً في سحب الأثير معها خلال حركتها .

17-2 تحويلات لورنتز وفرضيات أنشتين للنسبية الخاصة
The Lorentz transformation and Einstein's postulates of special relativity.

في عام 1904 وضع لونتز تحويلات متميزة وعجيبة والتي تجعل صيغ معادلات ماكسويل غير متغيرة وتمد مركبات المجال بتغيرات ملائمة لهذا الغرض . لنفرض مرة أخرى منظومتين من الاحداثيات Σ' و Σ اللتين تكونان في حالة حركة نسبية بينهما في اتجاه x وبسرعة منتظمة مقدارها **u** (راجع الشكل 1-7) . بدلاً من تحويلات غاليلو ، لنفرض الآن (تحويلات لورنتز)

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}(x-ut), \\ y' &= y, \qquad z' = z, \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\left(t-\frac{u}{c^2}x\right). \end{aligned} \tag{17-3}$$

مرة أخرى ، سنتجاوز السؤال عن كيفية إجراء التحويلات للمجالات الكهربائية والمغناطيسية ، ولندرس معادلة الموجة (2-17) . ولنعوض :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z'}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} \end{aligned}$$

في معادلة الموجة ، ونستخدم المعادلات (3–17) لإيجاد المشتقات الجزئية $(\partial x'/\partial x)$ و . . . وهلم جرا . فعلى سبيل المثال نجد أن :

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \frac{\partial x'}{\partial t} = -\frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

وبأجراء التعويضات المشار اليها وتوحيد الحدود واختصار المعادلات المشتركة من أطراف المعادلة ، نجد :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2}. \qquad (17\text{–}4)$$

بما أن هذه المعادلة متجانسة في φ ، فإن من المعقول التوقيع بأمكاننا استبدال φ بـ φ' (قيمة φ في منظومة الاحداثيات Σ') في المعادلة (4–17) بدون الاخلال بالمساواة . وبهذا ، فإن صيغة معادلة الموجة سوف لا تتغير باستخدام تحويلات لونتز .

بالاضافة الى ذلك ، فإن تحويلات لونتز أعطت العنصر الأساس لتطور النسبية الخاصة ، وإن النتائج الباهرة للنسبية لم تكن من وضع لونتز حيث كان الى ذلك الوقت يؤمن بفرضية الأثير ، وقد حاول جاهداً مطابقة اكتشاف تحويلاته الجديدة الى صورة الأثير للكهرومغناطيسية . التطور في النسبية الخاصة كما نفهمها الآن قد وضعت من قبل بوينكير وأنشتين .

بوقت مبكر من عام 1899 ومرة أخرى في عام 1900 وفي عام 1904 ، اقترح بوينكير أن النتيجة التجريبية لمايكلسون ومورلي (ونعني بها ، فشل التجربة لإظهار المرجع الأثيري المطلق) هي إظهار لمبدأ عام : إن الحركة المطلقة لا يمكن اكتشافها بأي من التجارب المختبرية ، وهذه تدل ضمناً على أن قوانين الطبيعة يجب ان لا تتغير لمراقبين في حالة منتظمة واحداً بالنسبة للآخر . وأطلق عليها « مبادىء النسبية » . واستنتج بوينكير أيضاً بانه ينبغي وضع نوع جديد من الديناميك الذي يتميز بالقاعدة التي تنص على أنه لا يمكن لسرعة أن تزيد على سرعة الضوء .

في عام 1905 نشر أنشتين بحثه الموسوم « الكهربائية الديناميكية للأجسام المتحركة » الذي وضح فيه بتفصيل النظرية النسبية الخاصة من خلال فرضيتين أساسيتين : أولاً ــ مبادىء النسبية ، وثانياً ــ ثبوت سرعة الضوء . اشتق

أنشتين طريقة لتحويل الكميات الفيزياوية المختلفة عند الانتقال من مرجع الى آخر ، وأوضح كذلك كيفية اجراء التعديلات اللازمة على قوانين نيوتن في الميكانيك وفقاً للنظرية .

فرضيات أنشتين هي :

أولاً ـ القوانين الطبيعية هي نفسها في كافة منظومات الاحداثيات المتحركة بحركة منتظمة الواحدة بالنسبة للأخرى .

ثانياً ـ سرعة الضوء في الفراغ هي نفسها في كافة المنظومات المرجعية وهي لاتعتمد على حركة الجسم المشع .

مرة اخرى نفرض منظومتين من الاحداثيات Σ و ′Σ في حالة حركة نسبية في اتجاه x وبسرعة منتظمة مقدارها **u** (انظر الشكل 1-17) . تتطابق نقطتا الأصل للمنظومتين عند الزمنين t = 0 و t′ = 0 ، لنفرض في تلك اللحظة صدور نبضة ضوئية من مصدر ضوئي موجود في نقطة الأصل المشتركة . يرى المراقب في المنظومة Σ عند استخدامه مكشافات ملائمة وضعت على أبعاد مختلفة من نقطة الأصل انتشار الاشارة الضوئية الى الخارج كجبهات موجة كروية . وإن احداثيات النقطة (x, y, z) الواقعة على جبهة الموجة تحقق المعادلة :

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0, \qquad (17\text{-}5)$$

في حين النقطة (z_1 و y_1 و x_1) الواقعة في مقدمة الجبهة الموجية (وعند نفس الزمن t) تحقق العلاقة :

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - c^2t^2 > 0, \qquad (17\text{-}6)$$

والنقطة (z_2 و y_2 و x_2) الواقعة في مؤخرة الجبهة الموجية تحقق العلاقة

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - c^2t^2 < 0. \qquad (17\text{-}7)$$

كذلك يرى المراقب الموجود في منظومة الاحداثيات ′Σ الأشارة الضوئية تنتشر الى الخارج ، ووفقاً لفرضيتي أنشتين فإنه يرى جبهة موجة كروية تنتشر بسرعة c . وبهذا فإن المعادلات (5-17) و (6-17) و (7-17) تصح أيضاً للاحداثيات (′Σ) .

وبما أن منظومتي الاحداثيات يفترض إرتباطها بعلاقة تحويلات خطية ، فإننا سنهتدي الى النتيجة الآتية* :

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 \qquad (17\text{-}8)$$

حيث (x, y, z, t) تمثل نقطة زمن ـ فضاء كيفية وإن (x', y', z', t') تمثل التحويل المكافيء في المنظومة (Σ') . وبهذا يمكننا أن نكتب :

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2(\Delta t')^2 \qquad (17\text{-}9)$$

للعلاقة الرياضية بين فترة زمن ـ فضاء كيفية في المنظومة Σ والفترة المناظرة لها في المنظومة Σ' .

بعد أن وجدنا كمية لاتتغير بتغير المرجع ، نفتش الآن عن التحويلات التي تبقي ''الكمية غير المتغيرة'' غير متأثرة . والواقع إن تلك التحويلات هي تحويلات لونتز نفسها . إن الكمية :

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

لاتتأثر بتحويلات لونتز ، المتمثلة بالمعادلة (3-17) ، كما يمكن إثبات عدم تأثرها بالتعويض المباشر . وهكذا ، فإن تطبيق فرضيتي أنشتين تقودنا مباشرة الى تحويلات لونتز .

فاذا كانت التحويلات اللورنتزية هي التحويلات اللائقة لتحويل الاحداثيات من مرجع الى آخر ، فان تحويلات غاليلو البديهية . المتمثلة بالمعادلة (1-17) ، لايمكن أن تكون صحيحة . وأن تحويلات غاليلو ليست قطعاً التحويلات الدقيقة ، ولكنها صيغة يصح تطبيقها على الحالات التي تكون فيها السرع صغيرة نسبةً الى سرعة الضوء . ولذلك ينبغي أيضاً تحوير ميكانيك نيوتن نظراً لأن القوانين الحركية الصحيحة يجب تحويلها بشكل صائب مستخدمين تحويلات لورنتز ، وليس بأستخدام تحويلات غاليلو .

---

* لايمكننا إهمال الاحتمالية بأن :

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = K(u)(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2)$$

حيث $K(u)$ ثابت تناسب يعتمد على u . وان اختيارنا كان للاحتمالية الأبسط والمباشرة . راجع المصدر التالي .

J. D. Jackson, *Classical Electro- dynamics* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962), p. 355.

سوف نناقش في البنود اللاحقة التحويلات النسبية بتفصيل أكثر وسوف نجد قوانين التحويل «transformation laws» لكميات فيزيائية أخرى . وقبل التقدم أكثر في الموضوع ، نتوقف لدراسة ثلاث نتائج بسيطة للتحويلات اللورنتزية هي : أولاً : تحوير لمفهوم الآنية «simultaneity» وثانياً : تقلص لورنتز «Lorentz contraction» ، ثالثاً : تمدد الزمن . «time dilation» .

يقال أن حادثتين قد وقعتا آنياً اذا ماحدثتا في نفس الوقت . وبما أن الحادثتين قد تقعان في مواقع متباعدة جداً ، فان هذا النص يقتضي ايجاد طريقة لتزامن ساعات توقيت بحيث يمكننا توقيت كل حادثةٍ بمعزل عن الاخرى .

والآن دعنا نفرض ان حادثتين قد وقعتا آنياً عند الموقعين x_1 و x_2 في المرجع Σ ، وهذا يعني أن الزمنين t_1 و t_2 لوقوع الحادثتين يكونان متساويين . ولكن اعتماداً على التحويلات اللورنتزية (3-17) ،فان الزمنين في منظومة المرجع Σ' لا يكونان متساويين .

$$t'_1 - t'_2 = \frac{(u/c^2)}{\sqrt{1-(u/c)^2}}[x_2 - x_1]. \qquad (17\text{-}10)$$

ولهذا ينبغي علينا تحوير مفهومنا البديهي للآنية ، وليكون بالشكل الآتي : اذا ماحصلت حادثتان آنياً في مرجع معين فإنه ليس من الضروري أن تكونا قد وقعتا في وقت واحد بالنسبة لمرجع آخر . وبقبولنا التحويلات اللورنتزية ، يصبح من الضروري أن نترك مفهوم « الزمن الكوني » «universal time» .

لنأخذ مثالاً بسيطاً لجعل هذه النقطة أكثر وضوحاً وقبولاً . أفرض قيام المراقب A برحلة مستخدماً مركبة فضائية تسير بسرعة u بالنسبة لمراقب أرضي B . يرغب المراقب A بأجراء تجربة تتضمن الكشف الآني لاشارة ضوئية صادرة عن موقعين مختلفين . ولتحقيق ذلك وضع هذا المراقب كاشفاً في مقدمة المركبة الفضائية وكاشفاً آخر عند مؤخرتها ، وعينّ بشكل دقيق المسافة بين الكاشفين ، وثبت كذلك مصدراً ضوئياً في منتصف المسافة بين الكاشفين . بما أن الاشارة الضوئية تنتشر على شكل موجات كروية من المصدر فان الكاشفين في الحقيقة يسجلان الاشارة في الوقت نفسه . ولكن ماذا عن المراقب B؟ ان هذا المراقب وهو في مرجعه يشاهد أيضاً الاشارة الضوئية تنتشر من المصدر في موجات كروية ولكنه يرى الكاشف المثبت عند مقدمة المركبة يتحرك مبتعداً عن جبهة الموجة المتمددة ، في حين يرى الكاشف المثبت عند المؤخرة يتحرك مقترباً من جهة الموجة . وبهذا فان تسجيل الكاشفان لايكون آنياً في منظومة مرجع المراقب B .

يطلق على التقلص الظاهري «apparent contraction» لجسم متحرك باتجاه حركته « تقلص لورنتز » . اعتيادياً لقياس طول جسم معين فانه يتعين علينا مقارنة طول الجسم بالنسبة الى مسطرة قياسية . ان هذه الطريقة لا تؤدي الى مشاكل في دقة القياس خاصة اذا كان الجسم والمسطرة مستقرين أحدهما بالنسبة للآخر . ومع ذلك ، أفرض ان مراقباً في المرجع Σ يرغب بقياس طول جسم متحرك (الجسم مستقر في المرجع Σ') . وبسبب أن الجسم في حالة حركة بالنسبة الى المراقب وجهاز قياسه للطول (المسطرة) ، فمن المهم مقارنة نهايتي الجسم بالنسبة الى المسطرة في الوقت نفسه ، وهذا يعني ، اذا كان موقع x_1 قد حدد عند الزمن t_1 و x_2 عند الزمن t_2 ، فيجب ان يكون t_1 يساوي t_2 لكي يكون قياس الطول ذا معنى . ولكن وفقاً لتحويلات لورنتز ، المعادلة (3-17) ، فان :

$$x_1' - x_2' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(x_1 - x_2) \qquad (17\text{-}11)$$

حيث ان $\beta \equiv u/c$. الآن ، $l' = x_1' - x_2'$ قد يعدُّ الطول « الحقيقي » «true» للجسم (طول الجسم المقاس من قبل مراقب مستقر بالنسبة للجسم) . وان طوله الظاهري «apparent» (الطول المرئي من قبل المراقب في المرجع Σ) يكون :

$$l = l'\sqrt{1 - \beta^2} \qquad (17\text{-}12)$$

ويظهر متقلصاً ، ومن السهل اثبات ان الابعاد العرضية للجسم ، أي تلك الابعاد الكائنة في الاتجاهين z, y ، لا يتأثر بالحركة .

تمديد الزمن ، يعني التباطؤ الظاهري للحوادث الزمنية المرافقة للجسم المتحرك . ويمكن ايجاده من المعادلة (9-17) والتي يمكن كتابتها بالصيغة الآتية :

$$(dt)^2\left[c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$
$$= (dt')^2\left[c^2 - \left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2 - \left(\frac{dy'}{dt'}\right)^2 - \left(\frac{dz'}{dt'}\right)^2\right]. \qquad (17\text{-}13)$$

اجعل Σ' منظومة الجسم المستقرة ، أي المنظومة التي يكون الجسم فيها مستقراً . وبهذا فان :

$(\text{velocity})_x' \equiv (dx'/dt') = 0$ وهلم جرّا ، وان :

$$u^2 = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right].$$

والمعادلة (13-17) تصبح :

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (17\text{-}14)$$

وهكذا فإن مدى الزمن الظاهري Δt (المدى المقاس من قبل المراقب في المرجع Σ) يظهر بأنه اطول من مدى الزمن الفعلي $\Delta t'$ "intrinsic time" . والنص الآخر لتفسير المعادلة (14-17) هو بقولنا إن ساعات التوقيت تظهر متباطئة عندما تكون في حالة حركة بالنسبة الى المراقب .

17-3 هندسة الفضاء ـ الزمن Geometry of Space-Time.

تحويلات لورنتز التي أشرنا اليها في البند السابق هي تحويلات خطية تربط احداثيات الفضاء والزمن لمرجع معين بالكميات المماثلة لها في مرجع آخر يكون في حالة حركة منتظمة بالنسبة للمرجع الاول . وهي بالتالي تبين بالامكان انشاء هندسة الأبعاد الأربعة "four-dimensional geometry" التي تظهر فيها احداثيات الفضاء والزمن على قدم المساواة . حيث ستمثل التحويلات اللورنتزية كنوع لعملية هندسية في هذا الفضاء ذي الابعاد الاربعة . لقد مرت علينا قبل قليل دالة رباعية معينة لاحداثيات الموقع والزمن ، وكان بالتحديد الدالة الآتية :

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2,$$

وهي دالة غير متغيرة ، أي لها القيمة نفسها في كافة المنظومات المرجعية . وهذه تعيد الى الذاكرة أن طول متجه . وعلى وجه التحديد طول متجه الموقع l ، هو :

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

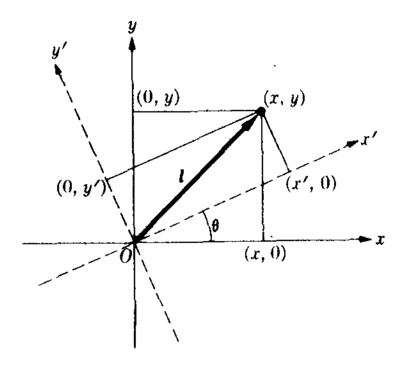
وانه غير متغير عند دوران الاحداثيات في الفضاء الاعتيادي (الفضاء ذو الأبعاد الثلاثة) .

اعتبر ، مثلاً ، أن تحويلات الاحداثيات قد وصفت بالصيغ الآتية :

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta,$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta, \qquad (17\text{–}15)$$
$$z' = z.$$

هذه التحويلات تصف دوران الاحداثيات حول المحور z وبزاوية مقدارها θ ، وبسبب هذا الدوران يتحول المحوران x و y الى المحورين x′ وy′ على التعاقب وكما موضح في الشكل (2–17) . ولقد ترك طول المتجه ، l . غير متغير نتيجة هذه التحويلات لأنها مؤكدة وواضحة من المعادلات (15–17) حيث :

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \qquad (17\text{–}16)$$



شكل 2–17 . دوران منظومة الاحداثيات في بعدين . الخط الغامق يمثل مسقط المتجه l في المستوي xy .

المعادلة (15–17) هي مثال لتحويلات متعامدة في ثلاثة أبعاد . التحويلات المتعامدة هي تحويلات حقيقية وتترك طول المتجه بدون تغيير . وان صفات التحويلات المتعامدة ستناقش تفصيلياً في البنود اللاحقة .

في محاولة توسيع هذه الصياغة لغرض تطبيقها على أربعة ابعاد ومعاملة :

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

كمربع الطول في فضاء ـ زمن نلتقي بالمشكلة الواضحة حيث المركبة الرابعة ، ct ، تدخل الصيغة بإشارة ناقص . هذا يعني أن الفضاء ـ الزمن هو أساساً فضاء ذو اربعة أبعاد غير اقليدي "non-Euclidean four dimensional space" . يمكننا تجاوز عدد من الصعوبات بتعريف الاحداثيات الاربعة كالآتي :

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = jct, \qquad (17-17)$$

حيث j يمثل وحدة العدد التخيلي "unit imaginary number" . هذا الفضاء ذو الأبعاد الاربعة (الذي وضع من قبل مينكوفسكي H. Minkowski) ليس اقليدياً لأنه تضمن احداثياً تخيلياً . ومن الممكن اشتقاق عدد من صفات هذا الفضاء' بمعالجته كفضاء اقليدي ، وهذه الطريقة ستستخدم هنا ، الكمية :

$$\sum_\mu x_\mu^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

غير متغيرة لتحويلات معينة . ولهذه التحويلات (التي تشتمل طبعاً التحويلات اللورنتزية) عدد من صفات التحويلات المتعامدة ، ولكونها تمتلك مركبات خيالية يطلق عليها بالتحويلات المركبة المتعامدة "complex orthogonal transformations" . ومع ذلك ، فإن ماسيعقب هذا التمييز من نتائج لا يكون ذا اهمية ، وإن احداثيات لورنتز في فضاء مينكوفسكي ستعالج كتحويلات متعامدة † .

الكمية المعرفة بالقيم (x_1, x_2, x_3, x_4) تمثل متجه رباعي الابعاد . وستتاح لنا فرصة مناسبة لتعريف متجهات أخرى ذات أربع مركبات [وهذا يعني ، الكميات التي تحول مركباتها كما (x_1, x_2, x_3, x_4) باستخدام تحويلات لورنتز] .

---

† بسبب الزيادة الحاصلة في استخدام الفضاءات المجردة في الفيزياء المعاصرة . فإنه يبدو من المناسب أن نشير الى مصدر الصعوبة في استخدام الفضاء "الاقليدي" لوصف فضاء مينكوفسكي والتحويلات "المتعامدة" لوصف تحويلات لورنتز . حيث كل من الاقليدية والمتعامدة تمثل أفكاراً وضعت لغرض التعامل بها مع متغيرات حقيقية . فإذا حاولنا التعميم بإدخال احداثيات مركبة ، فإن افضل تعميم مثمر لطول المتجه هو :

$$\left\{\sum_i x_i^* x_i\right\}^{1/2},$$

حيث x_i^* يمثل المترافق المركب لـ x_i . التحويلات التي تبقي هذا الطول غير متغير هي التحويلات الوحدوية . وتميز في البنود اللاحقة بالرمز الآتي :

$$\sum_i a_{ij} a_{ik}^* = \delta_{jk}.$$

وإن تحويلات لورنتز لاتقع ضمن هذا التصنيف وبالتالي فهي تتطلب تكوين أسلوب مختلف لتوضيحها بالكامل . هنالك فرق واحد حاسم بين فضاء مينكوفسكي وبين أي من الفضائين الوحدوي او المتعامد : وللفضائين الاخيرين يكون طول أي مركبة من مركبات المتجه أقل او مساوياً لطول المتجه نفسه . في حين لا يوضع مثل هذا التقييد على طول أي مركبة من مركبات المتجه الرباعي في فضاء مينكوفسكي . وبالمثل . تكون قيم كافة المعاملات في التحويلات الوحدية والمتعامدة اقل من او مساوية للواحد . ولكن هذا القول لا يكون صحيحاً بالنسبة لتحويلات لورنتز . وعلى الرغم من اهمية هذه النقاط فإن مناقشة الموضوع بتفصيل اكثر تقودنا الى التعمق في الموضوع اكثر مما ينبغي .

يطلق على المتجهات الرباعية الابعاد أسم « المتجهات الرباعية » «four vector» او « المتجهات الكونية » «world vector» لتمييزها عن المتجهات ثلاثية الابعاد الاعتيادية . الكمية التي لا تتغير بتحويلات لورنتز يطلق عليها « لا متجه كوني » . النقطة في فضاء ـ زمن يطلق عليها « نقطة كونية » «world point» ومسار الجسم في فضاء ـ زمن يطلق عليه « خط كوني » «world line» .

17-4 التحويلات المتعامدة في ثلاثة أبعاد :
Orthogonal transformations in three dimensions

من المناسب مناقشة التحويلات المتعامدة في الفضاء الاعتيادي ذي الابعاد الثلاثة . وبعد ذلك يمكن تطبيق نتائج هذا البند على الفضاء الاقليدي ذي الابعاد الاربعة وذلك باضافة الاحداثي الرابع x_4 . ولغرض الحصول على رموز متوحدة سوف نستخدم x_1, x_2, x_3 بدلاً من x, y, z .

تحويل الاحداثي يكون خطياً اذا أمكن اعطاء الاحداثيات الجديدة كمجموعة موحدة خطية للاحداثيات القديمة . وبالتالي فان :

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \tag{17-18}$$

أو

$$x'_i = \sum_j a_{ij}x_j \tag{17-18a}$$

تكون تحويلات خطية . من المفهوم ان الجمع في المعادلة المذكورة في اعلاه يمتد من j = 1 الى j = 3 . بالاضافة الى ذلك فان i يمكن ان تأخذ أياً من القيم 1, 2, 3 . وتوصف التحويلات بمجموعة المعاملات $\{a_{ij}\}$.

وتكون التحويلات متعامدة اذا أبقت طول متجه الازاحة (أو بمعنى آخر أبقت $\sum x_i^2$) غير متغير . لنفرض ان المعادلة (17-18a) هي تحويلات متعامدة ، فان

$$\sum_i (x'_i)^2 = \sum_k x_k^2. \tag{17-19}$$

ولكن :

$$(x_i')^2 = \sum_j \sum_k a_{ij} a_{ik} x_j x_k \qquad (17\text{–}20)$$

ومن ثم :

$$\sum_i (x_i')^2 = \sum_j \sum_k \sum_i a_{ij} a_{ik} x_j x_k. \qquad (17\text{–}21)$$

تتفق المعادلتان (19–17) و (21–17) عندما يتحقق الآتي :

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases} \qquad (17\text{–}22)$$

ويمكن كتابة المعادلة الاخيرة بتركيز اكثر باستخدام دلتا كرونيكر (Kronecker delta) δ_{jk} ، والذي عرف في البند (9–2) ، لتكون :

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}. \qquad (17\text{–}22a)$$

وان المعادلة (17–22a) تمثل الشرط الواجب فرضه لجعل التحويلات $\{a_{ij}\}$ متعامدة .

ومن السهل إثبات أن دوران الاحداثيات المتمثل بالمعادلة (15–17) يحقق هذا الشرط .

ويمكن التعبير عن التحويلات المتمثلة في المعادلة (18–17) بالرموز كالآتي :

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX}, \qquad (17\text{–}23)$$

حيث $\mathbf{X}'$ يمثل متجه الموقع المحول ذا المركبات (x_3', x_2', x_1') و $\mathbf{X}$ يمثل متجه الموقع الاصلي ذا المركبات (x_3, x_2, x_1) و $\mathbf{A}$ يمثل عامل المصفوفة «matrix operator» . والحقيقة ان $\mathbf{A}$. يمثل مصفوفة المعاملات $\{a_{ij}\}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \qquad (17\text{–}24)$$

واذا وضعنا المتجهات $\mathbf{X}'$ و $\mathbf{X}$ كمصفوفات عمودية ، يمكننا كتابة المعادلة (17-23) بالصيغة الآتية :

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{17-23a}$$

ونحصل على التحويلات (17-18) من المعادلة الاخيرة هذه بتطبيق القوانين المألوفة لضرب المصفوفات . وبهذا فان ، المصفوفة $\mathbf{A}$ المعطاة في العلاقة (17-24) والمعادلة (17-18a) تمثلان طريقتين متكافئتين لوصف تحويل الاحداثيات .

ان مقلوب التحويلات تعيد بنا مرة أخرى الى مجموعة الاحداثيات الاصلية . فاذا كان $\{b_{ij}\}$ هو مقلوب $\{a_{ij}\}$ ، فإن :

$$x_j = \sum_i b_{ji} x'_i. \tag{17-25}$$

وبدمج هذه العلاقة مع المعادلة (17-18a) ، نجد :

$$x_j = \sum_k \sum_i b_{ji} a_{ik} x_k,$$

والتي تعد بمثابة متطابقة ، فيما اذا تحقق الآتي :

$$\sum_i b_{ji} a_{ik} = \delta_{jk}. \tag{17-26}$$

المعادلة (17-26) تمثل الشرط الذي ينبغي توفره لكي يكون $\mathbf{B}$ مقلوب تحويل $\mathbf{A}$. بالإضافة الى ذلك ، إذا كان $\mathbf{A}$ يمثل تحويلات متعامدة فإن المعادلة (17-22a) تكون صحيحة . وتبين المقارنة بين المعادلة (17-22a) والمعادلة (17-26) بإنه إذا بنيت المصفوفة $\mathbf{B}$ بحيث :

$$b_{ji} = a_{ij}, \tag{17-27}$$

فإن $\mathbf{B}$ ستوصف التحويلات المقلوبة «inverse transformation» . ووفق المعادلة (17-27) فقد بنيت المصفوفة $\mathbf{B}$ من $\mathbf{A}$ باستبدال صفوفها «rows» مع أعمدتها «columns» . المصفوفة الجديدة يطلق عليها منقول $\mathbf{A}$ «transpose» وتعطى الرمز $\tilde{\mathbf{A}}$. وبهذا ، فإن مقلوب التحويلات المتعامدة تمثل منقول التحويلات الأصلية .

عَرّفنا في الفصل الأول دالة المتجه على انها كمية تمتلك إتجاهاً ومقداراً معاً عند أية نقطة في الفضاء . والتعريف البديل يمكن أن يكون كالآتي :
المتجه هو الكمية التي تحول مركباتها باستخدام التحويلات المتعامدة كمركبات متجه الموقع . مثلا ، إذا كانت $\mathbf{F}$ دالة متجه ، فإن تحويلها $\mathbf{F}'$ ينتج من التحويلات المتعامدة $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{AF}. \tag{17-28}$$

الدالات اللامتجهة لموقع ، مثل طول المتجه أو ناتج الضرب اللامتجه لمتجهين ، تكون غير متغيرة بالتحويلات المتعامدة .

بالإضافة الى الكميات المتجهة واللامتجهة ، هنالك كميات أخرى أكثر تعقيداً . واحدة من هذه الكميات هي الممتدة من الرتبة الثانية «second-rank tensor» أو للسهولة تسمى الممتدة ، والكمية الممتدة هي الكمية التي تعرف مركباتها برقمين سفليين ، فمثلاً ، مركبة الممتدة T هي T_{ij} ، حيث أن كل من i و j يمكنه أن يأخذ أية قيمة من القيم 1 ، 2 ، 3 ، ولقد مرَّ على القاريء سابقاً ممتدة عزم رباعي القطب Q_{ij} (البند 9-2) ، وكذلك ممتدة العزل الكهربائي «dielectric tensor» ϵ_{ij} للوسط المتباين الخواص (البند 15-3) . وهناك مثال آخر أكثر شيوعاً في الميكانيك هو ممتدة عزم القصور الذاتي «moment of inertia tensor» .

ويمكن التعبير عن العلاقة الخطية بين كميتين متجهتين بدلالة ممتدة من الرتبة الثانية . مثلاً : يمكن ربط علاقة الزخم الزاوي لجسم صلد $\mathbf{L}$ بسرعة الزاوية $\boldsymbol{\omega}$ بواسطة ممتدة عزم القصور الذاتي I :

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \tag{17-29}$$

أو

$$L_i = \sum_j I_{ij}\omega_j. \tag{17-29a}$$

ويمكن التعبير عن الممتدة نفسها بصيغة مصفوفة كالآتي :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \tag{17-30}$$

افرض أن المتجهين **F** و **X** مرتبطان بعلاقة خطية بواسطة العلاقة الممتدة الآتية :

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}\mathbf{X}. \tag{17-31}$$

فلو أجرينا التحويلات المتعامدة **A** ، فإن **X** ستتحول الى $\mathbf{X}'$ و **F** ستتحول الى $\mathbf{F}'$. وبالتالي سنتمكن من التعبير عن المعادلة (17-31) بدلالة المنظومة المحوَّلة . كالآتي :

$$\mathbf{F}' = \mathbf{T}'\mathbf{X}', \tag{17-32}$$

حيث $\mathbf{T}'$ تمثل تحول **T** . ولكن :

$$\begin{aligned} F'_i &= \sum_j a_{ij}F_j = \sum_j \sum_k a_{ij}T_{jk}X_k \\ &= \sum_j \sum_k \sum_m a_{ij}T_{jk}(\tilde{a})_{km}X'_m \\ &= \sum_m \Big[\sum_j \sum_k a_{ij}T_{jk}(\tilde{a})_{km}\Big]X'_m \end{aligned} \tag{17-33}$$

حيث :

$$(\tilde{a})_{km} \equiv a_{mk}.$$

ولجعل المعادلتين (17-32) و (17-33) متجانستين ، نكتب :

$$T'_{im} = \sum_j \sum_k a_{ij}T_{jk}(\tilde{a})_{km}. \tag{17-34}$$

وهذه المعادلة الأخيرة تمثل قانون التحويلات لممتدة الرتبة الثانية في حالة التحويلات المتعامدة . وتمثل كذلك قاعدة لضرب ثلاثة مصفوفات معاً لايجاد المركبات i و m للمصفوفة الناتجة . وهكذا فإن المعادلة (17-34) تكتب بالرموز بالصيغة الآتية :

$$\mathbf{T}' = \mathbf{A}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}. \tag{17-34a}$$

17-5 تحويلات لورنتز كتحويلات متعامدة :
The Lorentz transformation as an orthogonal transformation

يمكن تطبيق النتائج المستحصلة من البند السابق على زمن ـ فضاء ذي الأبعاد الاربعة وذلك بإضافة المركبة الرابعة ، $x_4 = jct$. وهنا ينبغي أن تؤخذ كافة علامات الجمع للقيم من واحد الى أربعة . ومن المألوف استخدام دلائل إغريقية «Greek indices» لوصف كميات ذات أربعة أبعاد ، ويحتفظ بالدلائل اللاتينية «Latin indices» للكميات ذات الأبعاد الثلاثة . مثلاً ، إن F_i تمثل المركبة i لمتجه اعتيادي ذي ثلاثة أبعاد ، في حين $T_{\mu\nu}$ تمثل المركبة ν و μ لمتدة ذات أربعة ابعاد .

تكتب التحويلات اللورنتزية (3-17) لتحويل المنظومة Σ الى منظومة Σ' (كما في الشكل 1-17) بالصيغ الآتية :

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\, x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \frac{j\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\, x_4, \\
x'_2 &= 0 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4, \\
x'_3 &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4, \\
x'_4 &= -\frac{j\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\, x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\, x_4,
\end{aligned}
\tag{17-35}
$$

حيث أن $\beta \equiv u/c$. وان مصفوفة هذه التحويلات هي :

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & j\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
-j\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{bmatrix}
\tag{17-36}
$$

يمكننا بسهولة إثبات أن المعادلة (36-17) هي تحويلات متعامدة* ، وهذا يعني أن مركباتها تحقق المعادلة (22-17) .

---

* استخدمنا التسمية "متعامدة" بدلاً من التسمية الاكثر صحة "متعامدة مركبة" ، لاحظ المناقشة في البند 3-17 .

المصفوفة A المتمثلة بالعلاقة (17-36) تعد بسيطة في هذه الحالة (إذ تمتلك فقط ستة مداخل غير صفرية)، لأن التحويلات اللورنتزية تمثل العلاقة بين منظومتين في حالة حركة نسبية على طول أحد محاور الاحداثيات (وعلى وجه التحديد المحور x). وهكذا، فإن x و t تتحولان الى x′ و t′ على الترتيب، في حين لا تتأثر اتجاهات z و y. في الحالة العامة، عندما لا تكون الحركة النسبية على طول محور احداثي معين، فإن التحويلات تصبح اكثر تعقيداً، ولكن تبقى مركبات المصفوفة تحقق العلاقة المتعامدة (معادلة 17-22). ونظر لأن اتجاهات الاحداثيات يمكن اختيارها لتلائم متطلبات سؤال معين، فسوف نقيد انفسنا في هذا الكتاب بتحويلات لورنتز المتمثلة بالصيغة (17-36)، أو بتحويلات تحدد العلاقة بين منظومتي الاحداثيات المبينتين في الشكل (17-1).

يمكن تفسير تحويلات لورنتز كدوران الاحداثيات في المستوي x_1x_4. فإذا كانت هذه هي الحالة المقصودة، فإن زاوية دوران الاحداثيات θ يمكن استخراجها من المعادلة الآتية:

$$x'_1 = x_1 \cos\theta + x_4 \sin\theta$$

أو

$$\tan\theta = j\beta = j(u/c). \tag{17-37}$$

وبهذا فإن زاوية الدوران ليست زاوية حقيقية*. رياضياً، يمكننا أن نستنتج أن تحويلات لورنتز تؤثر كتأثير دوران الاحداثيات في فضاء متعامد رباعي الابعاد، ولكن الدوران يكون بزاوية خيالية.

يمثل مقلوب تحويلات لورنتز، (أي، التحويلات التي تأخذنا من المنظومة Σ′ الى المنظومة Σ) بمنقول المصفوفة لـ (17-36)، وهو:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & -j\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ j\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix}. \tag{17-38}$$

* هذا يظهر عدم التحديد للتحويلات المشار اليها سابقاً.

17-6 الصيغة اللامتغيرة للمعادلات الكهرومغناطيسية :
Covariant form of the electromagnetic equations

إن المعادلات الأساسية للنظرية الكهرومغناطيسية (معادلات ماكسويل) التي نوقشت في الفصل الخامس عشر يمكن كتابتها بدلالة مشتقات الزمن والفضاء للمجالات E و B . في المنظومة المألوفة ذات الابعاد الثلاثة يدخل الزمن في المعادلات باعتباره كمية لا متجهة ، ولكن مشتقات الفضاء الثلاث الأخرى تدخل في المعادلات على شكل تراكيب معينة متناظرة (تتضمن عمليات الالتفاف او الانحدار) . ويمكننا عرض التناظر بشكل مباشر بكتابة معادلة التباعد (أي قانون كاوس) كالآتي :

$$\sum_i \frac{\partial E_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \qquad (17\text{-}39)$$

ومعادلة الالتفاف (أي قانون امبير) كالآتي :

$$\frac{\partial B_j}{\partial x_i} - \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = \mu_0 J_k + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial E_k}{\partial t}. \qquad (17\text{-}40)$$

والحقيقة إن المعادلة الأخيرة تمثل ثلاث معادلات (المركبات الثلاث لمعادلة التفاف المتجه) ، وان **i** و **j** و **k** ترمز الى x و y و z على الترتيب .

لقد لاحظنا في البنود السابقة أن تحويلات لورنتز مزيج بين احداثيات الفضاء والزمن وقد تعد كدوران للاحداثيات في فضاء – $x_1x_2x_3x_4$. وبهذا ، فإن x_1 و x_2 و x_3 و x_4 ينبغي أن تدخل معادلات ماكسويل بطريقة متماثلة . والحقيقة ينبغي أن نكون قادرين على كتابة معادلات ماكسويل بدلالة تباعدات والتفافات رباعية الأبعاد . وان صياغة المعادلات الكهربائية والمغناطيسية التي تعالج احداثيات الفضاء والزمن على قدم المساواة تسمى الصياغة اللامتغيرة . ويجب علينا مواصلة الموضوع باحتراس كبير لأن الكمية المتجهة ذات الابعاد الثلاثة ليست بالضرورة ان تكون جزءاً من متجه رباعي الأبعاد .

لنبدأ بمعادلة الاستمرارية :

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \qquad (17\text{-}41)$$

بما أن J_x و J_y و J_z ليست مستقلة عن كثافة الشحنة ρ ، فإن هذه الكميات الاربع تشكل متجهاً طبيعياً رباعياً . والحقيقة ، إذا عرفنا متجه كثافة التيار الرباعي "four-vector current density" بدلالة مركباته $(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3,$ $\mathfrak{J}_4 = jc\rho)$ سنتمكن من كتابة معادلة الاستمرارية بصياغة لا متغيرة كالآتي :

$$\sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{J}_\nu}{\partial x_\nu} = 0, \qquad (17\text{–}42)$$

حيث يغطي الجمع كل القيم من $\nu = 1$ الى $\nu = 4$ ، كما يمكن كتابتها بالصيغة الآتية :

$$\text{Div}\,(\mathfrak{J}) = 0, \qquad (17\text{–}42a)$$

الآن الجهد المتجه $\mathbf{A}$ والجهد اللامتجه φ يحققان معادلة الموجة غير المتجانسة :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J}, \\ \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\epsilon_0}\rho. \end{aligned} \qquad (17\text{–}43)$$

بما أن $\mathbf{J}$ و ρ يمثلان مركبات المتجه الرباعي ، فان المعادلة (43–17) يجب ان تمثل المركبات الاربع لمعادلة المتجه الرباعي . وينبغي كذلك دمج $\mathbf{A}$ و φ لتشكيل المتجه الرباعي . فاذا عَرّفنا الجهد الرباعي «four-potential» أو الجهد الكوني «world potentil» Φ_λ بدلالة مركباته الاربعة الآتية :

$$\Phi_1 = A_1, \Phi_2 = A_2, \Phi_3 = A_3, \Phi_4 = j\varphi/c,$$

فمن الممكن كتابة المعادلتين (43–17) بالصيغة الآتية :

$$\sum_\nu \frac{\partial^2 \Phi_\lambda}{\partial x_\nu^2} = -\mu_0 \mathfrak{J}_\lambda. \qquad (17\text{–}44)$$

كما يمكننا التعبير عنها كالآتي :

$$\Box \mathbf{\Phi} = -\mu_0 \mathfrak{J}, \qquad (17\text{–}44a)$$

حيث يمثل :

$$\Box \equiv \nabla^2 - (1/c^2)\partial^2/\partial t^2\,;$$

عامل لابلاس الرباعي الابعاد . ان شرط لورنتز المتمثل بالمعادلة (93-15) يأخذ الصيغة الآتية :

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\nu} = 0. \tag{17-45}$$

نحن الآن في مرحلـــة من الموضوع تمكننـــا من دراسة مركبـــات المجـــال الكهرومغناطيسي . وهذه المركبات يمكن ايجادها من المعادلات الاعتيادية ذات الابعاد الثلاثة الآتية :

$$\mathbf{B} = \mathrm{curl}\, \mathbf{A}, \tag{15-87}$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\, \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot \tag{15-90}$$

ولكن $j\varphi/c$ و $\mathbf{A}$ يشكلان متجهاً رباعياً ، ولهذا فان المعادلة الاخيرة يمكن كتابتها (بصيغة المركبات) كالآتي :

$$j\frac{1}{c}E_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} - \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1}, \tag{17-46}$$

... وهلم جرا . وهكذا فان $j\mathbf{E}/c$ و $\mathbf{B}$ معاً يشكلان التفاف $\mathbf{\Phi}$ رباعي الابعاد .

ان تطبيق عملية التفاف المتجه تنتج عنها ممتدة غير متناظرة* . وهذه واضحة من صيغة المعادلة (46-17) نظراً لوجوب وضع كمية بدليلين . نعرف ممتدة المجال الكهرومغناطيسي $\mathbf{F}$ بالصيغة الآتية :

---

* للمتدة غير المتناظرة ذات الابعاد الثلاثة ثلاث مركبات مستقلة T_{12}, T_{23}, T_{31} ، وتحول هذه المركبات بأستخدام دوران فضائي مثل مركبات المتجه . وبالتالي ، فان معالجة التفاف المتجه كمتجه تكون على نحو مُرْضٍ . لممتدة غير متناظرة .، لاحظ ان :

$T_{12} = - T_{21} \cdot T_{11} = O$ ... وهلم جرّا

للممتدة غير المتناظرة ذات الابعاد الاربعة ست مركبات مستقلة ، وان ميزة التمدد للكمية لايمكن تبسيطها .

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu}. \tag{17-47}$$

حيث

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0,$$
$$F_{14} = -F_{41} = -jE_1/c,$$
$$F_{24} = -F_{42} = -jE_2/c,$$
$$F_{34} = -F_{43} = -jE_3/c,$$
$$F_{12} = -F_{21} = B_3,$$
$$F_{23} = -F_{32} = B_1,$$
$$F_{31} = -F_{13} = B_2.$$

وقد تكتب بصيغة مصفوفة كالآتي :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & \frac{-jE_1}{c} \\ -B_3 & 0 & B_1 & \frac{-jE_2}{c} \\ B_2 & -B_1 & 0 & \frac{-jE_3}{c} \\ \frac{jE_1}{c} & \frac{jE_2}{c} & \frac{jE_3}{c} & 0 \end{bmatrix} \tag{17-48}$$

لنأخذ الآن تباعد ممتدة المجال . وبسبب صيغتها المتمثلة بالمعادلة (17-47) نجد :

$$\sum_\nu \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sum_\nu \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\nu} - \sum_\nu \frac{\partial^2 \Phi_\mu}{\partial x_\nu^2}. \tag{17-49}$$

وبضوء المعادلات (17-44) و (17-45) ، تصبح :

$$\sum_\nu \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 \mathfrak{J}_\mu \tag{17-50}$$

أو

$$\text{Div}\, \mathbf{F} = \mu_0 \mathfrak{J}. \tag{17-50a}$$

هذه معادلة متجه رباعي تمثل الصياغة اللامتغيرة لمعادلتين من معادلات ماكسويل ، وبالتحديد :

$$\text{div}\, \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad \text{و} \quad \text{curl}\, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + (1/c^2)\partial \mathbf{E}/\partial t.$$

بالاضافة الى ذلك يمكننا ايجاد المتطابقة الآتية :

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0, \qquad (17\text{-}51)$$

حيث تأخذ μ و ν و λ قيماً مختلفة وتمثل أي ثلاثة من الرموز الدليلية 4,3,2,1 . وان المعادلة (17-51) تنتج مباشرة من صيغة $F_{\mu\nu}$ (المعادلة 17-47) . ويمكننا بسهولة اثبات ان المعادلة (17-51) تمثل معادلتي ماكسويل الاخريين .

17-7 خلاصة الصياغة اللامتغيرة
Summary of the covariant formulation

في هذا البند سنلخص النتائج المستحصلة من البند السابق .

المتجهات الرباعية :

فضاء - زمن $\mathbf{x} = (x, y, z, jct),$

شحنة - تيار $\mathfrak{J} = (J_x, J_y, J_z, jc\rho),$

الجهد $\mathbf{\Phi} = (A_x, A_y, A_z, j\varphi/c).$

ممتدة المجال :

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu}.$$

معادلات ماكسويل :

$$\sum_\nu \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 \mathfrak{J}_\mu, \qquad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0.$$

معادلة الموجة للجهد :

$$\sum_\nu \frac{\partial^2 \Phi_\mu}{\partial x_\nu^2} = -\mu_0 \mathfrak{J}_\mu.$$

شرط لونتز :

$$\sum_\nu \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\nu} = 0.$$

معادلة الاستمرارية :

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{J}_\nu}{\partial x_\nu} = 0.$$

تتميز غالبية الكتب المتقدمة في موضوع نسبية النظرية الكهرومغناطيسية بأحتوائها على الرموز بشكل مكثف ، وذلك لاستخدامها مايعرف بمصطلح الجمع ، ففي هذا النمط من الصياغة الرياضية تحذف كافة اشارات الجمع ، ولكن الجمع موجود ضمناً من خلال تكرار الرمز الدليلي . وهكذا فان معادلة الاستمرارية ، مثلاً ، تصبح :

$$\frac{\partial \mathfrak{J}_\nu}{\partial x_\nu} = 0,$$

وان معادلة المؤجة للجهد تصبح :

$$\frac{\partial^2 \Phi_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\nu} = -\mu_0 \mathfrak{J}_\mu.$$

وبالتناظر يمكننا كتابة بقية المعادلات . في هذا الكتاب سوف لانتسخدم مصطلح الجمع ، ومع ذلك فقد أشرنا هنا الى هذا المصطلح لمساعدة القاريء في التوسع بدراسة الموضوع .

17-8 قوانين تحويلات المجال الكهرومغناطيسي
Tonsformation law for the electromagnetic field

بما أن المجال الكهرومغناطيسي كمية ممتدة حسب الصياغة رباعية الابعاد ، فان بالامكان تحويل مركباته مثلما تحول مركبات الممتدات ذات الرتبة الثانية باستخدام تحويلات لورنتز :

$$F'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} a_{\mu\alpha} a_{\nu\beta} F_{\alpha\beta}. \qquad (17\text{-}52)$$

هذه المعادلة هي نفسها المعادلة (17-34) ، وقد أعيدت كتابتها لتشمل الحقيقة المتمثلة في العلاقة $(\tilde{a})_{\beta\nu} = a_{\nu\beta}$.

لنأخذ مرة أخرى المنظومة Σ' ولتكن متحركة بسرعة u في اتجاه x بالنسبة الى المنظومة Σ . تعطى تحويلات لورنتز ، بالمعادلة (36-17) ، وبهذا :

$$B'_x = F'_{23} = \sum_\alpha \sum_\beta a_{2\alpha} a_{3\beta} F_{\alpha\beta}$$

$$= F_{23} = B_x, \tag{17-53}$$

و

$$B'_y = F'_{31} = \sum_\alpha \sum_\beta a_{3\alpha} a_{1\beta} F_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} F_{31} + j \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} F_{34}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} [B_y + (\beta/c)E_z]. \tag{17-54}$$

وبالمثل يمكننا ايجاد :

$$B'_z = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^3}} [B_z - (\beta/c)E_y]. \tag{17-55}$$

وفيما يتعلق بالمجال الكهربائي فان :

$$E'_x = jcF'_{14} = jc \sum_\alpha \sum_\beta a_{1\alpha} a_{4\beta} F_{\alpha\beta}$$

$$= jc\left[-\frac{j\beta}{1-\beta^2} F_{11} + \frac{1}{1-\beta^2} F_{14} + \frac{\beta^2}{1-\beta^2} F_{41} + \frac{j\beta}{1-\beta^2} F_{44}\right]$$

$$= \frac{jc}{1-\beta^2}\left[-j\frac{E_x}{c} + \beta^2 j \frac{E_x}{c}\right] = E_x. \tag{17-56}$$

وأخيراً نثبت صحة العلاقتين :

$$E'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} [E_y - c\beta B_z], \tag{17-57}$$

$$E'_z = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} [E_z - c\beta B_y]. \tag{17-58}$$

وبهذا يتضح ان مركبات E و B باتجاه الحركة لاتتأثر ، بيد أن المركبات المستعرضة قد أخذت شكلاً جديداً .

ومن الممكن تلخيص النتائج المستحصلة في اعلاه بالمعادلات الثلاثية الابعاد الآتية :

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \qquad \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}[\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}];$$
$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \qquad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\mathbf{u}\times\mathbf{E}\right], \tag{17-59}$$

حيث تعني $\parallel$ المركبات الموازية للسرعة $\mathbf{u}$ في حين $\perp$ تعني المركبات العمودية عليها للتحويلات اللورنتزية .

ويمثل مقلوب التحويلات بوضوح بالصيغ الآتية :

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel}, \qquad \mathbf{E}_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}[\mathbf{E}'_{\perp} - \mathbf{u}\times\mathbf{B}'];$$
$$\mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B}'_{\parallel}, \qquad \mathbf{B}_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\mathbf{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2}\mathbf{u}\times\mathbf{E}'\right]. \tag{17-60}$$

وبهذا ننهي مناقشتنا لقانون تحويلات مركبات المجال الكهرومغناطيسي . وسوف نستخدم هذه النتائج في البند القادم .

17-9 المجال الناشيء عن شحنة نقطية متحركة بانتظام :
The field of a uniformly moving point charge.

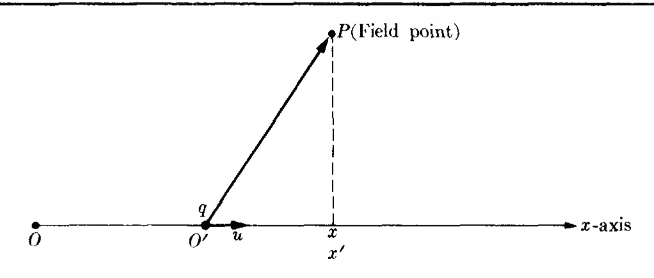
لكي نبين فائدة تحويلات لونتز سوف نحسب المجالات الكهربائية والمغناطيسية الناشئة عن شحنة نقطية في حالة حركة منتظمة . لنفرض الشحنة النقطية q تتحرك بالسرعة u على طول الاحداثي x ، كما هو مبين في الشكل (3-17) . لنفرض أن منظومة احداثيات ثانية (Σ') تكون في حالة حركة برفقة الشحنة ، ولنجعل نقطة الأصل لهذه المنظومة ، $0'$ ، تنطبق على موقع الشحنة .

في المنظومة Σ' ، تعدُّ الشحنة في حالة سكون ، لذلك تكون المجالات عند نقطة المجال P كالآتي :

$$\mathbf{B}' = 0,$$
$$\mathbf{E}' = \frac{q\mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0 (r')^3}. \tag{17-61}$$

ويمكن ايجاد المجالات في منظومة المختبر باستخدام (60-17) . لذا ،

$$E_x = E_{\parallel} = E'_x = \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 (r')^3}, \qquad \mathbf{E}_{\perp} = \gamma\mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\gamma q\mathbf{r}'_{\perp}}{4\pi\epsilon_0 (r')^3}, \tag{17-62}$$



شكل (3-17) . منظومة الاحداثيات المستخدمة لايجاد المجالات الكهربائية والمغناطيسية الناشئة عن شحنة في حالة حركة منتظمة . الخط الغامق ، qP ، يمثل متجه المصدر ــ مجال (ونعني به′r في المنظومة ′Σ و R في منظومة المختبر Σ) . و x يمثل الاحداثي في منظومة المختبر Σ و′x يمثل الاحداثي في المنظومة ′Σ .

حيث $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$. الآن من المعادلة (3-17) ينتج :

$$x' = \gamma(x - ut), \qquad y' = y, \qquad z' = z,$$

حيث يمثل t الزمن المنقضي «time elapsed» (في منظومة المختبر) من اللحظة التي تنطبق عندها نقطتي الأصل للمنظومتين . وبهذا فإن المتجه ′r يمثل بدلالة مركباته كالآتي :

$$\mathbf{r}' = \{\gamma(x - ut), y, z\}. \tag{17-63}$$

من المناسب تعريف الكمية * R بالصيغة ،

$$\gamma\mathbf{R}^* = \{\gamma(x - ut), y, z\}. \tag{17-64}$$

وبهذا فإن المعادلة (62-17) تصبح ،

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma(x - ut)}{\gamma^3(R^*)^3},$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma y}{\gamma_3(R^*)^3}, \tag{17-65}$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma z}{\gamma^3(R^*)^3}$$

أو

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{R}}{(R^*)^3}(1 - \beta^2), \qquad (17\text{-}65a)$$

حيث يعرف $\mathbf{R}$ بالصيغة الآتية :

$$\mathbf{R} = \{x - ut, y, z\}. \qquad (17\text{-}66)$$

يكون المجال الكهربائي بالاتجاه الشعاعي الى الخارج من الموقع الآني للشحنة النقطية ، ولكن على خلاف الحالة الاستكاتيكية حيث إن المجال لايبقى في حالة تماثل كروي . والحقيقة إن المجال الناشيء عن شحنة متحركة بسرعة عالية يتركز بشدة في المستوي العمودي على حركتها .

يعطى المجال المغناطيسي بالصيغة الآتية :

$$\begin{aligned} B_x &= B_\parallel = 0, \\ B_\perp &= \gamma\frac{1}{c^2}\mathbf{u}\times\mathbf{E}' = \gamma\frac{1}{c^2}\mathbf{u}\times\mathbf{E}'_\perp \qquad (17\text{-}67) \\ &= \frac{1}{c^2}\mathbf{u}\times\mathbf{E}_\perp \end{aligned}$$

أو

$$B = \frac{1}{c^2}\mathbf{u}\times\mathbf{E}. \qquad (17\text{-}67a)$$

وان خطوط المجال المغناطيسي تشكل دوائر تقع مراكزها على خط مسار الشحنة .

مسائل

17-1 : حول معادلة الموجة الى منظومة الاحداثيات Σ' باستخدام تحويلات غاليلو المتمثلة بالمعادلة (17-1) . ثم أثبت أن :

$$\varphi = F\{x - (c - u)t\} + G\{x + (c + u)t\},$$

يمثل حلاً للمعادلة المحولة ، حيث F و G يمثلان دالتين كيفيتين لزاويتيهما .

17-2 : بإجراء تحويلات لورنتز مرتين متعاقبتين ، أولاً لمنظومة الاحداثيات Σ' المتحركة بسرعة u بالنسبة الى المنظومة Σ ، ومن ثم لمنظومة الاحداثيات Σ'' المتحركة بسرعة u' بالنسبة الى Σ' ، أثبت قاعدة الجمع النسبي للسرع :

$$u'' = \frac{u + u'}{1 + uu'/c^2}.$$

17-3 : لديك مجال كهربائي منتظم **E** وآخر مغناطيسي منتظم **B** . أوجد تحويلات لورنتز التي تجعل كلاً من **E** و **B** موازياً للآخر . [ملاحظة : خذ سرعة المنظومة Σ' ، ولتكن **u** ، باتجاه عمودي على كل من **E** و **B** واوجد مقدار $u/(1 + \beta^2)$ بدلالة E^2 و B^2 و $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

17-4 : المعادلة (30-2) تمثل المجال الكهربائي الناشيء عن سلك مستقيم طويل يحمل شحنة قدرها λ (شحنة لوحدة الطول) . أنجز تحويلات لورنتز لمنظومة تتحرك بسرعة **u** بإتجاه موازٍ للسلك . احسب المجال B في المنظومة الجديدة وقارن النتيجة مع المجال B الناشيء عن سلك حاملٍ لتيار كهربائي المتمثل بالمعادلة (35-8) . هل يوجد مجال كهربائي في المنظومة المتحركة ؟ ما هو الفرق الفيزيائي بين سلك مشحون متحرك بأتجاه إمتداد طوله وسلك حامل للتيار الكهربائي؟

17-5 : أثبت عدم تغير الضرب اللامتجه **E. B** بتحويلات لورنتز . أثبت نفس الشيء لـ $E^2 - c^2B^2$.

17-6 : أوجد متجه بوينتنك للشحنة النقطية المتحركة بانتظام الموضحة في البند (17-9) ، وأثبت أن مقدار القدرة الكلية المنبعثة تساوي صفراً .

الفصل الثامن عشر

الصفات الكهرومغناطيسية للمواد مفرطة التوصيل
ELECTROMAGNETIC PROPERTIES OF SUPERCONDUCTORS

18-1 نبذة تأريخية عن التوصيل المفرط
The history of superconductivity

لوحظ التوصيل المفرط لأول مرة عام 1911 من قبل العالم أج كامرلين أونس H. Kammerlingh Onnes في ليدن ، أكتشف أونس لعينة من الزئبق عند تبريدها إختفاء مقاومته فجأة وبالكامل ظاهرياً عند درجة الحرارة 4.2 °K . في تجارب أكثر حساسية مستخدماً تياراً دائماً محتثاً في دارة من سلك مفرط التوصيل ، قدرّ العالم أونس المقاومة في حالة التوصيل المفرط نحو 10^{-12} من المقاومة في الحالة الاعتيادية . وحديثاً ، في معهد ماساشوستس للتكنلوجيا ، وجد أن تياراً محتثاً مقداره عدة مئات من الأمبيرات يسري في حلقة من الرصاص المفرط التوصيل ولم يحدث تغير فيه لفترة لا تقل عن سنة كاملة ، وهذا برهان قوي أن المقاومة فعلاً تساوي صفراً في حالة التوصيل المفرط . فتحت التجارب الحديثة المجال واسعاً في السعي لدراسة ووصف الظاهرة الجديدة . ولقد وجد على الأقل (22) عنصراً ومئات من السبائك والمركبات المعدنية المسماة «intermetallic» هي مفرطة التوصيل وذات درجات حرارة إنتقالية «transition temperature» تتراوح من أقل من 1 °K (مثلاً 0.37 °K لعنصر الهافنيوم hafnium) الى حوالي 18 °K للمركب Nb_3Sn . ودرجة الحرارة الانتقالية (أو درجة الحرارة

الحرجة critical temperature) ، هي درجة الحرارة التي يتم فيها التحول من الحالة الاعتيادية للمادة الى الحالة مفرطة التوصيل ، وهي صفة مميزة للمادة قيد الدرس . تعتمد درجة الحرارة الحرجة الى حد ماعلى النقاوة الكيمياوية وجودة التعدين للعينة تحت الفحص . والحقيقة إن عدم التجانس في النقاوة والاجهاد للعينة يفضي الى توسع مدى درجة حرارة التحول من الحالة الاعتيادية الى حالة فرط التوصيل ، وقد يكون المدى لدرجة الحرارة الحرجة لعينة نقية وملدّنة بشكل جيد صغيراً الى حد كبير وقد لا يتجاوز $0.001\,^{o}K$.

لقد وجد أن عينة من سلك مفرط التوصيل يصبح بالحالة الإعتيادية لو سلط عليه مجال مغناطيسي كبير نسبياً بصورة موازية للسلك . وان مقدار المجال الذي يسبب التحول يعتمد على المادة ودرجة الحرارة ويطلق عليه المجال الحرج «critical field». فاذا سلط مجال على عينة و في أي اتجاه ،فإن العينة تبدأ بالتحول الى الحالة الطبيعية عندما يصل المجال الحقيقي عند أي نقطة من نقاط السطح الى المجال الحرج . والرسم البياني « المجال ــ درجة الحرارة » يعبر أساساً عن المغزى الثرموداينميكي نفسه كما في حالة الرسم البياني « الضغط ــ درجة الحرارة » المألوف لحالات المادة . والمنحني البياني قد يعدّ كحد الطور بين الحالات الثرموداينميكية الاعتيادية والمفرطة التوصيل . وشكل المنحني البياني يكون عموماً قطعاً مكافئاً «parabolic» ويمثل بتقريب جيد بالمعادلة الآتية :

$$H_c = H_0[1 - (T/T_c)^2],$$

حيث ان H_c يمثل المجال الحرج و T تمثل درجة الحرارة المطلقة (أو درجة حرارة كلفن) و T_c و H_o يمثلان مميزات العينة (وهما درجة الحرارة الحرجة عند مجال مقداره صفر والمجال الحرج عند درجة حرارة الصفر المطلق على الترتيب) . بالإضافة الى توسيع مدى الانتقال لعدم التجانس تأثيراًواضحاً على H_o كذلك ، حيث يؤدي الى زيادتها أحياناً بمضاعفات العشرة . ومثل هذه التأثيرات ذات اهمية كبيرة في التطبيقات التي تستخدم فيها المجالات المغناطيسية الكبيرة .

في التاريخ المبكر للتوصيلة المفرطة ، نلاحظ أن تطبيق معادلات ماكسويل للموصل التام تقود الى الاستنتاج بأن المعدل الزمني للتغير في الحث المغناطيسي في داخل المادة المفرطة التوصيل يجب أن يكون صفراً وبالتالي فإن هذا الاستنتاج يعتمد على ما اذا بُرّدت العينة الى درجة حرارية أوطأ من درجة حرارة التحول سواء عند وجود المجال المغناطيسي المؤثر أم عند عدم وجوده ، والفيض المغناطيسي يجب أن يؤخذ أو يستثنى . وهذه الفكرة كحقيقة ثابتة لم تكن معروفة

حتى عام 1933 (أي بعد 22 سنة من اكتشاف التوصيلية المفرطة) حيث سُجلت تجريبياً لأول مرة من قبل مايشنر (W. Miessner) و أوخسنفلد (R. Ochsenfeld). وقد اثبتت النتائج المستحصلة من تجاربها أن تلك الفرضية خاطئة، وانه في كافة الحالات، بصرف النظر عما اذا بُرّدت العينة بوجود المجال المغناطيسي أو بعدم وجوده، فإن الحث المغناطيسي للموصل المفرط تساوي صفراً. يطلق على هذه الظاهرة «إقصاء الفيض المغناطيسي» «flux exclusion» أو ظاهرة مايشنر «Meissner effect»، كما هو اكثر شيوعاً. النص المكافىء الأساس هو أن الموصل المفرط يتصرف كأنه ذو نفوذية مغناطيسية تساوي صفراً أو ذات قابلية تمغنطية دايامغناطيسية تامة. هذا النص يجعل من السهولة ملاحظة أن لشكل العينة تأثيرات مهمة، وأن هذه التأثيرات تكون بسيطة عندما تكون العينة بشكل إسطوانة طويلة ذات محور موازٍ للمجال المغناطيسي المؤثر. إنَّ الأهمية الرئيسة لظاهرة مايشنر هي انها توضح أن الموصل المفرط يميز بدلالة صفات كهرومغناطيسية اكثر تعقيداً من التوصيل النوعي اللانهائي البسيط. وأي تفسير أو تعليل ناجح للتوصيلة المفرطة يجب أن يتجاوز هذه الصعوبة بطريقة طبيعية.

من وجهة النظر النظرية، لقد أجريت دراسات كثيرة، ابتداء من التطبيق الثرموداينميكي على الانتقال من قبل كيسوم W.H. Keesom في وقت مبكر من عام 1924. وأعقبت تلك الدراسات تفسير ظاهراتي لانتقال الرتبة الثانية وصفات أخرى تستند الى نموذج "ذي المائعين" المكتشف من قبل جورتر (C.J. Gorter) وكاسيمير (H.B.G. Casimir) في عام 1934. ثم جاءت بعد ذلك النظرية الظاهراتية "phenomenological theory" للصفات الالكتروَديناميكية للموصلات المفرطة الموضوعة من قبل لندن (F. and H. London) في عام 1935، التي فيها أضيفت معادلتان الى معادلات ماكسويل لتعليل وتفسير ظاهرة مايشنر. في هذا الفصل سوف نركز اهتمامنا أساساً على معادلات لندن، ومنذ عام 1935 وحتى اكتشاف ظاهرة النظير "isotope effect" في عام 1950* انجزت ابحاث نظرية قليلة. ومن ناحية ثانية، في عام 1950 أكتشف فروهليخ (H. Frohlich) نظرية تستند الى التأثير المتبادل للالكترونات مع الذرات المتذبذبة في التركيب البلوري، والتي تفسر ظاهرة النظير ولكنها فشلت في تنبؤ

---

* بنيت تجارب منجزة على عناصر مفرطة التوصيل ذات تراكيب نظيرية متغيرة بأن $T_c M^{1/2} \approx c$ حيث c مقدار ثابت و M كتلة النظير. التجربة الأولى أجريت من قبل ماكسويل (E. Maxwell) ورينولدز (C.A. Reynolds). هذه الظاهرة يطلق عليها "ظاهرة النظير" وان مفتاح الحل فيها هو ان التأثير المتبادل بين الكترونات التوصيل المفرط وقلب الايون للتركيب البلوري يلعب الدور المهم في التوصيلية المفرطة.

الخواص الأخرى لحالة التوصيل المفرط . وحديثاً في عام 1957 وضع باردين (J. Bardeen) ، وكوبر (L.N. Cooper) وشريفر (J.R. Schrieffer) نظرية مجهرية أو نظرية ميكانيكية ـ كمية للتوصيل المفرط ، التي لاقت نجاحاً باهراً . وهذه النظرية عللت بطريقة طبيعية حالة تحول الدرجة الثانية ، ظاهرة مايشنر ، والصفات الثرموداينميكية والكهرومغناطيسية الأخرى للموصلات المفرطة .

ومع ذلك ، هنالك عدة مواطن ضعف في نظرية (باردين وكوپروشريفر) : اولاً إن ظاهرة النظير في الروثينيوم غير قابلة للقياس كما يبدو ، وهذا مايتناقض بشكل مباشر مع النظرية . ثانياً : النظرية لاتتنبأ بتلك المواد التي من الممكن أن تكون مفرطة التوصيل أو لاتكون . وإنها عاجزة في تنبؤ حقيقة أن بعض المواد لها مجالات حرجة والتي قد تكون عالية جداً وبحدود 500 كيلوكاوس . لهذه الأسباب ولأسباب اخرى ، فإن من الظاهر أن يكون هناك تقنية أخرى لايجاد التأثير المتبادل بين الالكترونات والتي تسبب التوصيلية المفرطة ، ففي هذا المجال مازال البحث النظري مستمراً في التقدم .

من الواضح أن موضوع التوصيل المفرط قد تطور الى المرحلة التي تتطلب دراستها سنوات عديدة لكي تفهم كافة تشعبات الموضوع . ومع ذلك ، فإن النظرتين المتنامتين ، نظرية كاسيمير ـ كروتر ونظرية لندن ، تشكلان معاً النظرية الاكثر ملاءمة لدراسة عدد من المشاكل المشتملة على موصلات مفرطة . نظرية كاسيمير ـ كروتر تبحث أساساً في الاسئلة الثرموداينميكية ، وبناء على ذلك ، فإنها تكون ذات أهمية سطحية هنا فقط . من ناحية ثانية ، فإن نظرية لندن قدمت إضافة من الناحية النظرية الى معادلات ماكسويل لغرض بناء النظرية الكهرومغناطيسية التي تكون مؤهلة للبحث في الحالات المشتملة على موصلات مفرطة . تتعلق مادة هذا الفصل بتطور نظرية لندن وتطبيقاتها على حالات متعددة بسيطة ونحاول في هذا الفصل وضع وتوفير الأسس النظرية لدراسة المشاكل الكهرومغناطيسية المشتملة على موصلات مفرطة ، مفضلين ذلك على تحري النظريات الحديثة للتوصيلية المفرطة .

18-2 التوصيل النوعي التام والدايامغناطيسية التامة للموصلات المفرطة :
Perfect conductivity and perfect diamagnetism of superconductors

لاحظنا في البند السابق ان الموصلات المفرطة تظهر صفتين منفردتين ، وانها تمتلك اساساً توصيل نوعي لا نهائي كما اوضحت التجارب الأصلية التي قام بها أونس

والتجارب اللاحقة لها . والصفة الاخرى هي الاقصاء الكامل للفيض المغناطيسي كما أثبتتها تجربة مايشنر ـ اوجسنفلد (شريطة ان المجال المغناطيسي عند سطح الموصل المفرط وليس في أي مكان يتجاوز قيمة المجال الحرج) . وان هذه الصفات غير معتمدة على بعضها الى حد إن إحداها لاتدل ضمناً على الأخرى ، ولكن بالطبع ، يجب على كلتا الصفتين ان تنبعثا من نظريات ناجحة للتوصيل المفرط . لملاحظة ماذا يقصد باستقلالية هاتين الصفتين بوضوح ، سنورد الدراسة التقليدية الحالية للموصل التام في مجال مغناطيسي .

افرض كرة معدنية يمكن تغيير مقدار التوصيل النوعي من مقدار محدد الى مقدار لا نهائي (غير محدد) بطريقة ما ، فمثلاً يمكننا تغيير التوصيل النوعي لموصل مفرط بتغيير درجة حرارته . عندما يكون التوصيل النوعي لا نهائي فإن المجال الكهربائي يساوي صفراً في كل مكان داخل الموصل المفرط . وبناء على ذلك ، فإن التفاف المجال الكهربائي و $\partial B/\partial t$ يكونان صفراً كذلك . فإذا بُردت الكرة (أي حصلت على توصيل نوعي تام) في مجال منتظم $\mathbf{B_0}$ ، فإن كثافة الفيض ستبقى ثابتة $\mathbf{B_0}$ داخل الكرة حتى يتلاشى التوصيل النوعي التام . ومن جهة أخرى ، إذا بُردت الكرة في مجال مغناطيسي يساوي صفراً ، فإن كثافة الفيض تبقي صفراً حتى يتلاشى التوصيل النوعي التام على الرغم من وجودها في مجال إبتدائي خارجي منتظم . وبالتالي فإن التوصيل النوعي التام لا يقتضي ضمناً إقصاء فيض مغناطيسي أو إبعاده ، وبناء على ذلك فإن المتجه $\mathbf{B}$ يساوي صفراً هي فرضية وينبغي إدخالها بصورة منفصلة . وبالمثل فإن $\mathbf{B}$ يساوي صفراً لاتقتضي ضمناً توصيل نوعي تام ، وللمادة ذات قابلية تكهرب $\chi_m = -1$ سوف تشتمل على قيمة $\mathbf{B}$ تساوي صفراً دائماً ، وهذه بدورها لا تحدد إمكانية الحصول على توصيل نوعي للمادة .

في هذا الفصل سوف نهتم بالمقام الأول في الجوانب المغناطيسية للتوصيل المفرط ، وسوف نضع الصيغ الرياضية المناسبة لها . الطريقة الأولى في فهم الموضوع ، والتي تمثل اختلافاً قليلاً عما قد تم إجراؤه من قبل (لاحظ الفصل العاشر) ، تشير الى انه داخل الموصل المفرط : $\mathbf{B} = \mu_0 [\mathbf{H} + \mathbf{M}] = 0$ ، وعند الحدود الفاصلة بين الموصلات المفرطة وأوساط معدنية أخرى ، فإن المركبة المماسية لـ $\mathbf{H}$ والمركبة العمودية لـ $\mathbf{B}$ مستمرتان . هذه المناقشة تبين أن الموصل المفرط يعدُّ كمادة مغناطيسية ذات قابلية تكهرب $\chi_m = -1$ وهذا يعني ، الوسط الذي يظهر دايامغناطيسية تامة . تسري تيارات التمغنط على سطح الموصل المفرط بكثافة سطحية تمثل بالصيغة الآتية :

$$\mathbf{j}_{SM} = \mathbf{n} \times [\mathbf{M}_{out} - \mathbf{M}_{in}]$$

حيث رسم $\mathbf{n}$ نحو الخارج عمودياً على السطح (لاحظ ان $\mathbf{M}_{out}$ يساوي صفراً) ، في حين تسري تيارات التمغنط الحجمي بكثافة قدرها $\mathbf{J}_M = \text{curl}\, \mathbf{M}$ (لاحظ الفصل العاشر ، وبالتحديد البند 1-10) .

كوصف بديل ضع $\mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{M} = 0$ داخل الموصل المفرط مما يسبب تكوين تيار سطحي حقيقي $\mathbf{j}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{out}$ (نظراً لأن $\mathbf{H}_{in}$ قد فُرض ليكون صفراً) . في هذا الوصف لا يوجد هناك أي نوع من التيارات التي تسري داخل الموصل المفرط . هذان الوصفان لموصل مفرط يكونان مختلفين بشكل ملفت للنظر الى حد يثير التساؤل عن العلاقة بينهما . وإن النص المألوف والمكتوب بدقة يظهر أن الوصفين متكافئان . ومع ذلك يبدو من المناسب أن نتناول هذا السؤال بشيء من التفصيل . نلاحظ أولاً بأن هناك فرقين بين التيارات الحقيقية وتيارات التمغنط (وقد أهمل هنا تيار الازاحة) . الفرق الأول هو أن التيارات الحقيقية هي مصادر لـ $\mathbf{H}$ ، في حين كل من التيارات الحقيقية وتيارات التمغنط هي مصادر لـ $\mathbf{B}$. وبما أن $\mathbf{B}$ تمثل كمية المجال المغناطيسي الممكن الحصول عليها في حين $\mathbf{H}$ أدخلت اساساً لتمثل كمية مجال مغناطيسي ناشيء عن التيارات الحقيقية ، فإن الفارق الاول هذا بين نوعي التيارات يبدو واضحاً وملائماً ولكن الى حد ما يعدُّ مصطنعاً . الفارق الثاني هو أن التيارات الحقيقية المارة في المواد الاعتيادية تعدُّ مبددة للطاقة (مثلاً : تكون باعثةً على حرارة جول) في حين تيارات التمغنط لا تكون كذلك . ولكن في الموصلات المفرطة يتلاشى هذا الفارق . بالاضافة الى ذلك ، نظراً لإمكاننا أن نبين أن التمغنط للموصلات المفرطة ليست ناشئة عن الحركات المغزلية (وبناء على ذلك ، فإنها مترافقة مع الحركات العينية لحاملات الشحنة) ، فإن الفرقين يظهران متكافئين . النص المحكم والبديل هو : بما أن $\mathbf{B}$ هي الكمية الممكن قياسها فقط ، إذن يمكننا اختيار $\mathbf{M}$ و $\mathbf{H}$ وفقاً لقواعد كيفية نسبياً طالما كان بإمكاننا تجزئة $\mathbf{J}$ و $\mathbf{J}_M$ وفقاً لذلك ، ونتيجة لهذا فلا يمكننا التمييز أو الفصل بينها في الموصل المفرط .

ولمعظم ما سنقوم به فإن عَدَّ كل من $\mathbf{H}$ و $\mathbf{M}$ غير مساوٍ للصفر سيكون ملائماً . وسبب ذلك يعود الى أن هذا العدَّ هو امتداد طبيعي لما قد تم إجراؤه سابقاً لمواد طبيعية . وكذلك يعود الى أن هذا النوع من الصياغة تقود الى مسائل قيم حدودية

ذات طبيعة أكثر ملاءمة . ومع ذلك ففي البند القادم سوف ندرس مسألتين بكلتا الصياغتين لغرض توضيح التكافؤ بينهما .

18-3 أمثلة تشتمل إقصاء الفيض التام :
Examples involving perfect flux exclusion

لتأكيد الاستنتاجات والافكار الموضحة في البند السابق سندرس مثالين أساسيين : هما كرة مفرطة التوصيل في مجال منتظم متقارب واسطوانة مفرطة التوصيل حاملة لتيار كهربائي وذات طول لانهائي . وسوف نستخدم كلتا الصياغتين المبينتين في البند 18-2 لنوضح وبشكل تفصيلي بأنهما متماثلتان في هذه الحالات .

أفرض أولاً ، كرة مفرطة التوصيل ذات نصف قطر a وضعت في مجال خارجي منتظم مقداره $B_0\mathbf{k}$. ففي الصياغة الاولى والتي تعالج الموصل المفرط كما لو كان مادة مغناطيسية ، فان مسألة القيمة الحدودية تأخذ الصيغ الآتية :

خارج الكرة :

اذا كان : $\mathbf{B} \to B_0\mathbf{k}$ as $r \to \infty$,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{curl} \mathbf{H} &= 0, \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H}. \end{aligned} \tag{18-1}$$

داخل الكرة :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{H} &= -\mathbf{M}, \\ \operatorname{curl} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{M} &= 0. \end{aligned} \tag{18-2}$$

عندما تكون $r = a$:

$$\begin{aligned} &B_r \text{ continuous}, \\ &H_\theta \text{ continuous}. \end{aligned} \tag{18-3}$$

المعادلة الوحيدة غير المألوفة في المعادلات المذكورة في اعلاه هي $\text{div}\,\mathbf{M} = 0$ والتي أستخرجت على أساس عدم وجود أقطاب مغناطيسية داخل الكرة مفرطة التوصيل . بأستخدام هذه المعادلات يمكننا ادخال جهدين مغناطيسيين لا متجهان هما U_1^* خارج الكرة و U_2^* داخلها . وان هذين الجهدين يحققان معادلة لابلاس ، ومنها يمكننا ايجاد المجال $\mathbf{H}$ وذلك بأخذ الانحدار السالب لها . باستخدام الاحداثيات الكروية وبأخذ المعادلة الاولى من (18-1) بنظر الاعتبار ، نجد :

$$U_1^* = -\frac{B_0}{\mu_0} r\cos\theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell r^{-(\ell+1)} P_\ell(\cos\theta). \tag{18-4}$$

ومنها

$$B_r = B_0\cos\theta + \mu_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) c_\ell r^{-(\ell+2)} P_\ell(\cos\theta) \quad (\text{خارج الكرة}) \tag{18-5}$$

بما ان $\mathbf{B}$ تساوي صفراً داخل الكرة وان B_r مستمرة عند $r = a$. فان كافة قيم c_ℓ ينبغي أن تساوي صفراً عدا c_1 والتي تكون قيمتها :

$$c_1 = -B_0 a^3/2\mu_0.$$

وبهذا فقد حلت المسألة بالكامل لقيم r التي تكون أكبر من نصف قطر الكرة بدون الالتجاء الى الشرط الحدودي للمركبة المماسية لـ $\mathbf{H}$ ، ولقد تم ادخال الشرطين التاليين : $\mathbf{B} = 0$ داخل الكرة ، واستمرارية مركبة $\mathbf{B}$ العمودية عند $r = a$ في الحل فقط . في داخل الكرة يجب ان يكون الجهد U_2^* منتظماً عند $r = 0$ ، ولكي تتلاءم الشروط الحدودية ينبغي استخدام $P_1(\cos\theta)$ فقط . وهكذا فان

$$U_2^* = d_2 r\cos\theta,$$

حيث d_2 ثابت يجب تعيينه . وبالتفاضل فإن ،

$$H_r = -d_2\cos\theta \quad \text{و} \quad H_\theta = d_2\sin\theta.$$

وبما ان قيمة H_θ خارج الكرة هي :

$$H_\theta = -\tfrac{3}{2}(B_0/\mu_0)\sin\theta,$$

فان قيمة d_2 تصبح :

$$d_2 = -3B_0/2\mu_0.$$

بسبب عدم الاستمرارية لـ M فانه لا يوجد تيار سطحي حقيقي ولكن يوجد تيار تمغنط سطحي قيمته :

$$\mathbf{j}_{SM} = -\tfrac{3}{2}(B_0/\mu_0)\sin\theta\,\mathbf{a}_\varphi$$

ومن الممكن تلخيص هذه النتائج كالآتي :

خارج الكرة :

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} = B_0\mathbf{k} - B_0\frac{a^3}{r^3}\cos\theta\,\mathbf{a}_r - \tfrac{1}{2}B_0\frac{a^3}{r^3}\sin\theta\,\mathbf{a}_\theta.$$

داخل الكرة :

$$B = 0; \quad \mathbf{H} = \frac{3}{2}\frac{B_0}{\mu_0}\mathbf{k}; \quad \mathbf{M} = -\frac{3}{2}\frac{B_0}{\mu_0}\mathbf{k}. \tag{18–6}$$

عند r = a :

$$\mathbf{j}_{SM} = -\frac{3}{2}\frac{B_0}{\mu_0}\sin\theta\,\mathbf{a}_\varphi.$$

الصيغة الثانية تكون مشابهة لتلك الصياغة التي أجريت للمنطقة الخارجية للكرة ، ولكنها تأخذ الصيغة : $\mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{M} = 0$ بالنسبة للمنطقة الداخلية . كما يوجد تيار حقيقي على السطح قيمته :

$$\mathbf{j}_S = \mathbf{n}\times\mathbf{H}_{\text{out}} = -\tfrac{3}{2}(B_0/\mu_0)\sin\theta\,\mathbf{a}_\varphi$$

ويمكن تلخيص هذا الوصف كالآتي :

خارج الكرة :

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} = B_0\mathbf{k} - B_0\frac{a^3}{r^3}\cos\theta\,\mathbf{a}_r - \tfrac{1}{2}B_0\frac{a^3}{r^3}\sin\theta\,\mathbf{a}_\theta.$$

داخل الكرة :

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{M} = 0. \tag{18–7}$$

عند r = a :

$$\mathbf{j}_S = -\frac{3}{2}\frac{B_0}{\mu_0}\sin\theta\,\mathbf{a}_\varphi.$$

ربما أصبحت العلاقة بين الوصفين واضحة الآن . خارج الموصل ، الوصفان متماثلان كما ينبغي ان يكونا . وإلا ، فمن الممكن تصميم تجربة بسيطة لاختيار الوصف الصحيح . في حين يبين كلا الوصفين ان $B = 0$ داخل الموصل ولكن $\mathbf{H}$ و $\mathbf{M}$ هما قيمتان محددتان في حالة وصفر في حالة أخرى . من ناحية أخرى ، فان كلاً من $\mathbf{H}$ و $\mathbf{M}$ لا يمكن ملاحظته تجريبياً وبالتالي فان تمييز أحدهما عن الآخر ليس ذا أهمية . وان تيارات سطحية متماثلة تسري في الحالتين ولكن في الحالة الاولى تُعدّ تياراً حقيقياً في حين أطلق عليه في الحالة الاخرى بتيار التمغنط . ان مايطلق على التيار من تسمية يكون مهماً فقط عندما تتفق مع $\mathbf{H}$ و $\mathbf{M}$ داخل الموصل المفرط . مثال على ذلك ، عندما نحسب العزم المغناطيسي لكرة مفرطة التوصيل ، فمن الجائز استخدام $\mathbf{J}_{SM}$ أو $\mathbf{M}$ وليس كليهما ، ولكن عادة نستخدم القيمة الحقيقية $\mathbf{J}_S$ في حسابه .

المثال الثاني الذي يوضح عدم التمييز بين التيارات الحقيقية وتيارات التمغنط يتضمن اسطوانة مفرطة التوصيل ذات طول لا نهائي وحاملة لتيار كهربائي . وقبل دراسة هذه المسألة بالتفصيل ، ينبغي ملاحظة ان مجموع $\mathbf{J}$ و $\mathbf{J}_M$ داخل الموصل المفرط دائماً يساوي صفراً . وهذا يتحقق من $\mathbf{B} = 0$ والذي يتضمن $\operatorname{curl} B = 0$ وبهذا فإن

$$\operatorname{curl} H + \operatorname{curl} M = J + J_M = 0.$$

وان هذه المناقشة لا يمكن استخدامها عند سطح لا تكون فيه هذه الكميات مستمرة ، وان تيار سطح كلي محدد $\mathbf{J}_S + \mathbf{J}_{SM}$ سوف يسري ، ولهذا فان هذه المناقشة تبين بوضوح ان التيار الكلي يمثل دائماً تياراً سطحياً .

لنعود الآن الى مثال السلك الذي يبلغ نصف قطره a ويحمل تياراً كهربائياً مقداره I_0 (في الاتجاه الموجب للمحور z) ، نجد من قانون أمبير أن الحث المغناطيسي خارج السلك وباستخدام الاحداثيات الاسطوانية تساوي :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = (\mu_0 I / 2\pi r)\mathbf{a}_\phi$$

فباستخدام الوصف الأول ، $0 \neq$ $\mathbf{H}$ و $\mathbf{M}$ داخل الموصل المفرط ، ينبغي علينا إجراء بعض الفرضيات عن كثافة التيار في السلك ، وبسبب فرض الاستمرارية للمركبة المماسية لـ $\mathbf{H}$ ، فإن الافتراضات عن كثافة التيار يجب أن لا تشمل التيارات السطحية ، وان ابسط احتمالية لكثافة التيار هي كثافة منتظمة قدرها :

$$\mathbf{J} = (I_0/\pi a^2)\mathbf{k}$$

وبهذا نحصل على العلاقتين الآتيتين داخل الاسطوانة :

$$\mathbf{H} = \frac{I_0}{2\pi}\frac{r}{a^2}\mathbf{a}_\theta \quad و \quad \mathbf{M} = -\frac{I_0}{2\pi}\frac{r}{a^2}\mathbf{a}_\theta.$$

أما كثافة تيار التمغنط فيساوي :

$$\mathbf{J}_M = -(I_0/\pi a^2)\mathbf{k},$$

وعند السطح هنالك كثافة تيار تمغنط سطحي تساوي :

$$\mathbf{j}_{SM} = +\mathbf{a}_r \times \left(\frac{I_0}{2\pi a}\mathbf{a}_\theta\right) = \frac{I_0}{2\pi a}\mathbf{k},$$

وهي تكاد تكون كافية لحمل التيار الكلي I_0 . وان الوصف البديل الممكن أخذه ببساطة هو أن $\mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{M} = 0$, داخل الاسطوانة ، وهذا بدوره يتطلب سريان التيار كلياً على السطح وبكثافة تيار حقيقي سطحي هي :

$$\mathbf{j}_S = (I_0/2\pi a)\mathbf{k}$$

لقد لُخصت نتائج هذين الوصفين في الجدول (1-18) . ولعدم وجود طريقة لفصل التيارات الحقيقية عن تيارات التمغنط في الموصلات المفرطة ، او لعدم وجود طريقة مباشرة

جدول 18-1
صياغتان لسلك مفرط التوصيل حامل للتيار الكهربائي

	Formulation 1 (Superconductor as magnetic material with $\chi_m = -1$)	Formulation 2 (Flux exclusion by real surface currents)
	$\mathbf{M} = -\mathbf{H} \neq 0$	$\mathbf{M} = \mathbf{H} = 0$
Outside:	$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} = \mu_0\frac{I_0}{2\pi r}\mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\mathbf{a}_\theta$
Inside:	$\mathbf{B} = 0$	$\mathbf{B} = 0$
	$\mathbf{H} = \frac{I_0 r}{2\pi a^2}\mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{H} = 0$
	$\mathbf{M} = -\frac{I_0 r}{2\pi a^2}\mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{M} = 0$
	$\mathbf{J} = \frac{I_0}{\pi a^2}\mathbf{k}$	$\mathbf{J} = 0$
	$\mathbf{J}_M = -\frac{I_0}{\pi a^2}\mathbf{k}$	$J_M = 0$
At $r = a$:	$\mathbf{j}_{SM} = (I_0/2\pi a)\mathbf{k}$	$\mathbf{j}_{SM} = 0$
	$\mathbf{j}_S = 0$	$\mathbf{j}_S = (I_0/2\pi a)\mathbf{k}$

لقياس قيم H أو M داخل الموصل المفرط . فإن هذين الوصفين يكونان متكافئين .

في المسألتين المدروستين قبل قليل ، نلاحظ للصياغة $\mathbf{M = H = 0}$ صفة واضحة متميزة ببساطتها . من ناحية ثانية ، في المسائل الأكثر تعقيداً ، خصوصاً المسائل المشتملة على معاملات كبيرة مزيلة للخصائص المغناطيسية ، تكون الصياغة التوزيعية للتمغنط هي المفضلة . وقد تستخدم كلا الطريقتين في أعلاه والنتائج ستكون متكافئة ، ولكن يجب عدم مزج الطريقتين في حل واحد للمسألة الواحدة .

18-4 معادلات لندن The London equations.

في البند السابق نوقش إقصاء الفيض على أسس مثالية جداً في تصوير أو تمثيل الموصل المفرط . هذا التمثيل يظهر العديد من الملامح الممكن ملاحظتها للتوصيل المفرط ولكنه يفشل في تفسير بعض التفاصيل الدقيقة التي يمكن ملاحظتها في الحال . وبالإمكان تكوين نظرية اكثر تطوراً مبتدئين من مفهوم التوصيل النوعي التام وبإجراء تحويرات ملائمة لتشمل ظاهرة مايشنر .

حاملات الشحنة في موصل تام (ليس موصلاً مفرطاً) سوف لا تتأثر بقوى معوقة «retarding forces» . وبالتالي فإنها تتحرك في مجال كهربائي شدته E وفقاً للمعادلة :

$$m_p\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{E}, \qquad (18\text{–}8)$$

حيث أن m_p تمثل كتلة حامل الشحنة و $\dot{\mathbf{v}}$ تمثل تعجيله ولكن اذا كانت $\mathbf{v}$ تمثل معدل السرعة لحركة حاملات الشحنات وهنالك n منها لوحدة الحجم ، فإن كثافة التيار تصبح $\mathbf{J} = nq\mathbf{v}$ وكبديل للمعادلة (18-8) يمكننا كتابة :

$$\dot{\mathbf{J}} = (nq^2/m_p)\mathbf{E}, \qquad (18\text{–}9)$$

حيث ان $\dot{\mathbf{J}} = d\mathbf{J}/dt$. وبأخذ الالتفاف لهذه المعادلة وبتعويض

$$\text{curl } \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$$

نجد :

$$\text{curl } \dot{\mathbf{J}} = -(nq^2/m_p)\dot{\mathbf{B}}. \qquad (18\text{–}10)$$

وبفرض تغير المجالات ببطء ، من الممكن اهمال تيار الازاحة ، وباستخدام $\text{curl}\,\mathbf{H} = \mathbf{J}$ لاختزال $\dot{\mathbf{J}}$ نجد

$$\text{curl curl}\,\dot{\mathbf{H}} = -(nq^2/m_p)\dot{\mathbf{B}}. \qquad (18\text{-}11)$$

وبفرض $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$ وباستخدام تعريف اللابلاسيان للمتجه (مع $\text{div}\,\mathbf{B} = 0$) ينتج .

$$\nabla^2\dot{\mathbf{B}} = (\mu_0 nq^2/m_p)\dot{\mathbf{B}}. \qquad (18\text{-}12)$$

لملاحظة أهمية هذه المعادلة بشكل أفضل ، افرض موصلاً تاماً نصف لا محدود مُحدَّداً بالمستوي $z = 0$ وممتد في الاتجاه الموجب للاحداثي z . افرض أن $\dot{B}_y = \dot{B}_z = 0$ ، $\dot{B}_x = \dot{B}_{xo}$ عند السطح ، وأن $\dot{B}_{xo}$ لا تعتمد على x أو y ، وبذلك فإن المعادلة المستخدمة لايجاد $\dot{B}_x$ تصبح :

$$\frac{d^2\dot{B}_x}{dz^2} = \frac{\mu_0 nq^2}{m_p}\dot{B}_x, \qquad (18\text{-}13)$$

وذات حل تام يتمثل بالمعادلة الآتية :

$$\dot{B}_x = Ae^{-\sqrt{\mu_0 nq^2/m_p}\,z} + Be^{\sqrt{\mu_0 nq^2/m_p}\,z}.$$

لما كان الحل المتزايد أسياً خالياً من أي تفسير فيزيائي فمن الجائز إهماله ، وعند $z = 0$ فإن A تصبح مساوية لـِ $\dot{B}_x$. ومن ثم :

$$\dot{B}_x = \dot{B}_{x0}e^{-\sqrt{\mu_0 nq^2/m_p}\,z}. \qquad (18\text{-}14)$$

بسهولة يمكننا إثبات أن للمقدار $(m_p/\mu_0 nq^2)^{1/2}$ بعد مسافة ، وبتحديد q و m_p للإلكترون واعتبار n تمثل الكتروناً واحداً لكل ذرة يكون هذا الطول حوالي 10^{-8}m . وبهذا فإن المعادلة (12-18) تدل على : في الجزء الداخلي للموصل التام ، فإن مشتقة $\mathbf{B}$ بالنسبة للزمن تقترب من الصفر أسياً بزيادة المسافة عن السطح ، وهكذا فإن $\dot{\mathbf{B}}$ تكون صغيرة جداً في الجزء الداخلي للموصل التام عدا داخل طبقة سطحية رقيقة . وهذه النتيجة تعدُّ تحسيناً معقولاً للاستنتاج السابق بأن $\dot{\mathbf{B}} = 0$ في كل مكان بداخل الموصل التام .

التطور الذي حُدد قبل قليل يبين مرة أخرى أن التوصيل النوعي التام لا يقود الى إقصاء الفيض . ومع ذلك ، فإنها تدل على كيفية إمكان ادخال اقصاء الفيض في نظرية . فإذا وصفت المعادلة (12-8) سلوكية **B** بدلاً من سلوكية $\dot{\mathbf{B}}$ ، فإن قيمة **B** سوف تقل أسياً عن قيمتها عند السطح الى الصفر في الداخل للموصل المفرط . وإن هذه النتائج حثت على تطوير نظرية السلوك الكهرومغناطيسي للموصلات المفرطة من قبل لندن* .

فرضنا في هذه النظرية أن من الممكن تجزئة التيار الكلي الى تيار مفرط «supper current» $\mathbf{J}_s$ وتيار مشتت «dissipative current» $\mathbf{J}_{diss}$ وتيار إزاحة «displacement current» $\mathbf{J}_{disp}$:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_{diss} + \mathbf{J}_{disp}. \qquad (18\text{-}15)$$

وأن تيارات الازاحة والتيارات المشتتة قد حددت بالمعادلات الآتية التي نوقشت سابقاً :

$$\mathbf{J}_{diss} = g\mathbf{E} \quad \text{و} \quad \mathbf{J}_{disp} = \partial \mathbf{D}/\partial t.$$

المتبقي هو تحديد علاقة $\mathbf{J}_s$ بالمجال الكهرومغناطيسي . ولإيجاد هذه العلاقة نبدأ بالمعادلة (15-18) وبمعادلات ماكسويل وبمعادلة لندن [مماثلة في الصيغة الى المعادلة (10-18) ولكنها مشتملة على **B** و **J** بدلاً من مشتقاتها] . وإذا مااستخدمت هذه الطريقة بدقة يصبح بالإمكان إثبات أن كلاً من الكميتين $\mathbf{J}_{diss}$ و $\mathbf{J}_{disp}$ يمكن إهمالها مقارنة مع $\mathbf{J}_s$ لترددات أقل من 10 cyle/ sec . بفرضنا لهذه النتيجة وبالتحديد : $\mathbf{J}_{diss} \approx 0$ و $\mathbf{J}_{disp} \approx 0$ وبدون الخوض في مناقشات تفصيلية ، تكون هذه الفرضية على الأقل مقبولة لمسائل التيار الثابت القيمة كالتي تدرس في هذا الفصل . التيار المتبقي $\mathbf{J}_s$ يشمل كلاً من التيار الحقيقي وتيار التمغنط ، وبهذا ، من معادلة ماكسويل (13-18) نجد :

$$\mathbf{J}_s = (1/\mu_0)\ \text{curl}\ \mathbf{B}. \qquad (18\text{-}16)$$

---

* F. and H. London, *Proc. Roy. Soc.* **A149**, 71(1935).

لغرض إيجاد معادلة مشتملة على متغيرات المجال المغناطيسي بدلاً من مشتقاتها ، فرض لندن الآتي :

$$\mu_0 \, \mathbf{curl} \, \mathbf{J}_S = -(1/\lambda^2)\mathbf{B}. \qquad (18\text{-}17)$$

تختلف هذه المعادلة عن (10-18) بكونها تشتمل على $\mathbf{J}_s$ و $\mathbf{B}$ بدلاً من $\dot{\mathbf{J}}$ و $\dot{\mathbf{B}}$ ، وبذلك فانها تقودنا الى معادلة مشابهة للمعادلة (12-18) للمجالات بدلاً من مشتقاتها . كذلك ،لقد تم إدخال عمق الاختراق الظاهراتي «phenomenological penetration depth» λ كمعادل وصفي نوعي للمواد المفرطة التوصيل (أدخلت μ_0 في المعادلة لكي تجعل أبعاد λ هي أبعاد طول) . المعادلة (17-18) سوف تقود الى ظاهرة مايشنر ولكن لجعلها مشتملة توصيلية لا نهائية وجب علينا فرض :

$$\mu_0 \dot{\mathbf{J}}_S = (1/\lambda^2)\mathbf{E}. \qquad (18\text{-}18)$$

ومع ذلك ، فإن المعادلة الأخيرة لا تظهر دوراً إضافياً في المسائل المدروسة هنا .

بتوحيد المعادلتين (16-18) و (17-18) نحصل على :

$$\mathbf{curl} \, \mathbf{curl} \, \mathbf{B} = -(1/\lambda^2)\mathbf{B}. \qquad (18\text{-}19)$$

بما أن $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$ فمن الممكن كتابتها بالصيغة الآتية :

$$\nabla^2\mathbf{B} = (1/\lambda^2)\mathbf{B}. \qquad (18\text{-}20)$$

ومثلما فعلنا في المعادلة (13-18) ، من الممكن حل المعادلة (20-18) لحالة اللوح نصف اللامحدود ليكون :

$$B_x(z) = B_{x_0} e^{-z/\lambda} \qquad (18\text{-}21)$$

الآن أظهرنا أن $\mathbf{B}$ فضلاً عن $\dot{\mathbf{B}}$ تقل أسياً كلما اخترق المجال اللوح الى الداخل . هذه هي العمودية المطلوبة لـ $\mathbf{B} = 0$ داخل موصل مفرط .

وضعت عدة نظريات في محاولة لحساب عمق الإختراق λ الذي تم تقديمه هنا كمعامل ظاهراتي ، ولكننا مهتمون بتعيين λ تجريبياً . وسوف نضع طريقة واضحة لذلك ، بفرض ملف حلزوني ذي قلب مفرط التوصيل . المحاثة المتبادلة لمثل هذا الملف الحلزوني ستكون صغيرة جداً فيما إذا كان الموصل المفرط تاماً ويملأ بالكامل

الحجم المحدد بالملف الحلزوني. ومن الجهة الاخرى ، لو كان عمق الاختراق ذا قيمة محددة فإن المحاثة المتبادلة سوف تكون الى حد ما محسوسة . فإذا كان عمق الاختراق يمثل جزءاً أو كسراً ذا قيمة من نصف القطر للملف الحلزوني ، فإن عمق الاختراق يمكن الاستدلال عليه من قياسات المحاثة المتبادلة . الدقة لمثل هذا التعيين تعتمد على نسبة الحجم الذي ينفذ داخله المجال الى الحجم الكلي للعينة ، وقد وجد أن عمق الاختراق في الحالة النموذجية يمثل أجزاء قليلة من مليون جزءٍ من السنتمتر الواحد وبناء على ذلك فإن التجربة المقترحة في اعلاه سوف لا تعطي نتائج ذات أهمية . ومع ذلك ، فمن الممكن التغلب على هذه الصعوبة باستخدام عينة ذات نسبة عالية للمساحة السطحية الى الحجم . وإن التجارب الأولى الناجحة من هذا النوع أجريت باستخدام زئبق شبه غروي من قبل شوينبرك (D. Schoenberg) في عام 1939 . أظهرت هذه التجارب بوضوح أن المجال المغناطيسي ينفذ داخل كرات زئبقية صغيرة مفرطة التوصيل وأن عمق الإختراق يعتمد على درجة الحرارة . وقد أظهرت تجارب شوينبرك الأصلية أن المفهوم الفيزيائي لعمق الأختراق صحيح وذو اهمية .
المعادلات (18-15) و (18-17) و (18-18) علاوة على معادلات ماكسويل الأربع كثيراً مايطلق عليها مجتمعة بمعادلات ماكسويل ــ لندن . وهذه المعادلات ذات أهمية كبرى لبحث المسائل الكهرومغناطيسية المشتملة على موصلات مفرطة .

يتضح من المناقشة السابقة أن مفهوم إقصاء الفيض هو مفهوم مثالي . وعوضاً عنه سنلتزم مفهوم عمق الإختراق ، حيث يخترق فيض مغناطيسي طبقة رقيقة عند سطح موصل مفرط ، وقيمته تقل اسياً كلما توغل اكثر داخل الموصل استناداً الى نظرية لندن . كما أن مفهوم كثافة التيار السطحي $\mathbf{j}_{SM}$ (أو كما في حالة $\mathbf{j}_S$) هو الآخر مثالي . وهنا أيضاً نجد أن كثافة التيار المفرط $\mathbf{J}_S$ تنتشر في طبقة رقيقة سطحية وتقل اسياً باتجاه الداخل . ولهذا لايوجد مفهوم لكثافة تيار التمغنط السطحي في نظرية لندن ولكن توجد كثافة تيار مفرط $\mathbf{J}_S$ فقط . في البند التالي سوف نحل المسألتين المدروستين سابقاً باستخدام معادلات ماكسويل ــ لندن .

18-5 امثلة تتضمن معادلات لندن :
Examples involving the London equations

لأجل أن نفهم معادلات ماكسويل ــ لندن بشكل تفصيلي ، سوف نستعمل هذه المعادلات لإيجاد حلول أكثر دقة للمسائل المدروسة في البند (18-3) . المسألة الأولى

هي مسألة الكرة المفرطة التوصيل (ذات نصف قطر a) والموضوعة في مجال مغناطيسي خارجي. وهذا المجال يعد منتظماً عند المسافات الكبيرة ويساوي $B_0\mathbf{k}$. المعادلات المتحققة بالمجالات هي :

$$\text{div}\,\mathbf{B} = 0, \quad \text{curl}\,\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}, \quad \text{: خارج الكرة}$$

(18–22)

$$\nabla^2\mathbf{B} = (1/\lambda^2)\mathbf{B}, \quad \text{div}\,\mathbf{B} = 0 \quad \text{: داخل الكرة}$$

حيث ان λ يمثل عمق الإختراق ، والذي فرض كمعامل ظاهراتي. والشروط الحدودية التي يجب أن تتحقق هي :

$$\mathbf{B} = B_0\mathbf{k} \quad : r = \infty \ \text{عند}$$

(18–23)

عند $r = a$: B_r و B_θ تكونا مستمرتان

والشرط الحدودي الوحيد الذي يتطلب دراسة وتفسيراً دقيقاً هو إستمرارية B_θ عند $r=a$. وهذا الشرط يستخرج من الفرضية ، كما إنه في الوقت نفسه يتفق مع المناقشة التي وردت في نهاية البند السابق ، والتي بينت أن التيارات المفرطة (وتتضمن التيارات الحقيقية وتيارات التمغنط) لا يمكن أن تكون لا نهائية أو غير محددة مطلقاً ، أي أنه لا وجود لكثافة تيار سطحي سواء كان $\mathbf{j}_{SM}$ ام $\mathbf{j}_S$. في هذه الحالة ، كلا المركبتين المماسيتين لـ $\mathbf{H}$ و $\mathbf{M}$ تكونان مستمرتين ، كما أن المركبة المماسية لـ $\mathbf{B}$ مستمرة كذلك .

إن حل المعادلات لأجل إيجاد المجال خارج الكرة لا يتضمن أية صعوبات . ويمكننا تعريف جهد مغناطيسي لا متجه كما فعلنا في البند (18-3) ومن ثم إيجاد حل عام بعد ذلك . من ناحية أخرى ، للمنطقة الداخلية ، ينبغي حل المعادلة :

$$\nabla^2\mathbf{B} = (1/\lambda^2)\mathbf{B}$$

اذا استخدمنا الاحداثيات الكروية يمكننا إيجاد لاپلاسيان لمتجه معين بأخذ لاپلاسيان لكل من إحداثياتها ، وبهذه الطريقة يمكن إيجاد الحل لهذه المعادلة بسهولة . ومع ذلك هذه ليست الحالة المقصودة ، ولكن ينبغي حساب التفاف الالتفاف للمتجه . ونتيجة ذلك هي أن مركبات r و θ للكمية :

$$\nabla^2\mathbf{B} = (1/\lambda^2)\mathbf{B}$$

تشتمل على كل من B_r و B_θ . إن هذا التعقيد معروف جداً وإن طريقة شاملة قد وضعت كل معادلة هلمولتز المتجهة† . ومن ناحية ثانية فإن التطور والتطبيق لهذه الطرق هي خارج نطاق هذا الكتاب . وعليه فإن نتائج البند (3-18) سوف تستخدم لغرض تخمين الحل . وستبرر نتيجة الحل النهائي من خلال تحقيقها للمعادلات والشروط الحدودية ، ولأن هذه المعادلات والشروط الحدودية لها حل واحد .

وبالطبع ، فإن هذه الصفة الأحادية للحل يمكن إثباتها ، ولكننا سوف نفترضها هنا .

لقد وجدنا في البند (3-18) أن الحد $P_1(\cos\theta)$ هو الحد الوحيد الذي بقي في U^* في الحل للمنطقة خارج الكرة . لنفترض أن هذا صحيح لنظرية ماكسويل ـ لندن أيضاً ، وأن :

$$\mathbf{B}(r,\theta) = B_0\mathbf{k} - b\left(\frac{a}{r}\right)^3[\cos\theta\,\mathbf{a}_r + \tfrac{1}{2}\sin\theta\,\mathbf{a}_\theta] \quad (\text{خارج الكرة}) \qquad (18\text{–}24)$$

وهذه النتيجة مشابهة الى المعادلة الأولى من المعادلات (7-18) . والفرق الوحيد هو استبدال B_0 بـ b في ذلك الجزء من المجال الناشيء عن تمغنط الكرة . ومن الممكن استخراج القيمة العددية لـ b من تطبيق الشروط الحدودية . من ناحية أخرى ، للمنطقة الداخلية للكرة ، يزودنا البند (3-18) الشيء القليل بطريقة الحدس . ومع ذلك من الصيغة المستخرجة لـ M في البند (3-18) ومن المعادلة (24-18) نجد أن B_r تعتمد على θ من خلال $\cos\theta$ في حين B_θ تعتمد على θ من خلال $\sin\theta$. ولذلك فإن الفرضية المعقولة قد تكون :

$$B_r = u(r)\cos\theta \quad (\text{داخل الكرة}) \qquad (18\text{–}25a)$$

$$B_\theta = v(r)\sin\theta \quad (\text{داخل الكرة}) \qquad (18\text{–}25b)$$

ينبغي إيجاد الدالتين u(r) و v(r) بحيث تتحقق المعادلة :

$$\nabla^2\mathbf{B} = (1/\lambda^2)\mathbf{B}$$

وكذلك تتحقق الشروط الحدودية عند r = a . وهذه الشروط الحدودية هي ،

---

† Cf. Morse and Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1953, Chapter 13.

$$u(a) = B_0 - b, \tag{18–26a}$$

$$v(a) = -B_0 - b/2. \tag{18–26b}$$

بأخذ مفكوك **curl curl B** وباستخدام الصيغ المفترضة (18-25) ، نجد المعادلات الآتية :

the equations

$$r\frac{dv}{dr} + v + u = -\frac{r^2}{2\lambda^2}u \tag{18–27a}$$

and و

$$r^2\frac{d^2v}{dr^2} + 2r\frac{dv}{dr} + r\frac{du}{dr} = \frac{r^2}{\lambda^2}v \tag{18–27b}$$

بتفاضل المعادلة (18-27a) بالنسبة الى r وبطرحها من المعادلة (18-27b) ، نجد :

$$v = -u - \tfrac{1}{2}ru'. \tag{18–28}$$

وباستخدام هذه النتيجة لاختصار v و dv/dr من المعادلة (18-27a) نحصل على معادلة لـ u :

$$r^2\frac{d^2u}{dr^2} + 4r\frac{du}{dr} = \frac{r^2}{\lambda^2}u. \tag{18–29}$$

بفرض أن $\xi = ru$ واستبدال المتغير المستقل بـ $\rho = r/j\lambda$ نحصل على معادلة لدوال بسل الكروية ذات رتبة واحدة [معادلة (15-78) حيث ان $l = 1$] . وباستخدام الحل $j_1(r/j\lambda)$ من الجدول (15-2) نحصل على

$$u(r) = c(\lambda/r)^3[\sinh(r/\lambda) - (r/\lambda)\cosh(r/\lambda)] \tag{18–30}$$

وهذا الحل يعدُّ منتظماً عند نقطة الأصل . ومن المعادلات (18-28) و (18-29) نجد أن :

$$v = \frac{c}{2}\left(\frac{\lambda}{r}\right)^3\left[\left(1 + \frac{r^2}{\lambda^2}\right)\sinh\left(\frac{r}{\lambda}\right) - \left(\frac{r}{\lambda}\right)\cosh\left(\frac{r}{\lambda}\right)\right]. \tag{18–31}$$

هذه المعادلة تكمل الحل الاعتيادي للمسألة ، باستثناء قيم b و c حيث يمكن استخراجها باستخدام المعادلات (18-26) و (18-30) و (18-31) . هذه القيم هي :

$$c = -3B_0\left(\frac{a}{\lambda}\right)\sinh\left(\frac{a}{\lambda}\right), \tag{18–32}$$

$$b = B_0\left[1 + 3\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 - 3\left(\frac{\lambda}{a}\right)\coth\left(\frac{a}{\lambda}\right)\right]. \qquad (18\text{–}33)$$

وقد يتوقع القاريء ، لقيم صغيرة جداًلـ λ / a ، لا تكون المجالات مختلفة كثيراً عن تلك التي وجدت في البند (3–18) لكرة ذات توصيل مفرط تام . ويمكننا التحقق من ذلك باستخدام حقيقة ان الكمية coth x تقترب أسياً من الواحد للقيم الكبيرة لـ x . وبهذا :

$$b \simeq B_0\left(1 - 3\frac{\lambda}{a} + 3\frac{\lambda^2}{a^2} + \cdots\right), \quad \frac{\lambda}{a} \ll 1, \qquad (18\text{–}34)$$

والتصحيح الأول للمجال خارج الكرة يكون بحدود λ / a .

المثال الثاني لحل معادلات لندن هو السلك الطويل الذي يحمل تياراً كهربائياً . لنفرض أن a يمثل نصف قطر السلك و λ عمق الاختراق و I_0 التيار الخارجي الكلي (وهو تيار حقيقي) . للنقاط خارج السلك ، يُمثل **H** بقانون أمبير . كما أن $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ ، لذا :

$$H_r = H_z = B_r = B_z = 0; \qquad B_\theta = \mu_0 H_\theta = \mu_0 \frac{I_0}{2\pi r} \quad (\text{خارج السلك}) \qquad (18\text{–}35)$$

في حين في داخل السلك ، تحقق **B** المعادلة الآتية :

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda^2}\mathbf{B}. \qquad (18\text{–}36)$$

ومن التماثل نجد أن **B** لها مركبة θ فقط وأنها تعتمد على r . وبذلك تصبح المعادلة (36–18) بالصيغة الآتية :

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} B_\theta + r\frac{d}{dr} B_\theta - \left(1 + \frac{r^2}{\lambda^2}\right) B_\theta = 0. \qquad (18\text{–}37)$$

وهذه تمثل معادلة بسل ذات رقم دليلي واحد وازاحة زاوية مقدارها jr/λ وان الحل المحدد عند نقطة الأصل يكون :

$$B_\theta = AJ_1(jr/\lambda). \qquad (18\text{–}38)$$

ويحسب المعامل A بمساواة B_θ داخل السلك و B_θ خارج السلك عند r = a .
ولهذا فان B_θ تصبح :

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a}\frac{J_1(jr/\lambda)}{J_1(ja/\lambda)} \quad \text{(داخل السلك)} \qquad (18\text{–}39)$$

بما أن :

$$J_1(jr/\lambda) = jI_1(r/\lambda)$$

حيث I_1 يمثل دالة بسل المحورة . فمن الممكن كتابة المعادلة (18–39) بدلالة دوال قياسية مجدولة . ومن هذه النتيجة يمكننا حساب المجالات الاخرى وتوزيع التيار ، ويمكننا كذلك تبيان أن المجال وكثافة التيار الكلي تهبط أسياً مع المسافة من سطح السلك . ومع ذلك فقد تركت التفاصيل كمسائل للقارىء .

إن هذه المناقشة للصفات الكهرومغناطيسية للموصلات المفرطة تكون متشتتة بالضرورة . وبالاخص فقد أهملت المسائل المشتملة على المجالات المعتمدة على الزمن والنظرية المجهرية للتوصيل المفرط . هناك فهرسة شاملة ومناقشة لمعظم هذه المسائل موجودة في كتاب حديث من تأليف بلات* . وهذا الكتاب يعدّ نقطة بداية ملائمة لدراسة شاملة في التوصيلية المفرطة . وهناك كتابان آخران من بين كتب كثيرة يمكننا الحاقها بهذا الفصل هما كتابا لندن† وشونبرك‡ .

* J. M. Blatt, *Theory of Superconductivity*, Academic Press, New York 1964.
† F. London, *Superfluids. The Macroscopic Theory of Superconductivity*, Vol. I, John Wiley, New York 1950; Dover Publications, New York 1961.
‡ D. Schoenberg, *Superconductivity*, Cambridge University Press, Cambridge 1960.

مسائل

18-1 افرض ان أسطوانة دائرية مفرطة التوصيل ذات طول لا نهائي ونصف قطر مقداره a وضعت في مجال مغناطيسي مستعرض ، وأن المجال يكون منتظماً عند المسافات الكبيرة من الاسطوانة ويساوي B_0 . (أ) أحسب المجالات داخل الاسطوانة وخارجها واحسب كثافة التيار في الاسطوانة وعلى سطحها . أفرض ان صفات التوصيل المفرط تمثل بدايامغناطيسية تامة أولاً ومن ثم بتوصيل نوعي تام . قارن بين الصياغتين المتكافئتين . (ب) أعد الحسابات للفرع (أ) مستخدماً معادلات لندن وعمق الاختراق الظاهري λ .

18-2 أكمل مناقشة المجالات الناشئة عن السلك الطويل جداً والحامل للتيار الكهربائي ، مستخدماً معادلات لندن ومبتدئاً من النتائج المستحصلة من المعادلات (35-18) الى (39-18) . (أ) أحسب **J** داخل الاسطوانة . (ب) ناقش الهبوط الأسي لـ **B** في المنطقة القريبة من سطح الاسطوانة .

18-3 أفرض ان كرة مفرطة التوصيل ذات نصف قطر مقداره a وضعت في مجال مغناطيسي منتظم قدره B_0 عند المسافات الكبيرة من الكرة . استخدم الصياغة الواردة في البند (5-18) كأساس لايجاد ما يأتي : (أ) مفكوك **curl curl B** ومنها أثبت ان مركبات **B** تحقق المعادلات داخل الكرة . (ب) إثبات المعادلة (27-18) . (جـ) مناقشة كمية الهبوط الأسي لـ **B** في المنطقة القريبة من سطح الكرة .

الفصل التاسع عشر

الكهروديناميك
ELECTRODYNAMICS

على الرغم من أن المجال الناشيء عن شحنة متحركة بسرعة يمكن ايجاده بسهولة بطريقة تحويلات لورنتز لمنظومة مستقرة آنياً للشحنة ، كما تم اجراؤه في الفصل السابع عشر ، فمن الممكن حسابه مباشرة من الجهود المعوقة أيضاً ، ومع ذلك فإن هنالك صعوبات معينة مصاحبة لهذه الطريقة . هذه الصعوبات متعلقة بالتعويق ، وتعكس حقيقة ان توزيع الشحنة (في الفضاء) الحالي يجب استنتاجه رجوعاً الى زمن تعوقي مناسب . وان هذا الاجراء سيكون أساساً اعتيادياً ماعدا تلك الاجزاء المختلفة للتوزيع الشحني التي تتطلب أزماناً تعوقية مختلفة . على الرغم من توقع اختفاء هذه الظاهرة للشحنات النقطية الا أنها في الحقيقة ليست كذلك . الجهود المتجهة واللامتجهة المناسبة لشحنة نقطية متحركة هي جهود لينارد ــ ڤيجرت (Lienard-Wiechert) . التي سوف نشتقها الآن .

19-1 جهود لينارد ــ ڤيجرت The Lienard-Wiechert potentials

جهود لينارد ــ ڤيجرت هي الجهود المتجهة واللامتجهة الناتجة عن شحنة نقطية متحركة . قد يفكر أحدهم بأن المقدار $q/4\pi\epsilon_0 R$. حيث ان R يمثل

نصف قطر التعوق «retarded radius» المناسب ، سوف يمثل مقدار الجهد اللامتجه الناشيء عن شحنة نقطية متحركة . والحقيقة هي ليست كذلك ، كما يمكن تبيان ذلك بعدة طرق . احدى الطرق التي يوصى بها هي بفرض حجم متحرك يحمل معه توزيعاً شحنياً ثابتاً ، كمثال على ذلك ، حجم كروي مشحون بانتظام متحرك خلال فضاء على طول مسار مفترض . المجال الناشيء عن شحنة نقطية يؤخذ كغاية ملائمة للمجال الناشيء عن هكذا توزيع .

المجال الناشيء عن توزيع شحني متحرك ، عند نقطة ξ وزمن t ، يمثل بالجهد المعوق * :

$$\varphi(\xi, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\xi - \mathbf{r}'|}\, dv'. \tag{19-1}$$

المشكلة الأساسية التي ظهرت الآن هي أن الفترة t' ليست ثابتة ، وبالتالي لا يمكن تحديد الحجم (أي أن الحجم الذي يكون فيه ρ مختلفاً عن الصفر) الذي يغطيه التكامل بشكل مباشر . ولتفادي هذه الصعوبة يمكننا اختيار زمن ثابت t_1 وبالتالي تبديل التكامل على $\mathbf{r}'$ الى تكامل على $\mathbf{r}_1$. الاختيار المناسب للزمن t_1 هو الزمن التعوقي «retarded time» لنقطة معينة في داخل التوزيع الشحني . بفرض ان الحجم الشحني متحرك بسرعة $\mathbf{v}(t_1)$ عند الزمن t_1 ، فان العلاقات الرياضية تكون :

$$\rho(\mathbf{r}', t') = \rho(\mathbf{r}_1, t_1), \tag{19-2}$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}' - \mathbf{v}(t')(t' - t_1) - \tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{v}}(t')(t' - t_1)^2 + \cdots, \tag{19-3}$$

حيث ان $\dot{\mathbf{v}}$ يمثل التفاضل الزمني للسرعة . ومن المهم فهم أن t' في المعادلة (3-19) ليست ثابتة ، ولكنها تعتمد على $\mathbf{r}'$. المشكلة المتبقية هي تحديد العلاقة بين dv' و dv_1 ، والتي يمكن إنجازها من خلال محددة جاكوبيان (Jacobian determinant) . العلاقة الرياضية تكون :

$$dv_1 = \frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(x', y', z')}\, dv', \tag{19-4}$$

حيث يمثل الجاكوبيان ، $\partial(x_1, y_1, z_1)/\partial(x', y', z')$ بالعلاقة الآتية :

* يدرس خلال هذا الفصل الفضاء الحر فقط .

$$\frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(x', y', z')} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x'} & \frac{\partial x_1}{\partial y'} & \frac{\partial x_1}{\partial z'} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x'} & \frac{\partial y_1}{\partial y'} & \frac{\partial y_1}{\partial z'} \\ \frac{\partial z_1}{\partial x'} & \frac{\partial z_1}{\partial y'} & \frac{\partial z_1}{\partial z'} \end{vmatrix}. \tag{19-5}$$

التفاضلات هي :

$$\frac{\partial x_1}{\partial x'} = 1 - v'_x \frac{\partial t'}{\partial x'} - \dot{v}'_x(t' - t_1)\frac{\partial t'}{\partial x'} + \cdots,$$

and و (19-6)

$$\frac{\partial x_1}{\partial y'} = -v'_x \frac{\partial t'}{\partial y'} - \dot{v}'_x(t' - t_1)\frac{\partial t'}{\partial y'} + \cdots,$$

حيث ان v'_x تساوي $v_x(t')$ وتمثل مركبة $\mathbf{x}$ للسرعة عند الزمن التعوقي $\mathbf{t'}$ ، علاقة الزمن التعوقي $\mathbf{t'}$ بالموقع التعوقي «retarded position» ببساطة تكون :

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r}' - \xi|}{c}; \tag{19-7}$$

ومن ثم :

$$\frac{\partial t'}{\partial x'} = -\frac{n'_x}{c}, \tag{19-8}$$

حيث ان $\mathbf{n'_x}$ تمثل وحدة متجه باتجاه $\mathbf{r}-\xi$. وبتعويض مباشر لمفكوك جاكوبيان ، واستخدام المعادلات (19-6) و (19-8) ، نجد :

$$\frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(x', y', z')} = 1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}'}{c} + \frac{\dot{\mathbf{v}}' \cdot \mathbf{n}'(t' - t_1)}{c} + \cdots, \tag{19-9}$$

حيث أهملت الحدود العليا التي تشتمل على المشتقات الثانية والمشتقات العليا لـ $\mathbf{v'}$.

يمكن استخدام المعادلة (19-9) في المعادلة (19-1) لايجاد الجهد اللامتجه ، وعلى أي حال ، بما أن الاهمية الاساسية تتمثل في حجوم صغيرة مشحونة (شحنات نقطية) ، فان من المناسب ملاحظة ما اذا :

$$\frac{\dot{\mathbf{v}}' \cdot \mathbf{n}'}{c}(t' - t_1) \cong \frac{\dot{v}d}{c^2} \ll 1,$$

حيث أن d تعد كقياس لحجم التوزيع الشحني ، فان هذا الحد يمكن اهماله بالتأكيد في حالة الغاية للشحنة النقطية . وتوجد شروط مشابهة للحدود المشتملة على المشتقات العليا ، فلذلك ، لا نحتاج لفرضها . وأخيراً :

$$\varphi(\xi, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_1, t_1)}{|\xi - \mathbf{r}'|} \frac{dv_1}{1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}'/c}. \tag{19-10}$$

مرة أخرى ، فلو أن $d \ll |\xi - \mathbf{r}'|$ فإن المقدار $|\xi - \mathbf{r}'|$ يمكن استبداله بـ R_{t_1} ، المسافة من النقطة الداخلية (المختارة سابقاً) الى نقطة التقصي عند زمن t_1 ، وبهذا * :

$$\varphi(\xi, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_{t_1}(1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}'/c)} \int \rho(\mathbf{r}_1, t_1)\, dv_1 \tag{19-11}$$

أو ، بما أن التكامل أصبح الآن حول حجم معرف بشكل جيد ، فأن :

$$\varphi(\xi, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_{t_1}[1 + (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}'/c)]}, \tag{19-12}$$

والتي تمثل جهد لينارد ــ ڤيجرت اللامتجه . ونجد أن الجهد المتجه يصبح :

$$\mathbf{A}(\xi, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}'}{R_{t_1}(1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}'/c)}. \tag{19-13}$$

غالباً ما تكتب هذه الصيغ كالآتي :

$$\varphi(\xi, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{\frac{1}{R[1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}/c)]}\right\}_{\text{ret}},$$

and و (19-14)

$$\mathbf{A}(\xi, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left\{\frac{\mathbf{v}}{R[1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}/c)]}\right\}_{\text{ret}},$$

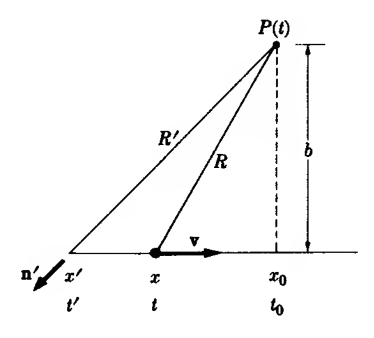
والتي تعني ببساطة أن الكميات داخل الأقواس ينبغي حسابها عند الزمن t_1 .

---

* لاحظ ان $\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{v}(t_1) \cdot \mathbf{n}(t_1)$ للتقريب المشمول في المعادلة (11-19)

19-2 المجال الناشيء عن شحنة نقطية منتظمة الحركة :
The field of a uniformly moving point charge

معظم التطبيقات المباشرة لجهود لينارد ـ ڤيجرت هي لحساب المجال الناشيء عن شحنة نقطية متحركة بخط مستقيم وبسرعة ثابتة . الشكل (19-1) يبين الشكل الهندسي لمثل هذه الحالة . يجب حساب المجال عند النقطة P في زمن t ، حيث



شكل (19-1) . رسم لحساب المجال الكهربائي لشحنة نقطية متحركة

تصبح الشحنة عند النقطة x في ذلك الزمن . يتعين الموقع التعوقي x′ والزمن التعوقي t′ من المعادلة الآتية :

$$R'^2 = c^2(t - t')^2 = (x_0 - x')^2 + b^2. \qquad (19\text{-}15)$$

يعطى الجهد اللامتجه بالصيغة الآتية :

$$\varphi(P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R'[1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}'/c)]}. \qquad (19\text{-}16)$$

وواضح من الرسم أن :

$$R' \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}'}{c} = -R' \frac{v}{c} \frac{x_0 - x'}{R'} = -\frac{v(x_0 - x')}{c}. \qquad (19\text{-}17)$$

بالطبع بعد تعويض المعادلة (19-17) في المعادلة (19-16) ستظهر في الصيغة الناتجة لـ φ متغيرات متعددة . وفي حساب المجال الكهربائي من خلال أخذ

الإنحدار لـ φ ، ينبغي أخذ تفاضلات هذه المتغيرات بدقة والتي ستؤدي الى حسابات معقدة ومرهقة . بدلاً من اتباع هذه الطريقة ، فإن من الأجدر اختزال المتغيرات غير المطلوبة في φ وايجاد صيغة تشتمل على احداثيات النقطة P فقط ، كالزمن الحالي t والمعاملات التي تصف المسار للجسيم المشحون .

بما ان الشحنة تحركت من x' الى x_0 في زمن مقداره t_0-t' ، فمن الواضح أن :

$$c^2(t-t')^2 = v^2(t_0-t')^2 + b^2. \qquad (19\text{-}18)$$

وبحل هذه المعادلة لايجاد t' ، ينتج الآتي :

$$t' = \frac{c^2t - v^2t_0 \pm \sqrt{v^2c^2(t_0-t)^2 + b^2(c^2-v^2)}}{c^2-v^2}. \qquad (19\text{-}19)$$

ينبغي استخدام علامة الناقص في هذه المعادلة لكي تكون t' متعوقة بالنسبة الى t . لإثبات ذلك ، من الضروري ملاحظة ان عند الزمن : $t=t_0=0$ ، ينتج : $t' = \pm\sqrt{b^2(c^2-v^2)}/(c^2-v^2)$ وبهذا فإن الأشارة السالبة تعطي زمناً متقدماً فقط . وبعد أن أوجدنا t' ، يمكننا أن نجد x_0-x' من :

$$x_0 - x' = v(t_0-t')$$

و

$$= v\left(\frac{t_0(c^2-v^2) - c^2t + v^2t_0 + \sqrt{v^2c^2(t_0-t)^2 + b^2(c^2-v^2)}}{c^2-v^2}\right), \qquad (19\text{-}20)$$

في حين R' سيمثل بالصيغة الآتية :

$$R' = c\left(\frac{t(c^2-v^2) - c^2t + v^2t_0 + \sqrt{v^2c^2(t_0-t)^2 + b^2(c^2-v^2)}}{c^2-v^2}\right). \qquad (19\text{-}21)$$

من الجائز أن نستخدم المعادلات (19-20) و (19-21) لإيجاد المقام الذي ظهر في المعادلة (19-16) . وهذا المقام يصبح :

$$R^* = R' - \frac{v(x_0-x')}{c} \qquad (19\text{-}22)$$

خلال استخدام المعادلة (19-17) ، ومن ثم يصبح :

$$R^* = (c^2 - v^2)^{-1} [v^2c(t_0 - t) + c\sqrt{v^2c^2(t_0 - t)^2 + b^2(c^2 - v^2)}$$
$$- v^2c(t_0 - t) - \frac{v^2}{c}\sqrt{v^2c^2(t_0 - t)^2 + b^2(c^2 - v^2)}]$$
$$= \sqrt{v^2(t_0 - t)^2 + b^2(1 - v^2/c^2)} \qquad (19\text{-}23)$$

خلال المعادلات (20-19) و (21-19) . وبذلك يكون الجهد اللامتجه :

$$\varphi(P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{v^2(t_0 - t)^2 + b^2(1 - v^2/c^2)}}, \qquad (19\text{-}24)$$

في حين يكون الجهد المتجه :

$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{v^2(t_0 - t)^2 + b^2(1 - v^2/c^2)}}. \qquad (19\text{-}25)$$

المهم أن نفهم بوضوح أن المعادلات (24-19) و (25-19) تحتوي على الموقع والزمن لنقطة التقصي فقط ، وكذلك تحتوي على المعادلات (t_0 ، $\mathbf{v}$) التي تصف المسار للجسيم المشحون .

لجعل هذا النص أكثر تماسكاً أو تحديداً ولوضع الجهود في صيغ أكثر ملاءمة لحساب المجالات ، يجب تثبيت منظومة الاحداثيات بدقة اكثر . بما أن الشحنة متحركة على طول المحور x ، ولما كان x يمثل محور التناظر للمسألة ، فإن من الضروري تعيين نقطة الأصل عليه . وينجز هذا بأخذ $x = 0$ ليمثل موقع الشحنة عند $t = 0$. وبهذا $x = vt$ وبالتخصيص $x_0 = vt_0$.

فاذا عينت النقطة P بدلالة الاحداثيات الديكارتية ζ , η , ξ، فإن :

$$\xi = x_0 = vt_0 \quad \text{and} \quad \eta^2 + \zeta^2 = b^2. \qquad (19\text{-}26)$$

باستخدام هذه النتائج في المعادلة (25-19) ، وجعل $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ ، نجد :

$$\varphi(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(\xi - vt)^2 + (\eta^2 + \zeta^2)(1 - v^2/c^2)}}$$

و

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{(\xi - vt)^2 + (\eta^2 + \zeta^2)(1 - v^2/c^2)}}. \qquad (19\text{-}27)$$

وهنا يجب أن نتذكر أن هذه المعادلات تطبق فقط اذا كانت $\mathbf{v}$ على طول المحور x ، وبالنسبة للإتجاهات الأخرى فإن ذلك يتطلب عمل تحويرات للمعادلات .

الشيء المهم في المعادلتين (27-19) هو أنها وضعت في صيغة مثالية ملائمة لحساب المجالات . وهكذا نجد أن :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad}_{\xi}\, \varphi \\ &= -\frac{\mu_0 q}{4\pi}\mathbf{v}\frac{v(\xi - vt)}{R^{*3}} \\ &\quad + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^{*3}}[(\xi - vt)\mathbf{i} + \eta(1 - v^2/c^2)\mathbf{j} + \zeta(1 - v^2/c^2)\mathbf{k}].\end{aligned} \tag{19-28}$$

لاحظ ان $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ و $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ و $\xi - vt = x_0 - x$ ، تجعل من الممكن اعادة كتابة المعادلة (28-19) في الصيغة الآتية :

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{R}}{R^{*3}}(1 - v^2/c^2), \tag{19-29}$$

حيث أن **R** يمثل متجهاً يبدأ من موقع الشحنة عند زمن t وينتهي بالنقطة P .

من الممكن إيجاد الحث المغناطيسي باستخراج قيمة $\mathbf{B} = \mathbf{curl}\ \mathbf{A}$ ، ومع ذلك ، فبملاحظة :

$$\mathbf{A} = \mu_0\epsilon_0\mathbf{v}\varphi \tag{19-30}$$

ينتج :

$$\mathbf{B} = \mu_0\epsilon_0\, \mathbf{curl}\,(\mathbf{v}\varphi) = -\mu_0\epsilon_0\mathbf{v} \times \mathbf{grad}\, \varphi. \tag{19-31}$$

بما أن **v** على طول المحور x ، فان مركبات y و z لـ $\mathbf{grad}\ \varphi$ فقط تكون ذات أهمية في الضرب المتجه . وأن هذه المركبات هي مركبات y و z السابقة لـ **E** ، وبهذا نجد :

$$\mathbf{B} = \mu_0\epsilon_0\mathbf{v} \times \mathbf{E}, \tag{19-32}$$

والتي تنهي الحساب للمجالات .

من المهم ملاحظة (على الرغم من أن مصدر الاشعاع هو الموقع التعوقي) أن خطوط **E** تكون مبتعدة بالاتجاه عن الموقع الآني للشحنة . وأن خطوط الحث المغناطيسي تكون على شكل دوائر تقع مراكزها على مسار الشحنة . وأن المجال لا يكون متماثلاً كروياً كما هو في الحالة المستقرة ، ولكن يكون أقوى في الاتجاه العمودي للسرعة .

لقد أوجدنا متجهات المجال ، ونحن الآن في موقع يؤهلنا حساب الكميات الكهرومغناطيسية الاخرى ، ومع ذلك ، نفضل عدم الاستمرار في ذلك ، ولكننا نشير الى القارئ مراجعة كتب* أكثر تقدماً والتي تبحث بإسهاب بمثل هذه المسائل .

19-3 الاشعاع من شحنة نقطية معجلة : Radiation from an accelerated point charge

اذا ماأردنا دراسة شحنة نقطية معجلة فإن تبسيطات معينة كالتي ظهرت في حالة السرعة الثابتة لم يعد بالامكان استخدامها . والصعوبة الرئيسة هنا هي نتيجة مباشرة لحقيقة أن جهود لينارد – ڤيجرت لا يمكن الاستمرار بالتعبير عنها بدلالة الموقع الحالي للشحنة . وعوضاً عن ذلك يظهر الموقع التعوقي والزمن بشكل واضح ، ان الجهود المتمثلة بالصيغ الآتية :

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R(1+\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}/c)}\right]_{\text{ret}}$$

و

$$\mathbf{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\mathbf{v}/c^2}{R(1+\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}/c)}\right]_{\text{ret}} \qquad (19\text{–}33)$$

مازالت صحيحة . ومع ذلك ، عند اجراء تفاضل هذه الجهود لايجاد المجالات يجب ملاحظة المشتقات بالنسبة الى الموقع لنقطة المجال ينبغي أخذها عند زمن تقصٍ ثابت ، والمشتقات بالنسبة الى زمن التقصي يجب أخذها عند نقاط مجال ثابتة . وبما أن الزمن التعوقي يظهر بشكل جلّي في صيغ الجهود ، يجب توخي الدقة في ايجاد المشتقات الصحيحة .

لايضاح مشكلة التفاضل ، نلاحظ ان الجهود هي دوال لنقطة المجال ξ وزمن التقصي t والموقع التعوقي $\mathbf{r}'$ للشحنة والزمن التعوقي t' . يعين مسار الجسم باعطاء $\mathbf{r}'$ كدالة لـ t' ، وبهذا يمكن ازالة الاعتماد على $\mathbf{r}'$. علاوة على ذلك ، فان شرط التعويق «retardation condition»

$$(\xi - x')^2 + (\eta - y')^2 + (\zeta - z')^2 = c^2(t - t')^2 \qquad (19\text{–}34)$$

* For example: Panofsky and Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2nd Ed., Addison-Wesley, 1962.

يعطينا علاقة رياضية واحدة بين المتغيرات المتبقية . وهكذا ، من الواضح (على الرغم من أن الجهود تعتمد ظاهرياً على ثماني متغيرات) ، إن أربعة من هذه المتغيرات هي بالحقيقة مستقلة . في حساب المجالات **E** و **B** من الضروري اجراء تفاضل الجهود بالنسبة الى كل من ξ , η , ζ و t مع جعل المتغيرات الثلاثة الاخرى ثابتة ، فمثلاً ، بتفاضل **A** بالنسبة الى t نجعل ξ , η و ζ ثوابتاً . وبما أن t' تظهر بشكل واضح وجلي في الصيغ الرياضية للجهود ، فانها تسبب بعض الصعوبات في حسابات هذه التفاضلات .

لمتابعة المتغيرات عُدّت ثابتة خلال التفاضلات المختلفة ، فسوف نتبنى المصطلح الآتي : سوف تُعين كافة المتغيرات ، المعتمدة والمستقلة ، والتي تؤخذ ثابتة في التفاضل الجزئي برمز التفاضل الجزئي المألوف . وبعكسه فان كافة المتغيرات الاخرى تؤخذ ثابتة ، ومن ثم سوف تميز برمز سفلي أو دليلي . وبهذا ، فان المشتقة التي نحتاجها لـ **A** في حساب **E** هي $(\partial A/\partial t)_\xi$ ، في حين أنها لـ φ تكون $(\partial \varphi/\partial \xi)_{\eta,\zeta,t}$ .... وهلم جرا . لتحويل $(\partial A/\partial t)_\xi$ الى مشتقة بالنسبة الى t' نكتب :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_\xi = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'}\right)\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_\xi \tag{19–35}$$

و

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'}\right)_\xi = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'}\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial t'}\right)_\xi . \tag{19–36}$$

شرط التعويق المتمثل بالمعادلة (19–34) ، إضافة الى المعادلة التي تعين المسار المنحي $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(t')$ ، يكافىء لمعادلة ذات الصيغة الآتية :

$$f(\xi, t, t') = 0.$$

وهذه المعادلة تدل ضمناً على أن $(\partial t/\partial t')_\xi = 1/(\partial t'/\partial t)_\xi$ ، والتي عند توحيدها مع المعادلات (19–35) و (19–36) ، تعطي :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_\xi = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'}\right)_\xi \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_\xi . \tag{19–37}$$

عند إجراء حسابات مشتقات الزمن للجهود . فإن هذه المعادلة هي بالضبط ما نحتاج اليه لإيجاد المجالات الكهربائية والمغناطيسية . وإن كافة المشتقات الأخرى تكون ذات صيغ $(\partial\varphi/\partial\xi)_t$. ويمكن استخراج مثل هذه المشتقات بسهولة ، وذلك بملاحظة أن :

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_t = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_{t,t'} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t'}\right)_{\xi,t}\left(\frac{\partial t'}{\partial\xi}\right)_t, \qquad (19\text{–}38)$$

والتي اشتملت على كافة الرموز الدليلية لتجاوز أي احتمالية للإلتباس .

يتضح من المعادلات (37–19) و (38–19) أن الحسابات المتعلقة بالمجال E تتطلب ايجاد المشتقات $(\partial t'/\partial\xi)_t$ و $(\partial t'/\partial t)_\xi$. ويمكن إيجاد كل منها بيسر بتفاضل الجذر التربيعي للمعادلة (34–19) :

$$[(\xi - x')^2 + (\eta - y')^2 + (\zeta - z')^2]^{1/2} = c(t - t'), \qquad (19\text{–}39)$$

بالطريقة الملائمة . فإذا أخذنا المشتقة بالنسبة الى t (بثبوت ξ) ، تنتج المعادلة الآتية :

$$-\frac{1}{R'}\mathbf{R}'\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}'}{\partial t}\right)_\xi = c\left[1 - \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_\xi\right] \qquad (19\text{–}40)$$

حيث إن : $\mathbf{r}' = \mathbf{i}x' + \mathbf{j}y' + \mathbf{k}z'$ و $\mathbf{R}' = \xi - \mathbf{r}'$. بما أن $\mathbf{r}'$ يعتمد بوضوح على t' فقط ، فإن المشتقة في الطرف الأيسر للمعادلة تغير بسهولة لتعطي

$$-\frac{1}{R'}\mathbf{R}'\cdot\mathbf{v}'\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_\xi = c\left[1 - \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_\xi\right], \qquad (19\text{–}41)$$

حيث أن $\mathbf{v}' = \partial\mathbf{r}'/\partial t'$ تمثل سرعة الشحنة عند الزمن التعوقي t' . وبحلها لقيمة $(\partial t'/\partial t)_\xi$ تقودنا الى :

$$\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_\xi = \frac{R'}{R' - \mathbf{R}'\cdot\mathbf{v}'/c} = \frac{R'}{R^*}. \qquad (19\text{–}42)$$

بحسابات مماثلة وبتفاضل المعادلة (39–19) بالنسبة الى ξ عند ثبوت (η, ζ, t) نحصل على :

$$\left(\frac{\partial t'}{\partial\xi}\right)_t = -\frac{(\xi - x')}{(R' - \mathbf{R}'\cdot\mathbf{v}'/c)c}. \qquad (19\text{–}43)$$

وبحساب المركبتين الأخريين ، وبكتابة الناتج كمعادلة اتجاهية ، نجد :

$$(\mathbf{grad}_\xi\, t')_t = -\frac{\mathbf{R}'/c}{R' - \mathbf{R}'\cdot\mathbf{v}'/c} = -\frac{\mathbf{R}'}{R^*c}. \qquad (19\text{–}44)$$

يحسب المجال الكهربائي الناشيء عن شحنة نقطية معجلة بسهولة من جهود لينارد ـ فيجرت وباستخدام المشتقات السابقة ،

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}, t) = -(\mathbf{grad}_\xi\ \varphi)_t - \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_\xi$$
$$= -(\mathbf{grad}_\xi\ \varphi)_{tt'} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t'}\right)_{\xi t} (\mathbf{grad}_\xi\ t')_t - \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'}\right)_\xi \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_\xi . \quad (19\text{–}45)$$

ومن الممكن إيجاد مشتقات الجهود التي ظهرت في المعادلة في أعلاه لتكون :

$$(\mathbf{grad}_\xi\ \varphi)_{tt'} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}'/R' - \mathbf{v}'/c}{(R' - \mathbf{R}' \cdot \mathbf{v}'/c)^2}, \quad (19\text{–}46)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t'}\right)_{\xi t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\mathbf{R}' \cdot \mathbf{v}'}{R'} - \frac{v'^2}{c} + \frac{\mathbf{R}' \cdot \dot{\mathbf{v}}'}{c}\right]\frac{1}{R^{*2}}, \quad (19\text{–}47)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'}\right)_\xi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\dot{\mathbf{v}}'}{R^*c^2} + \frac{\mathbf{v}'}{c^2}\frac{1}{R^{*2}}\left(\frac{\mathbf{R}' \cdot \mathbf{v}'}{R'} - \frac{v'^2}{c} + \frac{\mathbf{R}' \cdot \dot{\mathbf{v}}'}{c}\right)\right]\frac{1}{R^{*2}}. \quad (19\text{–}48)$$

باستخدام هذه النتائج في المعادلة (45–19) نجد :

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R^{*3}}\left(\mathbf{R}' - \frac{\mathbf{R}'v'}{c}\right)\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right) + \left(\mathbf{R}' - \frac{\mathbf{R}'v'}{c}\right)\frac{\dot{\mathbf{v}}' \cdot \mathbf{R}'}{R^{*3}c^2} - \frac{\dot{\mathbf{v}}' R'}{R^{*2}c^2}\right]. \quad (19\text{–}49)$$

حسابات مماثلة تعطي :

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left\{\frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{R}'}{R^{*3}}\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right) + \frac{1}{R^{*3}c}\frac{\mathbf{R}'}{R'} \times \left[\mathbf{R}' \times \left(\left[\mathbf{R}' - \frac{R'\mathbf{v}'}{c}\right] \times \dot{\mathbf{v}}'\right)\right]\right\}. \quad (19\text{–}50)$$

قد تستخدم هذه النتائج لتفسير عدة ظواهر مهمة كأضمحلال الإشعاع وبرمشترالونك التقليدي . معظم هذه الحسابات موجود بيسر في مختلف كتب الكهروديناميك وباستثناء مثال واحد فإننا سنهمل هذه الحسابات في هذا الكتاب لغرض الايجاز .

19-4 مجالات الاشعاع للسرع البطيئة :
Radiation fields for small velocities

لو تصورنا سرعة الشحنة قليلة بالنسبة لسرعة الضوء ، أي إذا كانت $v'/c \ll 1$ ، يصبح بالإمكان إجراء التقريبات الآتية :

$$\mathbf{R}' - \frac{R'\mathbf{v}'}{c} \approx \mathbf{R}' \tag{19-51}$$

و

$$R^* = R' - \frac{\mathbf{R}' \cdot \mathbf{v}'}{c} \approx R' \tag{19-52}$$

في المعادلتين (19-49) و (19-50) . بالإضافة الى ذلك ، إذا درسنا ما يطلق عليه مجال الإشعاع ، أي الجزء من المجال الذي يتناسب مع $1/R'$ ، فإن المعادلتين (19-49) و (19-50) تصبحان ،

$$\mathbf{E}(\xi, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}'(\dot{\mathbf{v}}' \cdot \mathbf{R}') - \dot{\mathbf{v}}' R'^2}{R'^3 c} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}' \times (\mathbf{R}' \times \dot{\mathbf{v}}')}{R'^3 c^2} \tag{19-53}$$

و

$$\mathbf{B}(\xi, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{R}' \times [\mathbf{R}' \times (\mathbf{R}' \times \dot{\mathbf{v}}')]}{R'^4 c} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{\mathbf{v}}' \times \mathbf{R}'}{R'^2 c} \cdot \tag{19-54}$$

ومن متجهات المجال هذه نجد متجه بوينتينك .

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2\mu_0 c^2} \frac{1}{R'^5 c^3} [\mathbf{R}' \times (\mathbf{R}' \times \dot{\mathbf{v}}')] \times [\dot{\mathbf{v}}' \times \mathbf{R}'], \tag{19-55}$$

والذي يختزل الى الصيغة الآتية ، من خلال استخدامنا لمتطابقات إتجاهية :

$$\mathbf{S} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{\mathbf{R}'(\mathbf{R}' \times \dot{\mathbf{v}}')^2}{R'^5} \cdot \tag{19-56}$$

وتستخرج القدرة المشعة الكلية بتكامل قيمة بوينتينك حول سطح مغلق يحيط بالشحنة . وان الاختيار المناسب لمثل هذا السطح هو كرة متمركزة عند الموقع التعوقي للشحنة . علاوة على ذلك ، فاذا أختير المحور z باتجاه $\dot{\mathbf{v}}'$ ، فان :

$$\begin{aligned} P_R = -\frac{dW}{dt} &= \int_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}\, da \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \int \frac{R'^2 \dot{v}'^2 \sin^2\theta}{R'^5} \mathbf{R}' \cdot \frac{\mathbf{R}'}{R'} R'^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi, \end{aligned} \tag{19-57}$$

ومنها يمكننا إيجاد النتيجة المألوفة لدينا وهي :

$$P_R = -\frac{dW}{dt} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{2}{3}\frac{\dot{v}'^2}{c^3} \qquad (19\text{–}58)$$

للقدرة المشعة من شحنة معجلة تتحرك ببطء .

وبهذا ننهي نظرتنا العامة للاشعاع الناتج عن شحنات متحركة . ولقد قدمنا الافكار الأساسية للموضوع مع بعض التطبيقات الاولية بشكل مفصل . لتفاصيل الحسابات الاخرى ينبغي الرجوع الى كتب منشورة مختلفة ونخص منها :

PANOFSKY and PHILLIPS, *Classical Electricity and Magnetism*, 2nd Ed., Addison-Wesley, 1962.

BECKER, *Theorie der Elektrizität*, Vol. II, Teubner (Leipzig), 1933.

LANDAU and LIFSHITZ, *The Classical Theory of Fields*, 2nd Ed., Addison-Wesley, 1962.

SOMMERFELD, *Electrodynamics*, Academic Press, 1952.

الملحق الاول

التعريف المنطقي لوحدات النظام MKS :
LOGICAL DEFINITION OF MKS UNITS

ان ظهور الكميتان ϵ_0 و μ_0 في صيغتي قانون كولوم وقانون بايوت على الترتيب يسبب نشوء صعوبة غير متوقعة . وببساطة تتجلى هذه الصعوبة في حقيقة أن قانون كولوم :

$$\mathbf{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}, \tag{I-1}$$

لا يمكن استخدامه لتعريف الكولوم ما لم تكن الكمية ϵ_0 معروفة . وبالمثل لا يمكن استخدام قانون كولوم لتعريف ϵ_0 ما لم تكن وحدة قياس الشحنة ـ الكولوم معرفة مسبقاً . النقطة الفنية هي أنه طالما كانت قيمة الكمية ϵ_0 معينة تجريبياً في الاساس ، فان استخدام قانون كولوم لتعريف الكولوم سيؤدي الى الحصول على قيمة للكولوم تتغير في كل مرة عند إعادة تعيين قيمة ϵ_0 . ولهذا يصبح من الضروري استخدام قانون كولوم لتعريف ϵ_0 ، على أن يعرف الكولوم بوسيلة أخرى .

بيد أن الوضع يختلف في حالة المغناطيسية اذ لا تظهر صعوبة مماثلة وذلك لأن الكمية $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ weber/ amp.m معطاة بالتعريف . ونتيجة لذلك نجد أن التعبير :

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{II'}{r} \tag{I-2}$$

الذي يمثل القوة لوحدة الطول المؤثرة بين سلكين متوازيين حاملين للتيار يمكن استعماله لتعريف الامبير ، وهذا يعني أن :
"الامبير هو ذلك التيار الثابت القيمة الذي اذا مر في كل من سلكين طويلين متوازيين تفصلهما مسافة قدرها متراً واحداً ، لنشأت قوة متبادلة بين السلكين قيمتها العددية لوحدة الطول تساوي 2×10^{-7} نيوتن/ متر" .
وبالطبع يمكن أستخدام أي وضع هندسي آخر ، وعند ذلك ينتج تعريفاً لا إلتباس فيه للامبير ، ذا قيمة عددية مساوية .

وبتعريف الامبير يصبح بوسعنا تعريف الكولوم على انه قيمة الشحنة التي ينقلها تيار ثابت قدره أمبيراً واحداً عندما يسري لمدة ثانية واحدة . وعند ذلك يمكن استعمال قانون أمبير لتعريف الكمية ϵ_0 . وبهذا لم يعد هناك وجود لمشكلة حقيقية ، انما توجد مشكلة مصطنعة ناشئة عن الرغبة في معالجة الحالة الكهروستاتيكية ، التي تعد بسيطة رياضياً ، قبل شرح التأثير المغناطيسي المتبادل بين التيارات .

وهناك من يظن ان هذه المشكلة لا تظهر للوجود باستعمال النظام الكاوسي للوحدات . ان هذا الشيء يكون صحيحاً فقط في الحالة التي يؤخذ فيها المعامل الثابت في قانون كولوم مساوياً ($1\,\mathrm{dyne\ cm^2/esu^2}$) ، ولكنه يكون عبئاً على حساب الاتفاق مع العمل التجريبي حول التأثيرات المغناطيسية المتبادلة . وهذا يعني أن سرعة الضوء اما أن تظهر في تعريف وحدة التيار أو ان تظهر في التعبير عن القوة المتبادلة بين الموصلات الحاملة للتيار . ولما كانت المعالجة الاعتيادية للموضوع تقتضي تناول الكمية المعرفة أولاً ، فان المشكلة تكون أقل وقعاً على النفس في النظام الكاوسي للوحدات مما هو عليه في النظام المتري .

الملحق الثاني

أنظمة أخرى للوحدات :
OTHER SYSTEMS OF UNITS

نظام الوحدات المستعمل في هذا الكتاب هو النظام المتري المتطور . يمتاز هذا النظام بمزايا كثيرة منها أنه يحتوي على الوحدات الكهربائية العملية ، لفرق الجهد (الفولت) ، وللتيار (الامبير) ، وللمقاومة (الاوم) والخ . وبفضل هذه المزايا نال هذا النظام أستحسان المهندسين الكهربائيين ، وأصبح النظام المفضل لدى الفيزيائيين أيضاً لدراسة الظواهر الكهرومغناطيسية . بيد أن نظاماً آخر معروف باسم النظام الكاوسي بقي النظام المفضل في الاستعمال في حقول أخرى مثل الفيزياء الذرية والفيزياء النووية . أما معظم أنظمة الوحدات الاخرى فقد ضعف شأنها وتلاشى استعمالها ، ولهذا سيقتصر الشرح هنا على النظام الكاوسي فقط .

نتج النظام الكاوسي من دمج نظامين سابقين هما النظام الكهروستاتيكي (esu) والنظام الكهرومغناطيسي (emu) . ينتج النظام الكهروستاتيكي من كتابة قانون كولوم بالصيغة :

$$\mathbf{F}_2 = \frac{q_1 q_2 \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}, \tag{II-1}$$

وتعريف الوحدة الكهروستاتيكية للشحنة على أنها تلك الشحنة التي اذا وضعت على بعد قدره سنتيمتراً واحداً عن شحنة مماثلة لتأثرت بقوة قدرها دايناً واحداً . ومن البديهي أن الوحدة الكهروستاتيكية للشحنة أصغر بكثير من الكولوم (الحقيقة أن الكولوم يساوي 3×10^9 من الوحدات الكهروستاتيكية) . أما النظام الكهرومغناطيسي فينتج من كتابة قانون بايوت بالصيغة :

$$d\mathbf{F}_2 = I_1 I_2 \frac{d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3} \tag{II-2}$$

ويعرف الابامبير abampere على أنه ذلك التيار الذي اذا مر في سلك مستقيم طويل لنتجت قوة قدرها دايناً واحداً لكل سنتمتر عندما يوضع سلك آخر على بعد سنتمتر واحد من السلك الأول وبحيث يحمل نفس القدر من التيار . وبما أن :

$$|\mu_0/4\pi| = 10^{-7}$$

و

$$1 \text{ newton} = 10^5 \text{ dynes}$$

لوجدنا :

$$1 \text{ abamp} = 10 \text{ amp}$$

يمكن استخدام أي من الملاحظتين المذكورتين في أعلاه لتطوير نظام متكامل للوحدات . بيد أن الواقع التاريخي يشير الى استخدام النظام الكهروستاتيكي أساساً في المسائل الكهروستاتيكية ، واستعمال النظام الكهرومغناطيسي في المسائل الكهرومغناطيسية . ومن الطبيعي عندئذٍ في هذه الحالة أن تدعو الحاجة الى تطوير نظام هجيني يستعمل فيه النظام الكهروستاتيكي للكميات الكهربائية والنظام الكهرومغناطيسي للكميات المغناطيسية . وبالفعل إنبثق على هذا النحو النظام المدعو النظام الكاوسي . إن نقطة التلامس الرئيسة بين النظامين الكهروستاتيكي والكهرومغناطيسي هي كثافة التيار ، إذ أن :

$$\mathbf{J}_{\text{emu}} = \frac{\mathbf{J}_{\text{esu}}}{c} . \tag{II-3}$$

c ترمز لسرعة الضوء .

في النظام الكاوسي للوحدات تأخذ معادلات ماكسويل الشكل الآتي :

$$\begin{aligned} \text{curl}\,\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \text{div}\,\mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \text{curl}\,\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi \mathbf{J}}{c}, \\ \text{div}\,\mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \tag{II-4}$$

حيث تم اشتقاق المجالين المغناطيسي والكهربائي من الجهد المتجه والجهد اللامتجه حسب العلاقتين :

$$\mathbf{B} = \textbf{curl}\,\mathbf{A} \quad \text{and} \quad \mathbf{E} = -\textbf{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{II-5}$$

وقوة لورنتز تعطى وفقاً للعلاقة :

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right) \tag{II-6}$$

أما **D** و **B** فيرتبطان بالكميتين **E** و **H** بموجب العلاقتين :

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad \text{and} \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \qquad \text{(II-7)}$$

إذ ان **P** تمثل عزم ثنائي القطب الكهربائي $(\mathbf{p} = q\mathbf{l})$ لوحدة الحجم ، و **M** تمثل عزم ثنائي القطب المغناطيسي $(\mathbf{m} = IA\mathbf{n}/c)$ لوحدة الحجم . ان تلك المعادلات تكفي لتعريف النظام الكاوسي للوحدات . والجدول (II-1) يعطي العلاقة بين وحدات النظامين الكاوسي والمتري بالارقام .

الجدول II-1

Quantity	Gaussian units	mks units
Charge	3×10^9 esu	= 1 coul
Current	3×10^9 esu/sec = 10^{-1} abamp	= 1 amp
Electric field	$\frac{1}{3} \times 10^{-4}$ dyne/esu	= 1 volt/m
Potential	1/300 erg/esu (statvolt)	= 1 volt
Magnetic induction	10^4 gauss	= 1 weber/m^2
Magnetic intensity	$4\pi \times 10^{-3}$ oersted	= 1 amp-turns/m
Electric displacement	$12\pi \times 10^5$ esu	= 1 coul/m^2
Capacitance	9×10^{11} cm	= 1 farad
Inductance	10^9 emu	= 1 henry
Magnetic flux	10^8 maxwells	= 1 weber

الملحق الثالث

البرهان على ان : $\mathbf{CURL\ B} = \mu_0 \mathbf{J}$ ، $\mathbf{DIV\ B = 0}$

سنبرهن في هذا الملحق ، باجراء بعض العمليات الرياضية المعقدة ، على أن العلاقة :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dv_1 \qquad \text{(III–1)}$$

تؤول الى المعادلة :

$$\text{div}\,\mathbf{B} = 0, \qquad \text{(III–2)}$$

وعلى أن استخدام العلاقة (III–1) مع العلاقة $\text{div}\ \mathbf{J} = 0$ يؤدي الى المعادلة :

$$\textbf{curl}\,\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \qquad \text{(III–3)}$$

للحصول على المعادلة الاولى نأخذ تباعد العلاقة (III–1) . وباستعمال المتطابقة :

$$\text{div}\,(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{A} \cdot \textbf{curl}\,\mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \textbf{curl}\,\mathbf{A}$$

ينتج الآتي :

$$\text{div}_2\,\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \cdot \textbf{curl}_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dv_1. \qquad \text{(III–4)}$$

لكن الكمية $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3$ هي ميل الكمية $-1/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ نسبة للمتجه $\mathbf{r}_2$. ولما كان التفاف أي ميل يساوي صفراً ، نستنتج أن :

$$\text{div}_2\,\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = 0.$$

أما برهان العلاقة الثانية فانه يتطلب جهداً أكبراً . فيأخذ مفكوك الضرب الاتجاهي نحصل على :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{i}[J_y(\mathbf{r}_1)(z_2 - z_1) - J_z(\mathbf{r}_1)(y_2 - y_1)] + \mathbf{j}[J_z(\mathbf{r}_1)(x_2 - x_1) - J_x(\mathbf{r}_1)(z_2 - z_1)] + \mathbf{k}[J_x(\mathbf{r}_1)(y_2 - y_1) - J_y(\mathbf{r}_1)(x_2 - x_1)]. \quad \text{(III–5)}$$

ومن هذه العلاقة نجد أن المركبة x للكمية curl B تصبح كالآتي :

$$[\mathbf{curl}_2\, \mathbf{B}(\mathbf{r}_2)]_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\left\{\frac{J_x(\mathbf{r}_1)(y_2 - y_1) - J_y(\mathbf{r}_1)(x_2 - x_1)}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}}\right\} - \frac{\partial}{\partial z_2}\left\{\frac{J_z(\mathbf{r}_1)(x_2 - x_1) - J_x(\mathbf{r}_1)(z_2 - z_1)}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}}\right\}\right) dv_1. \quad \text{(III–6)}$$

لكن

$$\frac{y_2 - y_1}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}} = = -\frac{\partial}{\partial y_2}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{-1/2} = \frac{\partial}{\partial y_1}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{-1/2},$$

لذلك يمكن كتابة المعادلة (III–6) بالشكل الآتي :

$$[\mathbf{curl}_2\, \mathbf{B}(\mathbf{r}_2)]_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \left\{-J_x(\mathbf{r}_1)\left(\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right) \times [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{-1/2} - \left(J_y(\mathbf{r}_1)\frac{\partial}{\partial y_2} + J_z(\mathbf{r}_1)\frac{\partial}{\partial z_2}\right) \times \frac{x_2 - x_1}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}}\right\} dv_1.$$

وباضافة

$$-J_x(\mathbf{r}_1)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{-1/2}$$

$$-J_x(\mathbf{r}_1)\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{(x_2-x_1)}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{3/2}}=0$$

الى الكمية المطلوب تكاملها ينتج الآتي :

$$[\mathbf{curl}_2\,\mathbf{B}(\mathbf{r}_2)]_x=$$
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left\{-J_x(\mathbf{r}_1)\nabla_2^2\frac{1}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2}}\right.$$
$$-\left[J_x(\mathbf{r}_1)\frac{\partial}{\partial x_2}+J_y(\mathbf{r}_1)\frac{\partial}{\partial y_2}+J_z(\mathbf{r}_1)\frac{\partial}{\partial z_2}\right]$$
$$\left.\times\frac{x_2-x_1}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{3/2}}\right\}dv_1. \qquad \text{(III–7)}$$

وفي الحد الثاني من هذه المعادلة يمكن إستبدال كل مشتقة جزيئة بالنسبة للمتغير $\mathbf{r}_2$ بمشتقة مناظرة لها بالنسبة للمتغير $\mathbf{r}_1$ باشارة سالبة ، ومن ثم ينجز التكامل بطريقة التجزئة . ونتيجة التكامل بالتجزئة تؤول الى حد يتناسب مع الكمية $\mathbf{divJ}$ ، التي أفترض تلاشيها ، والى حد آخر هو تكامل سطحي . وفي حالة التوزيعات التيارية المحددة يمكن دائماً إختيار السطح بحيث يكون ضئيلاً بدرجة كافية بحيث يتلاشى التكامل السطحي . الحد الأول للمعادلة (III–7) يعطي العلاقة الآتية :

$$[\mathbf{curl}_2\,\mathbf{B}(\mathbf{r}_2)]_x=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V J_x(\mathbf{r}_1)$$
$$\times\nabla_2^2\frac{1}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2}}dv_1.$$

اللابلاسيان يعطي نتيجة قيمتها صفراً عدا الحالة التي يكون عندها $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2$. وبهذا يمكن إستبدال الدالة $J_x(r_1)$ بالدالة $J(r_2)$ وبالتالي إخراجها خارج علامة التكامل . أما الجزء المتبقي من التكامل فمن السهل حسابه باستخدام نظرية التباعد :

$$\int_V\nabla_2^2\frac{1}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2}}dv_1=-4\pi,$$

ومنها ينتج

$$[\text{curl}_2\, \mathbf{B}(\mathbf{r}_2)]_x = \mu_0 J_x(\mathbf{r}_2) \tag{III-8}$$

وبهذا نحصل على النتيجة المطلوبة وهي

$$\text{curl}\, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J},$$

الملحق الرابع

العوامل التفاضلية المتجهة :
VECTOR DIFFERENTIAL OPERATORS

اولاً ـ الاحداثيات المتعامدة

$$\textbf{grad}\ \varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$\text{div}\ \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

$$\textbf{curl}\ \mathbf{F} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right).$$

ثانياً ـ الاحداثيات الاسطوانية

$$\textbf{grad}\ \varphi = \mathbf{a}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$\text{div}\ \mathbf{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

$$\textbf{curl}\ \mathbf{F} = \mathbf{a}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right) + \mathbf{a}_\theta\left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) + \mathbf{k}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right).$$

ثالثاً ـ الاحداثيات الكروية

$$\textbf{grad}\ \varphi = \mathbf{a}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \mathbf{a}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi},$$

$$\text{div}\ \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi},$$

$$\textbf{curl}\ \mathbf{F} = \mathbf{a}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\phi\sin\theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right] + \mathbf{a}_\theta\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r}\right] + \mathbf{a}_\phi\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right].$$

اما اللابلاسيان لكمية لا متجهة ($\nabla^2 U$) فقد اعطي في البند (1-3) بدلالة هذه الانظمة الثلاث للاحداثيات . المتطابقات الاتجاهية معطاة في الجدول (1-1) .

الملحق الخامس

التكهرب الستاتيكي STATIC ELECTRIFICATION

إن اقـدم فرع لموضوعنـا ـ الكهربـائيـة والمغنـاطيسيـة ـ هو التكهرب الستاتيكي ، ونعني به توليد جهود عالية بجلب مادتين غير متشابهتين الى أن يتلامسا ثم فصلها . هذه الظاهرة الشيقة يوقف شرحها عادة بصورة مفاجئة بعد مناقشة مختصرة لبضعة تجارب كلاسيكية ، حيث يعتبر ذلك كافياً لتعريف القاريء بالمفاهيم المتعلقة بالشحنة وبفصل الشحنة . الشرح الكامل لهذه الظاهرة خارج نطاق هذا الكتاب ، لان ذلك يقودنا الى الخوض بالثرموديناميك وبنظرية الكم للمادة . ومع ذلك فلا بأس من ذكر عدد من الملاحظات حول هذا الموضوع .

عند جلب مادتين غير متشابهتين الى أن يتلامسا ، تحدث أنواع مختلفة من الاتزانات . أحد هذه الاتزانات هو الاتزان الحراري ، حيث تنساب الحرارة من المادة الساخنة الى المادة الباردة في محاولة لجعل درجة حرارة المادتين متساوية . الاتزان الآخر الذي يرتبط بصورة مباشرة مع المناقشة التي نحن بصددها يتضمن محاولة لتساوي الجهد الكهروكيميائي للمادتين . الجهد الكهروكيميائي هو جهد ثرموديناميكي يعمل على السيطرة على انسياب الجسيمات المشحونة (الالكترونات) من مادة لأخرى . وبهذا تنساب الالكترونات من المادة التي تكون ذات جهد كهروكيميائي عالٍ في البداية الى المادة ذات الجهد المنخفض الى أن يتساوى الجهدان .

فروق الجهد الكهروكيميائي بين مادتين إعتيادياً لا تتجاوز بضعة إجزاء عشرية من الالكترون ـ فولت . وهذا يعني ، بعد حدوث التماس مباشرة يتحرك الالكترون من مادة لأخرى بتأثير "قوى كيميائية" ، كما لو تأثر بفرق جهد قدره بضعة أجزاء عشرية من الفولت . (الفرق في الجهد الكهروكيميائي بين مادتين يساوي الفرق في دالة الشغل لهما . واعتيادياً يمكن كهربة معدنين مختلفين بالطريقة المعروفة بشرط أن يمسك كل منهما بمقبض عازل لكي لا تتسرب الشحنة منهما خلال عملية الشحن) . لكن إنتقال الشحنة يولد فرقاً في الجهد الكهروستاتيكي . ولهذا السبب ينتقل قدراً كافياً من الشحنة من إحدى المادتين الى الأخرى عندما يتلامسان لتكوين فرق جهد قيمته لا تتجاوز بضعة أجزاء عشرية من الفولت اعتيادياً .

وقد لا يكون هذا القدر من فرق الجهد الناشيء عن قوى كيميائية مثيراً للدهشة . ولكن ، ما أصل منشأ الفولتيات الكبيرة (10^4 الى 10^5 من الفولتات) التي نلاحظها في تجارب التكهرب الستاتيكي ؟ تنشأ هذه الفولتيات خلال عملية إبعاد احدى المادتين عن الاخرى . والطاقة اللازمة لتوليد هذه الجهود العالية تجهز بواسطة الأداة أو الماكنة التي تعمل على تفريق المادتين .

رأينا كيف أن جلب مادتين مختلفتين وجعلهما يتلامسان يؤدي الى إنتقال الشحنة . هاتان المادتان يمكن عدّهما بمثابة "لوحين" لمتسعة . وعملية إبعاد المادتين إحداهما عن الاخرى تناظر عملية إبعاد أحد اللوحين عن الآخر لمتسعة ذات شحنة قدرها Q . ومن التعريف الاساسي للسعة نجد أن :

$$Q = C(\Delta U),$$

إذ يتضح أن فرق الجهد ΔU يزداد كلما نقصت سعة المنظومة . وبتقريب كافٍ يمكننا أن نعد المادتين المكهربتين بمثابة لوحي متسعة ذات لوحين متوازيين . وقد لا يكون هذا التقريب سيئاً طالما كانت المسافة الفاصلة بين اللوحين صغيرة . في هذه الحالة (لاحظ الفصل السادس) ، تتناسب السعة عكسياً مع المسافة الفاصلة بين اللوحين . ولهذا السبب قد نتوقع حدوث تكبير في فرق الجهد قدرة مليون مرة عند ابعاد المادتين من مسافة قدرها عشرة انكسترومات الى مسافة فاصلة قدرها مليمتراً واحداً .

القيمة النهائية للفولتية التي يتم الحصول عليها بهذه الوسيلة تعتمد تفصيلياً على الوضع الهندسي . سعة المتسعة مثلاً تتحدد بالوضع الهندسي للمنظومة . فضلاً عن ذلك نجد أن خشونة السطح تحدد المسافة الابتدائية الفاصلة بين المادتين عند جلبهما الى حالة التلامس ، كما تحدد كذلك انتظام توزيع الشحنة على السطوح . تركيز الشحنة عند الرؤوس المدببة للسطح يولد مجالات كهربائية كبيرة قد تزيد على قوة إنهيار العازل الهوائي خلال عملية إبعاد المادتين . ولهذا قد تنشأ شرارة كهربائية مولدة تفريغاً جزئياً لشحنة الاجسام المكهربة .

أجوبة المسائل الفردية

الفصل الاول

1-1. $(\mathbf{A}-\mathbf{B})\times(\mathbf{C}-\mathbf{D})=0,\quad 1{:}3$

1-3. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0, \mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$

1-7. The angle between $\mathbf{R}$ and $\mathbf{R}-\mathbf{A}$, which is 90°, may be inscribed in a semicircle with $\mathbf{A}$ as diameter. As $\mathbf{R}$ varies, the various semicircles describe the surface of a sphere.

1-11. $\operatorname{div}\mathbf{F}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rF_r)+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{\partial F_z}{\partial z}$

الفصل الثاني

2-1. $\tan^3\theta/(1+\tan^2\theta)=q^2/16\pi\epsilon_0\, mg\, l^2$

2-3. $\mathbf{E}=2296$ volts/m (along diagonal)

2-5. (a) $E=(\sigma/2\epsilon_0)(1-z/\sqrt{z^2+R^2})$

(b) $$E=(\beta/2\epsilon_0)\left[\frac{L}{2}\left(\frac{L}{2}-\sqrt{\frac{L^2}{4}+R^2}\right)+R^2\log\left(\frac{L}{2R}+\sqrt{1+\frac{L^2}{4R^2}}\right)\right]$$

2-7. $x=\sqrt{2}a/(\sqrt{2}-1)$, saddlepoint

2-9. $$U=(\rho/4\epsilon_0)\left[(z+\tfrac{1}{2}L)\{(z+\tfrac{1}{2}L)^2+R^2\}^{1/2}-2zL-(z-\tfrac{1}{2}L)\{(z-\tfrac{1}{2}L)^2+R^2\}^{1/2}+R^2\log\left\{\frac{z+\frac{1}{2}L+\sqrt{(z+\frac{1}{2}L)^2+R^2}}{z-\frac{1}{2}L+\sqrt{(z-\frac{1}{2}L)^2+R^2}}\right\}\right]$$

2-11. 300,000 volts

2-13. 1.1×10^{-12} coulomb/m^3, positive.

2-15. (a) $U=(A/\epsilon_0)(R-\frac{1}{2}r)$ for $r\le R$

$U=AR^2/2\epsilon_0 r$ for $r\ge R$

(b) $U=(\rho_0/2\epsilon_0)(R^2-\frac{1}{3}r^2)$ for $r\le R$

$U=R^3\rho_0/3\epsilon_0 r$ for $r\ge R$

2-17. Treat dipole as two equal but oppositely charged point charges separated by a small distance.

2-19. $Q_{11}=Q_{22}=-2ql^2$; $Q_{33}=4ql^2$; other components zero.

الفصل الثالث

3-1. Between: $U=\dfrac{r_bU_b-r_aU_a+(U_a-U_b)r_ar_b/r}{r_b-r_a}$;

for $r>r_b$: $U=U_br_b/r$

3-7. $U=-(1-a^3/r^3)E_0r\cos\theta+Q/4\pi\epsilon_0 r$

3-9. $\sigma=-\epsilon_0A/2r^{1/2}$ on upper surface.

3-11. The mirror image of the charge distribution with ρ replaced by $-\rho$.

3-15. $M=(x_0/a)+\sqrt{(x_0/a)^2-1}$, image at $x_0(M^2-1)/(M^2+1)$.

3-17. $3p^2/32\pi\epsilon_0\, d^4$, attraction.

الفصل الرابع

4–1. $\rho_P = -2ax;\ Q_P$ (on ends) $= A(aL^2 + b),\ -bA$

4–3. $E_z = \dfrac{P}{2\epsilon_0}\left[\dfrac{\frac{1}{2}L - z}{\sqrt{(\frac{1}{2}L - z)^2 + R^2}} + \dfrac{\frac{1}{2}L + z}{\sqrt{(\frac{1}{2}L + z)^2 + R^2}}\right]$ outside rod.

4–5. $E = (1/\epsilon_0)P\cos\gamma$

4–7. $\dfrac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \dfrac{K_1}{K_2}$

4–9. $q' = [(\epsilon_1 - \epsilon_2)/(\epsilon_1 + \epsilon_2)]q;\ \ q'' = 2\epsilon_2 q/(\epsilon_1 + \epsilon_2)$

4–11. $D = K\epsilon_0\,\Delta U/[K\,d - (K - 1)t]$.

4–13. $E = Q/2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2$

4–15. Inside: $\mathbf{E} = -\mathbf{P}/3\epsilon_0$

outside: $E_r = \dfrac{2R^3P}{3\epsilon_0 r^3}\cos\theta$

$E_\theta = \dfrac{R^3P}{3\epsilon_0 r^3}\sin\theta$

الفصل الخامس

5–1. $\alpha = 9.7 \times 10^{-41}$ coul·m²/volt; $R_0 = 0.96 \times 10^{-10}$ m

5–3. 2.6×10^{-16} m

5–5. 2.94×10^{-30} coul·m

الفصل السادس

6–1. 18.75 cm

6–3. $4\pi R^5\rho_0^2/15\epsilon_0$

6–5. $-(R/d)q$

6–7. $\epsilon_1\epsilon_2/(\epsilon_1\,d_2 + \epsilon_2\,d_1)$

6–9. 23.8 volts

6–13. (a) $Kl(\Delta U)_0/[l + (K - 1)x]$

(b) $(K - 1)Q^2d/2\epsilon_0 w[l + (K - 1)x]^2$

6–15. $[4\,mg/2\pi\epsilon_0(K - 1)]^{1/2}$

الفصل السابع

7–1. (a) $v = 0.739 \times 10^{-7}$ m/sec

(b) $\tau = 5.0 \times 10^{-14}$ sec

7–3. $U_{\text{int}} = \dfrac{U_1g_1(d - a) + U_2g_2a}{g_2a + g_1(d - a)}$,

$\sigma = \dfrac{(g_1\epsilon_2 - g_2\epsilon_1)(U_1 - U_2)}{g_2a + g_1(d - a)}$

7–5. 20 ohms

7–7. $I = 2\pi g\,\Delta U/\ln(r_2/r_1)$

7–11. $I = \pi gs\,\Delta U/\cosh^{-1}(b/2a)$

7–13. (a) $I = (\mathcal{E}_2R_1 + \mathcal{E}_1R_2)/(R_1R + R_2R + R_1R_2)$

(b) $R_1R_2/(R_1 + R_2)$

7–15. (a) $4R/5$ (b) $(11/20)R$

7–17. (a) $(R_4R_5 - R_3R_6)\mathcal{E}_1/[D + R_g(R_3 + R_4)(R_5 + R_6)]$,

where $D = R_3R_4R_5 + R_4R_5R_6 + R_5R_6R_3 + R_6R_3R_4$

7–19. One part in 4×10^6

الفصل الثامن

8-3. (a) 0.0048 cm
(b) 1.64×10^{-7} sec

8-5. $B = \sqrt{3}\mu_0 I/\pi a$

8-7. $\mu_0 IN/4a$

8-9. $\mu_0 NI$

8-11. (a) $\dfrac{\partial B_r}{\partial z} = \dfrac{\partial B_z}{\partial r}$

8-13. $\textbf{curl curl B} = \mu_0 \textbf{ curl J} = 0.$

8-15. $B = \mu_0 NI/2\pi r,\ b/a = 4/3$

8-17. $A_z = (\mu_0 I/2\pi) \ln (r/b)$ between the conductors

8-19. (d) $B_r = (\mu_0 I/2a)\left[\cos\theta - \dfrac{3r^2}{4a^2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) + \cdots\right]$

$$B_\theta = (\mu_0 I/2a)\left[-\sin\theta + \frac{3r^2}{4a^2}(5\cos^2\theta - 1)\sin\theta + \cdots\right]$$

الفصل التاسع

9-5. (a) From b to a
(b) From b to a
(c) From a to b

9-7. $\frac{1}{2}B^2a^2r^2\omega gt$

9-9. $(\mu_0 L/2\pi) \ln (R_2/R_1)$

9-11. $\mu_0 \pi a^2 b^2/4r^3$

9-13. $M = (\mu_0 h/2\pi) \ln (1 + d/r)$

الفصل العاشر

10-1. $\mathbf{J}_M = \textbf{curl M} = 0.$
$j_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n};\ j_M = M$ on cylindrical surfaces, $j_M = 0$ on sides.

10-3. (b) $(4/3)\pi R^3 \mathbf{M}_0$

10-5. $\sigma_M = M_0 x/[x^2 + (b^4/a^4)(y^2 + z^2)]^{1/2}$
$\rho_M = 0.$

10-7. (b) $B_z = \frac{1}{2}\mu_0 M\left[\dfrac{\frac{1}{2}L - z}{\sqrt{(\frac{1}{2}L - z)^2 + R^2}} + \dfrac{\frac{1}{2}L + z}{\sqrt{(\frac{1}{2}L + z)^2 + R^2}}\right]$

10-9. (a) 0.25 w/m^2
(b) 0.95 w/m^2
(c) 1.52 w/m^2

10-11. 0.002 henry

10-13. (a) Sintered oxide 0.4 w/m^2
35% Co steel 0.22 w/m^2
(b) Sintered oxide 0.53 w/m^2
35% Co steel 0.96 w/m^2

10-15. 0.64 w/m^2

10-17. $\mathbf{B}_i = 2(\mu/\mu_0)\mathbf{B}_0/(1 + \mu/\mu_0)$

الفصل الحادي عشر

11–3. 3.69×10^{-4}
11–5. $\gamma = 976$

الفصل الثاني عشر

12–3. $W = \frac{1}{s+2}\left[L_1^{(f)} I_1^{(f)2} + 2M_{12}^{(f)} I_1^{(f)} I_2^{(f)} + L_2^{(f)} I_2^{(f)2}\right]$

12–5. $\frac{N^2 I^2 A \mu^2}{\mu_0 (l + d)^2}$

12–7. (a) $F = B_0^2 \chi_m A / 2\mu_0 (1 + \chi_m)$
(b) 1.76×10^{-4} newton

12–11. Commercial iron: 0.018 watt/cm^3
Tungsten steel: 0.395 watt/cm^3

12–13. $-d(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$

الفصل الثالث عشر

13–1. (a) $I = 0.605$ amp,
$dI/dt = 1.59$ amp/sec
(b) $I = 1.295$ amp,
$dI/dt = 0.558$ amp/sec
(c) $I = 1.663$ amp,
$dI/dt = 0.0062$ amp/sec

13–3. $Q = C\mathcal{E}_0[1 - e^{-t/RC}]$

13–5. $Z = \frac{R\alpha - \omega C' R(\omega L - 1/\omega C) + j[\omega C' R^2 + (\omega L - 1/\omega C)\alpha]}{\alpha^2 + \omega^2 C'^2 R^2},$
where $\alpha = 1 + \omega^2 C' L - C'/C$

13–7. (a) 3.2×10^{-2} deg
(b) zero to 1.8 megacycles/sec

13–9. (a) $f = 1.78 \times 10^3$ cycles/sec
(b) $f = 1.78 \times 10^3$ cycles/sec
(c) $f = 0.796 \times 10^3$ cycles/sec

13–11. (a) $L/C = 2R^2$
(b) $L = \sqrt{2}\, R/\omega_c;\ C = 1/\sqrt{2}\, R\omega_c$

13–13. $0.0713 - 0.0034j$ milliamp

13–15. $1/\sqrt{3LC}$

13–17. $V_1 = -100 - 700j$ volts
$V_2 = 150 - 750j$ volts

الفصل الرابع عشر

14–5. $F_1 = (2/5)\pi a^3 \sigma B_0^2 v_0$

الفصل الخامس عشر

15–1. (a) $Q = C(\Delta U)e^{-gt/\epsilon}$
(b) $-(g/\epsilon)C(\Delta U)e^{-gt/\epsilon}$
(c) Zero

15-5. $\mathbf{B} = -\mathbf{i}E_0\sqrt{\epsilon\mu}\sin\omega(\sqrt{\epsilon\mu}z - t) + \mathbf{j}E_0\sqrt{\epsilon\mu}\cos\omega(\sqrt{\epsilon\mu}z - t)$

$\mathbf{S} = \mathbf{k}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}E_0^2$

15-7. $E = 700$ v/m; $B = 2.33 \times 10^{-6}$ w/m^2, rms.

15-9. $\mathbf{A} = -\mathbf{i}(\lambda E_0/2\pi c)\cos[2\pi(z - ct)/\lambda]$

الفصل السادس عشر

16-1. $R = \dfrac{2r[1 + \cos(2\omega nd/c)]}{1 + r^2 + 2r\cos(2\omega nd/c)}$, where $r = \left[\dfrac{n-1}{n+1}\right]^2$

16-3. (1) $E_{1,0} + E_{2,0} = E_{3,0}$

(2) $\sqrt{\epsilon_1/\mu_1}\cos\theta_1(E_{1,0} - E_{2,0}) = \sqrt{\epsilon_2/\mu_2}\,E_{3,0}\cos\theta_3$

16-5. (a) $\dfrac{E_{2,0}}{E_{1,0}} = \dfrac{\sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2\theta_1} - (n_2/n_1)^2\cos\theta_1}{\sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2\theta_1} + (n_2/n_1)^2\cos\theta_1}$,

$\dfrac{E_{3,0}}{E_{1,0}} = \dfrac{2(n_2/n_1)\cos\theta_1}{\sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2\theta_1} + (n_2/n_1)^2\cos\theta_1}$

(b) Total internal reflection

16-7. $B_z = B_1\cos(\kappa y\cos\theta)e^{j(\kappa z\sin\theta - \omega t)}$

$E_y = -cB_1\sin\theta\cos(\kappa y\cos\theta)e^{j(\kappa z\sin\theta - \omega t)}$

$E_z = jcB_1\cos\theta\sin(\kappa y\cos\theta)e^{j(\kappa z\sin\theta - \omega t)}$

16-9. $\dfrac{\lambda}{2} < a < \dfrac{\lambda}{\sqrt{2}}$

16-11. $B_\theta = \dfrac{\mu_0 I_0}{4\pi}\,A\,\dfrac{\omega^2}{c^2 r}\sin\theta\cos\omega\left(t - \dfrac{r}{c}\right)$

$E_\phi = -\dfrac{I_0 A}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{\omega^2}{c^3 r}\sin\theta\cos\omega\left(t - \dfrac{r}{c}\right)$, where A is the area of the circular loop.

$P = \dfrac{\mu_0}{6\pi}\,I_0^2 A^2\,\dfrac{\omega^4}{c^3}\cos^2\omega\left(t - \dfrac{r}{c}\right)$

الفصل السابع عشر

17-3. $\dfrac{\mathbf{u}}{1 + u^2/c^2} = \dfrac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{(E^2/c^2 + B^2)}$

الفصل الثامن عشر

18-1. (a) $\mathbf{B} = B_0\mathbf{i} - B_0(a/r)^2(\mathbf{a}_r\cos\theta + \mathbf{a}_\theta\sin\theta)$ outside

$\mathbf{B} = \mathbf{H} = 0$ inside

$\mathbf{j}_S = -2B_0\mu_0^{-1}\sin\theta\,\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{B} = B_0\mathbf{i} - b(a/r)^2(\mathbf{a}_r\cos\theta + \mathbf{a}_\theta\sin\theta)$ outside

$\mathbf{B} = c[\mathbf{a}_r(\lambda/r)I_1(r/\lambda)\cos\theta - \mathbf{a}_\theta I_0(r/\lambda)\sin\theta]$ inside,

with I_0 and I_1 modified Bessel functions of the first kind, and

$b = B_0\dfrac{[I_0(a/\lambda) - (\lambda/a)I_1(a/\lambda)]}{I_0(a/\lambda) + (\lambda/a)I_1(a/\lambda)}$

$c = 2B_0/[I_0(a/\lambda) + (\lambda/a)I_1(a/\lambda)]$

18-3. (c) For $r = a - \delta$ with $\delta \ll a$ and $\lambda \ll a$

$u(r) = 3B_0(\lambda/a)e^{-\delta/\lambda}$

$v(r) = -(3/2)B_0e^{-\delta/\lambda}$

معجم المصطلحات العلمية التي وردت في الكتاب
إنكليزي ـ عربي

A

Acceleration	تعجيل ، تسارع
Active	فعال
Active circuit element	عنصر الدائرة الفعال
Additive constant	ثابت جمعي
Adiabatic	كَظيم
Adiabatic process	عَملية كَظيمة
Admittance	مُسامحة
Alloy	سَبيكة
Alpha particle	جسيم ألفا
Alternating current	تيار متناوب أو متردد
Ampere's circuital law	قانون أمبير للدائرة الكهربائية
Ampere's law	قانون أمبير
Amperian current	تيار أمبيري
Anisotropic material	مواد غير متساوية الاتجاه
Annealed iron	حديد مطاوع
Anode	مصعد ، أنود
Antiferromagnet	لا فيرومغناطيس
Antimony	قصدير
Argument (of a complex number)	زاوية (عدد مركب)
Array	صَفيف
Associative law	قانون الترافق
Associative property	خاصية الترافق
Asympototic	تقاربي
Atmosphere	غلاف جوي ، جو
Atmospheric electricity	كهربائية الجو
Atom	ذرة
Atomic current	تيار ذري
Atomic mass	كتلة ذرية

Atomic number	عدد ذري
Attraction	جاذبية ، جذب
Audio frequency	تردد سمعي
Average	متوسط
Average power	قدرة متوسطة
Average value	قيمة متوسطة
Azimuthal angle	زاوية سمتية

B

Battery	بطارية
Battery (storage)	بطارية خزن
Bessel function	دالة بسل
Bessel's equation	معادلة بسل
Binomial theorem	نظرية ذي الحدين
Bound charge	شحنة مقيدة
Boundary conditions	شروط الحدود
Boundary-value problems	مسائل القيم الحدودية
Branch point	نقطة تفرع
Brewster's law	قانون بروستر
Bridge	قنطرة

C

Cable	سلك محوري ، قابلو
Cable (coaxial...)	سَلك متحد المحور
Calculus	حَسبان التفاضل
Capacitance	سعة
Capacitive reactance	رادة سعوية
Capacitive time constant	ثابت الزمن السعوي
Capacitor	متسعة
Cartesian coordinates	إحداثيات ديكارتية
Cascading process	عملية التتابع
Cathode	مهبط ، كاثود

Cathode rays	اشعة مهبطية أو كاثودية
Cavity resonator	تجويف رنان
Charge	شحنة
Charge carriers	ناقلات الشحنة
Charge density	كثافة الشحنة
Circuit	دائرة كهربائية
Closed loop	عروة أو دارة مغلقة
Coefficient	معامل
Coefficient of capacitance	معامل السعة
Coefficient of induction	معامل الحث
Coefficient of potential	معامل الجهد
Coercivity	حفاظية ، قهرية
Cohesive force	قوة التماسك
Collision time	زمن التصَادم
Complex number	عدد مركب
Conductance	مُوصِّلية ، توصيلية
Conducting medium	وسط موصل
Conducting path	مسار موصل
Conduction	توصيل
Conduction current	تيار التوصيل
Conductivity	توصيل نوعي
Conductor	مُوصِّل
Conjugate	مترافق
Conservation of charge	بقاء الشحنة ، حفظ الشحنة
Continuity	إستمرار
Continuous	متصل ، مستمر
Continuous charge distribution	توزيع متصل للشحنة
Continuum	متواصل
Contour line	خط مناسيبي
Contour map	خريطة مناسيبية
Convection current	تيار حمل
Coulomb's law	قانون كولوم

Counter voltage	فولتية مضادة
Covarient formulation	الصياغة اللامتغيرة
Critical magnetic field	مجال مغناطيسي حرج
Cross product	ضرب تقاطعي (أو اتجاهي)
Crystal	بلورة
Crystal lattice	شبيكة بلورية
Crystal structure	تركيب بلوري
Curie point	نقطة كوري
Curie temperature	درجة حرارة كوري
Curl	التفاف (أو دوران)
Current (electric)	تيار كهربائي
Current (alternating...)	تيار متناوب
Current (continuous...)	تيار متواصل
Current (direct..)	تيار مباشر
Current (induced...)	تيار محتث
Current (steady...)	تيار ثابت (أو مطرد)
Current (transient...)	تيار عابر (أو إنتقالي)
Current density	كثافة التيار
Curvilinear coordinates	إحداثيات منحنية
Cutoff wavelength	طول موجة القطع
Cyclic permutation	تبديل دوري
Cyclindrical harmonics	توافقيات اسطوانية

D

Damping	تضاؤل ، مضاءلة
Debye shielding distance	مسافة دباي للحجب
Decrement	تناقص
Deformation polarizability	قابلية الاستقطاب التشويهية
Demagnetization	إزالة التمغنط ، نزع التمغنط
Demagnetization factor	عامل ازالة التمغنط
Demagnetizing field	المجال مزيل التمغنط
Density	كثافة
Depolarization	إزالة الاستقطاب ، نزع الاستقطاب

Depolarizing field	المجال مزيل الاستقطاب
Derevative	مشتقة
Diamagnetic material	مادة دايامغناطيسية
Diamagnetism	الدايامغناطيسية
Dielectric	عازل كهربائي
Dielectric constant	ثابت العزل أو ثابت العازل
Dielectric medium	وسط عازل
Dielectric strength	قوة العزل
Differential equation	معادلة تفاضلية
Differentiation	تفاضل
Diffusion	إنتشار
Dilation (time...)	تمدد الزمن
Dimension	بُعد
Dipole	ثنائي قطب
Dipole field	مجال ثنائي القطب
Dipole momont	عزم ثنائي القطب
Dipole potential	جهد ثنائي القطب
Directional derivative	مشتقة ذات إتجاه
Discontinuity	انقطاع
Discontinuous	منقطع ، غير متصل
Discrete	منفصل
Displacement (electric)	إزاحة كهربائية
Displacement current	تيار الازاحة
Divergence	تباعد
Divergence theorem	نظرية التباعد
Domain (magnetic)	منطقة مغناطيسية
Domain wall	جدار المنطقة
Dot product	ضرب نقطي ، ضرب لا متجه
Drift	انحراف ، إنسياق
Drift motion	حركة إنحرافية أو إنسياقية
Driving force	قوة السوق
Driving point	نقطة السوق

E

Eddy current	تيار دوام
Effective electric field	مجال كهربائي فعال
Effective value	قيمة فعالة
Efficiency	كفاءة
Elastic collision	تصادم مرن
Electric charge	شحنة كهربائية
Electric field	مجال كهربائي
Electric flux	فيض كهربائي
Electric lines of force	خطوط القوة الكهربائية
Electric susceptibility	قابلية التكهرب ، التأثرية الكهربائية
Electrochemical potential	جهد كهروكيميائي
Electrodynamics	الكترودیناميك
Electrolyte	محلول الكتروليتي
Electromagnetic energy	طاقة كهرومغناطيسية
Electromagnetic field tensor	ممتد المجال الكهرومغناطيسي
Electromagnetic induction	حث كهرومغناطيسي
Electromotive force	قوة دافعة كهربائية
Electroscope	كشاف كهربائي
Electrostatic energy	طاقة كهروستاتيكية
Electrostatic equilibrium	إتزان كهروستاتيكي
Electrostatic image	صورة كهروستاتيكية
Ellipse	قطع ناقص
Ellipsoid	مجسم قطع ناقص
Elliptic integral	تكامل ناقصي
Energy density	كثافة الطاقة
Entropy	قصور حراري ، أنتروبي
Equation of continuity	معادلة الاستمرارية
Equilibrium	إتزان ، توازن
Equipotential	متساوي الجهد
Exact	تام ، مضبوط
Exact differential	مشتقة تفاضلية تامة
Exact function	دالة تامة

Exchange coupling	تقارن متبادل
Expand	يفك ، يوسع ، يمدد
Expansion	فك ، توسيع ، تمدد
Explicit form	صيغة صريحة ، هيئة صريحة
Explicit function	دالة صريحة
Exponential	أسي

F

Ferriet	فيريت
Ferroelectric	فيروكهربائي
Ferromagnetic material	مادة فيرومغناطيسية
Ferromagnetism	الفيرومغناطيسية (المغناطيسية الحديدية)
Fluid	مائع
Fluid mechanics	ميكانيك الموائع
Flux	فيض
Flux exclusion	إقصاء الفيض ، استثناء الفيض
Form factor	عامل الهيئة
Free eletron	ألكترون طليق أو حر
Fringing effect	تأثير التهدب
Function	دالة

G

Gaussian surface	سطح كاوسي
Gauss' law	قانون كاوس
Geomagnetic latitude	خط عرض جيومغناطيسي
Gradient	إنحدار ، ميل
Graph	رسم بياني
Group velocity	سرعة المجموعة

H

Helmholtz coil	ملف هيلمولتز
Hydromagnetic formulation	صياغة هيدرومغناطيسية
Hysteresis (magnetic)	تخلف مغناطيسي

Hysteresis loop	دورة التخلف
Hysteresis loss	فقدان التخلف

I

Identity	متطابقة
Impedance	ممانعة
Imperfect dielectric	عازل غير تام
Impurities	شوائب
Increment	زيادة
Incremental inductance	حثية تفاضلية
Incremental permeability	نفوذية تفاضلية
Index of refraction	معامل انكسار
Induced	محتث
Inductance	حَثّيَة ، مُحاثَة
Induction	حث
Inductive reactance	رادة حثية
Inductor	مُحِث
Inelastic collision	تصادم غير مرن
Infinite	لا نهائي
Infinitesimal	متناهي الصغر
Infinity	مالا نهاية ، اللانهاية
Insulator	عازل
Integrand	دالة يطلب تكاملها
Integration	تكامل
Interaction	تأثير متبادل
Interface	سطح فاصل
Irreversible	غير قابل للعكس ، أو غير عكوس
Irreversible process	عملية غير قابلة للعكس ، أو غير عكوسة
Isothermal	متساوي الحرارة
Isotropic dielectric	عازل كهربائي متساوي الاتجاه

L

Langevin-debye formula	صيغة لنجفن ــ دباي
Laplace's equation	معادلة لابلاس
Larmor frequency	تردد لارمر
Lattice	شُبيكة
Law of Biot and Savart	قانون بايوت وسافارت
Leakage flux	فيض متسرب
Legendre polynomials	متعدَدات حدود لاجندر
Lenz's law	قانون لنز
Lienard-Wiechert potential	جهد لينارد ــ ويتشارت
Limit	غاية ، نهاية
Limiting process	عملية ايجاد الغاية
Line integral	تكامل خطي
Linear dielectric	عازل خطي
Linear function	دالة خطية
Linearity	خطية
Lines of force	خطوط القوة

M

Magnet	مغناطيس
Magnetic circuits	دوائر مغناطيسية
Magnetic dipole	ثنائي قطب مغناطيسي
Magnetic domain	منطقة مغناطيسية
Magnetic energy density	كثافة الطاقة المغناطيسية
Magnetic field	مجال مغناطيسي
Magnetic flux	فيض مغناطيسي
Magnetic induction	الحثَ المغناطيسي
Magnetic intensity	الشدة المغناطيسية
Magnetic mirror	مرآة مغناطيسية
Magnetic moment	عزم مغناطيسي
Magnetic parameter	مَعْلَم مغناطيسي
Magnetic saturation	اشبَاع مغناطيسي ، تشبع مغناطيسي
Magnetic shielding factor	عامل الحجب المغناطيسي
Magnetic susceptibility	التأثرية المغناطيسية ، قابلية التمغنط

Magnetism	المغناطيسية
Magnetization	التمغنط ، المغنطة
Magnetization current	تيار التمغنط ، تيار المغنطة
Magnetizing field	المجال الممغنط ، مجال التمغنط
Magnetomotive force	القوة الدافعة المغناطيسية
Mapping	تطبيق
Mass transport	انتقال كتلي
Maxwell–Boltzmann distribution	توزيع ماكسويل ـ بولتزمان
Mean collision time	متوسط زمن التصادم
Mean free path	متوسط المسار الحر
Meissner effect	تأثير ميسنر
Metallic conduction	توصيل معدني
Microscopic field	مجال مجهري
Mobility	حركية
Mode	منوال
Molecular field	مجال جزيئي
Monochromatic waves	موجات أحادية اللون
Motional emf	قوة دافعة كهربائية حركية
Multipole expansion	مفكوك متعدد الاقطاب
Mutual inductance	حثية متبادلة

N

Neumann formula	صيغة نيومان
Nonconducting medium	وسط غير موصل
Nonlinearity	اللاخطية
Nonpolar molecule	جزيئة غير قطبية
Nonuniqueness	اللاإنفرادية ، اللااحادية

O

Orbit theory	نظرية المدار
Ordinary dielectric	عازل اعتيادي
Orientational polarizability	قابلية الاستقطاب التراصفية
Orthogonal coordinates	احداثيات متعامدة

Oscilloscope	راسم الذبذبات ، مرسمة الذبذبات
Overdamping	مضاءلة شديدة

P

Parallelopiped	متوازي سطوح
Paramagnetic material	مادة بارامغناطيسية
Paramagnetism	البارامغناطيسية
Parameter	مَعْلَم
Partial derivative	مشتقة جزئية
Partial differential equation	معادلة تفاضلية جزئية
Particle	جسيم
Passive circuit	دائرة كهربائية غير فعالة
Penetration depth	عمق الاختراق
Perfect crystal	بلورة تامة ، بلورة مثالية
Perfect gas	غاز تام ، غاز مثالي
Periodic behavior	سلوك دوري
Permament magnet	مغناطيس دائم
Permeability	نفوذية
Permittivity	سماحية
Permutation	تبديل دوري
Pinch effect	ظاهرة التقلص
Plasma drift velocity	سرعة انجراف البلازما
Plasma-sheath equation	معادلة غلاف البلازما
Point charge	شحنة نقطية
Point function	دالة نقطية
Poisson's equation	معادلة بويزون
Polar molecule	جزيئة قطبية
Polarizabily	قابلية الاستقطاب
Polarization	استقطاب
Polarization charge	شحنة الاستقطاب
Polarization vector	متجه الاستقطاب
Pole (of a magnet)	قطب (مغناطيس)
Polynomial	متعدد الحدود

Polynomial expression	تعبير متعدد الحدود
Potential	جهد
Potential energy	طاقة الوضع ، طاقة كامنة
Power	قدرة
Power factor	عامل القدرة
Pointing vector	متجه بوينتنك
Principal	رئيسي
Principal axis	محور رئيسي
Principle of relativity	قاعدة النسبية
Probe	مجس
Problem	مسألة
Product	ناتج الضرب ، نتاج الضرب
Propagation vector	متجه الانتشار
Proportion	تناسب
Proportional	تناسي ، متناسب
Pure inductor	محث خالص ، ملف الحث الخالص
Pure number	عدد مجرد
Pure resistance	مقاومة خالصة ، مقاومة نقية

Q

Q-factor (quality factor)	عامل النوعية
Quadratic function	دالة تربيعية
Quadrupole	رباعي القطب
Quadrupole moment tensor	ممتد عزم رباعي القطب
Quantization	خاصية الكم
Quantized	مُكَمّى

R

Radial	نصف قطري ، شعاعي
Radiatiating magnetic dipole	ثنائي قطب مغناطيسي مشع
Radiation	اشعاع
Radiation resistance	مقاومة الاشعاع
Reactance	رادة

Reciprocal	مقلوب ، معكوس
Reflection	انعكاس
Relative permeability	معامل النفوذية النسبي ، المعامل المغناطيسي النسبية
Relativity	النسبية
Relativity (Theory of...)	النظرية النسبية
Relaxation time	زمن الارتخاء
Relevant dimension	بُعْد مناسب
Reluctance	مقاومة مغناطيسية
Remanence	مغناطيسية متبقية
Reservoir	خزان
Resistance	مقاومة
Resistivity	مقاومة نوعية
Resistor	مُقاوم ، مُقاومة
Resonance	رَنين
Retarded scalar potential	جهد مُعَوّق لا متجه
Retarded vector potential	جهد مُعَوّق متجه
Retentivity	مغناطيسية متبقية
Reversible	قابل للعكس ، عكوس
Reversible process	عملية قابلة للعكس
Rigid circuit	دائرة كهربائية صُلْبة
Rigid displacement	إزاحة صُلْبة
Rigidity	صلابة ، متانة

S

Saturation	إشباع ، تَشَبُّع
Scalar	لا متجه
Scalar field	مجال لا متجه
Scalar potential	جهد لا متجه
Scalar product	ناتج الضرب اللامتجه
Scalar quantity	كمية لا متجهة
Seat of emf	مصدر لقوة دافعة كهربائية
Self induced emf	ق د ك محتثة ذاتية
Self inductance	حثية ذاتية

Self induction	حث ذاتي
Semiconductor	شبة موصل ، نصف موصل
Seperation constant	ثابت الفصل
Sheath	غلاف
Single-valued function	دالة وحيدة القيمة
Singularity	انفرادية ، احادية
Skin depth	عمق قشري
Slowly varying current	التيارات المتغيرة ببطء
Soft iron	حديد مطاوع
Solenoid	ملف حلزوني
Solid angle	زاوية مجسمة
Source	مصدر ، منبع
Space	فضاء
Spatial integration	تكامل فضائي
Special theory of relativity	النظرية النسبية الخاصة
Spherical Bessel function	دالة بسل الكروية
Spherical waves	موجات كروية
Spin	برم ، غزل
Spin motion	حركة مغزلية
Spinel structure	تركيب أسبنيلي
Spontaneous magnetization	تمغنط تلقائي أو ذاتي
Static electrification	تكهرب ستاتيكي ، تكهرب ساكن
Statistical mechanics	ميكانيك إحصائي
Steady current	تيار ثابت ، تيار مُطّرد
Steady state	حالة الاستقرار ، حالة الثبات
Steady state conduction	حالة التوصيل المستقر أو الثابت
Stress	إجهاد
Successive differentiation	تفاضل تعاقبي أو تفاضل متوال
Superconducting wire	سلك مفرط التوصيل
Superconductivity	فرَط التوصيل
Superconductor	مفرط التوصيل
Surface charge density	كثافة الشحنة السطحية

Surface current	تيار سطحي
Surface integral	تكامل سطحي
Surface stress	اجهاد سطحي
Susceptance	تَقبُّليّة
Susceptibility (electric)	قابلية تكهرب الوسط ، التأثرية الكهربائية
Susceptibility (magnetic)	قابلية تمغنط الوسط ، التأثرية المغناطيسية
Symmetrical	متناظر ، متماثل

T

Temperature coefficient of resistance	معامل المقاومة الحراري
Tensor	ممتدة أو ممتد
Test charge	شحنة اختبارية ، شحنة اختبار
Tetrahedron	هرم ثلاثي ، رباعي السطوح
Thermal	حراري
Thermal energy	طاقة حرارية
Thermal gradient	منحدر حراري
Thermally-induced imperfections	شوائب محتثة حرارياً
Thermocouple	مزدوج حراري
Thermodynamics	الثرموديناميك ، الديناميك الحراري
Thunderstorm	زوبعة رعديَة
Time constant	ثابت الزمن
Time dilation	تمدد الزمن
Torque	عزم دوراني
Transfer impedance	ممانعة التحويل
Transformation law	قانون التحويل
Transformer	محولة
Transient behavior	سلوك عابر
Transient current	تيار عابر
Transition	انتقال ، تحول
Transmission coefficient	معامل النفاذية
Transverse waves	موجات مستعرضة
Trivial integration	تكامل بديهي
Trivial solution	حل بديهي

U

Uniform distribution	توزيع منتظم
Uniformly magnetized material	مادة منتظمة التمغنط
Unique	منفرد ، أوحد
Uniqueness	إنفراد ، وحدانية
Uniqueness theorem	نظرية الانفراد
Unit	وحدة
Unit imaginary number	وحدة العدد التخيلي
Unit vector	وحدة متجه

V

Vacuum	فراغ
Vector	متجه
Vector field	مجال متجه
Vector Helmholtz equation	معادلة هيلمولتز المتجهة
Vector identity	متطابقة متجهة
Vector potential	جهد متجه
Vector product	ناتج الضرب المتجه أو الاتجاهي
Vector sum	جمع إتجاهي
Voltage	فولتية
Volume charge density	كثافة الشحنة الحجمية
Volume integral	تكامل حجمي

W

Wave equation	معادلة الموجة
Waveguide	موجه الموجة ، دليل الموجة
Wave group	مجموعة موجية ، زمرة موجية
Weiss molecular field	مجال ويس الجزيئي
World point	نقطة كونية

Z

Zone	مِنطقة
Zonal	مِنطقية
Zonal harmonics	توافقيات مِنطقية